**Newton** Villas Bôas
Ricardo **Helou** Doca
**Gualter** José Biscuola

# TÓPICOS DE FÍSICA

# 2

Termologia
Ondulatória
Óptica

São Paulo

Tópicos de Física 2 – Termologia, Ondulatória, Óptica


**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Villas Bôas, Newton
Tópicos de física : volume 2 / Newton Villas Bôas, Ricardo Helou Doca, Gualter José Biscuola. — 19. ed. — São Paulo : Saraiva, 2012.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia
ISBN 978-85-02-17812-0 (aluno)
ISBN 978-85-02-17813-7 (professor)

1. Física (Ensino médio) 2. Física (Ensino médio) – Problemas, exercícios etc. I. Doca, Ricardo Helou. II. Biscuola, Gualter José. III. Título.

12-10555 CDD-530.07

Índices para catálogo sistemático:
1. Física: Ensino médio 530.07

**Gerente editorial** M. Esther Nejm
**Editor** Maria Ângela de Camargo
**Editores assistentes** Marcelo de Hollanda Wolff, Marcos Soel
**Assistente editorial** Denise Favaretto, Carla Daniela Araujo
**Coordenador de revisão** Camila Christi Gazzani
**Revisores** Lucia Scoss Nicolai (enc.), Clara Altenfelder Santos, Márcia Elisa Rodrigues, Patrícia Murari, Fausto Barreira
**Assistente de produção editorial** Rachel Lopes Corradini
**Coordenador de iconografia** Cristina Akisino
**Pesquisa iconográfica** Enio Rodrigues Lopes
**Licenciamento de textos** Marina Murphy Diniz
**Gerente de artes** Ricardo Borges
**Coordenador de artes** Vagner Castro dos Santos
**Produtor de artes** Narjara Lara
**Design** Marcos Puntel
**Capa** All Type com foto de Thinkstock/Getty Images
**Diagramação** Setup
**Ilustrações** CJT/Zapt, Francisco Vilachã, Luciano da S. Teixeira, Luis Augusto Ribeiro, Luis Fernando R. Tucillo, João Anselmo, Mozart Couto, Rodval Matias, Setup, Vicente Mendonça
**Tratamento de imagens** Bernard Fuzetti
**Impressão e acabamento**

**Impresso no Brasil – 2012**
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



www.editorasaraiva.com.br

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909
Fone: (11) 3613 3000 – Fax: (11) 3611 3308
Televendas: (11) 3616 3666 – Fax Vendas: (11) 3611 3268
**Atendimento ao professor:** (11) 3613 3030 – Grande São Paulo
0800 0117875 – Demais localidades
atendprof.didatico@editorasaraiva.com.br

## Ao estudante

Nesta quinta versão de ***Tópicos de Física***, celebramos 30 anos da primeira publicação da obra. Isso nos enche de satistafação e orgulho por termos, ao longo desse tempo, contribuído em grande medida para o ensino de Física no Brasil.

***Tópicos*** é uma obra viva, em permanente processo de renovação e aprimoramento. Pretendemos nesta edição, mais uma vez, oferecer um material contemporâneo e abrangente, capaz de satisfazer aos cursos de ensino médio mais exigentes.

Nesta versão, procuramos dar à obra um caráter interdisciplinar, contextualizado e instigante. Para isso buscamos, sempre que possível, propor questionamentos que ultrapassem os limites da Física e textos relacionados à história e aos avanços desta ciência, que é um edifício em permanente construção. Estão presentes também conteúdos relacionados ao dia a dia e informações sobre as conquistas tecnológicas, tudo para que ***Tópicos de Física*** seja sempre uma coleção atualizada e ainda mais atraente.

Optamos pela distribuição clássica dos conteúdos, e dividimos o material em três volumes.

*Volume 1*: Mecânica;

*Volume 2*: Termologia, Ondulatória e Óptica geométrica;

*Volume 3*: Eletricidade, Física moderna e Análise dimensional.

Cada volume compõe-se de *Partes*, que equivalem aos grandes setores de interesse da Física. Estas, por sua vez, são constituídas de *Tópicos*, que abordam determinado assunto teórica e operacionalmente. Em cada Tópico a matéria está divida em *Blocos*, que agregam itens relacionados entre si.

Nos *Blocos* a compreensão da teoria é favorecida pela inclusão de um grande número de exemplos práticos, ilustrações e fotos legendadas.

A maioria dos *Tópicos* é contemplada com as seções *Faça você mesmo, Leitura e Descubra mais*.

A seção *Faça você mesmo* propõe que você realize pequenos experimentos com recursos caseiros e, a partir disso, possa compreender melhor certos conceitos e fenômenos estudados. A seção *Leitura* permite que você entre em contato com relatos e questionamentos científicos e vislumbre outros conhecimentos que fazem fronteira com a Física.

A seção *Descubra mais* apresenta perguntas curiosas com a intenção de despertar em você uma atitude de busca pela resposta por meio de pesquisa em livros, revistas, sites e outras fontes.

Em cada *Tópico* há quatro grupos de exercícios com diferentes níveis de dificuldade:

*Exercícios nível 1* – requerem, de forma simples, conhecimento apenas dos conceitos essenciais. Esses exercícios estão logo após a apresentação da teoria de cada *Bloco*.

*Exercícios nível 2* – além dos aspectos conceituais, valorizam a descrição quantitativa dos fenômenos e contextos. Intercalados aos *exercícios nível 1* e *nível 2* há alguns *Exercícios resolvidos (ER)*, que servem de ponto de partida para o encaminhamento de questões semelhantes. Os *exercícios nível 2* estão logo após os *exercícios nível 1*.

*Exercícios nível 3* – em sua maioria são exercícios de vestibulares, nos quais inserimos elementos de complementação. Aparecem logo após a apresentação da teoria do último *Bloco* de cada *Tópico*.

*Para raciocinar um pouco mais* – comparecendo nesta edição em maior número, são exercícios com formulações mais difíceis, recomendados àqueles que se dispuserem a alcançar maior grau de aprofundamento no conhecimento de Física. Encontram-se logo após os *exercícios nível 3*.

Esperamos que, ao utilizar ***Tópicos de Física***, você amplie sua percepção de mundo e torne mais flexível seu raciocínio formal. Desejamos também que você adquira uma consistente visão dessa fascinante disciplina, o que, certamente, contribuirá para seu ingresso nas mais concorridas instituições de ensino superior do país.

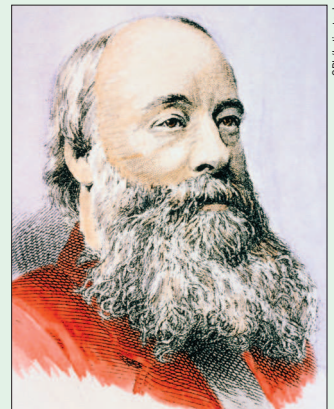
**Os autores**

# Sumário

# Parte I

Photodisc/Getty Images

# Termologia

1. Temperatura
2. O calor e sua propagação
3. Calor sensível e calor latente
4. Gases perfeitos
5. Termodinâmica
6. Dilatação térmica dos sólidos e dos líquidos

SPL/Latinstock

James Prescott Joule
(1818-1889)

# Tópico 1

# Temperatura

## Bloco 1

### 1. Introdução

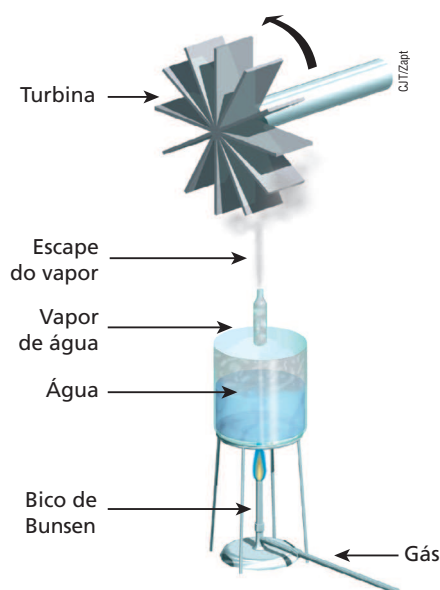
**Termologia** é a parte da Física que estuda os fenômenos relativos ao aquecimento, resfriamento ou às mudanças de estado físico em corpos que recebem ou cedem um determinado tipo de energia.

Estudaremos, em Termologia, as formas pelas quais essa energia, que denominaremos **energia térmica**, muda de local, propagando-se através de um meio. Estudaremos, ainda, o comportamento de um modelo teórico de gás, denominado **gás perfeito**, e, dentre outras coisas, as relações existentes entre a energia térmica e a energia mecânica.

Alamy/Other Images

A preparação de um bolo envolve **energia** em forma de **calor**. O bolo precisa receber **energia térmica** para seu cozimento.

No estudo de todos os fenômenos relativos à Termologia, sempre aparece um parâmetro muito importante, denominado **temperatura**, capaz de definir o estado térmico do sistema físico estudado. Assim, iniciaremos o nosso estudo de Termologia conceituando a temperatura e estabelecendo processos e regras usados para sua medição.

Na figura abaixo observamos vários fenômenos que serão estudados em Termologia.

A fonte térmica aquece a água; esta vaporiza-se (muda de estado físico), e o vapor formado expande-se, saindo pela abertura existente no recipiente. O vapor atinge as pás da turbina e realiza um trabalho, isto é, coloca a turbina em rotação.

### 2. A temperatura

**Temperatura** é a grandeza que caracteriza o estado térmico de um sistema.

É comum as pessoas avaliarem o estado térmico de um corpo pela sensação de quente ou frio que sentem ao tocá-lo. Até que ponto, entretanto, podemos confiar nessa sensação? Muitas vezes pessoas diferentes em um mesmo ambiente experimentam sensações térmicas diferentes! Note que isso ocorre porque as sensações de quente e frio são individuais e subjetivas, dependendo do indivíduo e das condições a que ele está sujeito.

Agora você deve estar se perguntando: como podemos avaliar fisicamente esse "quente" e esse "frio"?

Imaginemos um balão de borracha, fechado, com ar em seu interior. O ar, como sabemos, é constituído de pequenas partículas que se movimentam em todas as direções. Agora, vamos aquecer o ar. O que acontece? O balão estufa, aumentando de tamanho. O que provocou isso? Foi o ar em seu interior, que, ao ser aquecido, empurrou mais fortemente as paredes elásticas, aumentando o volume do balão.

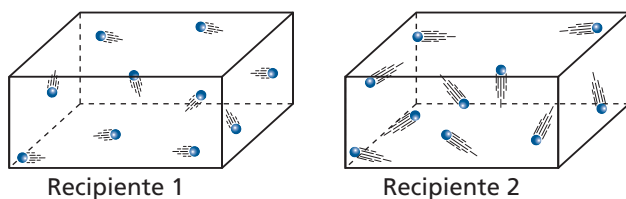
Isso ocorre porque as partículas de ar movimentam-se, possuindo certa velocidade, certa energia cinética. Quando aumentamos a temperatura dessas partículas por aquecimento, essa energia cinética aumenta, intensificando os choques dessas partículas com as paredes internas do balão, o que produz aumento de volume.

Assim, podemos associar a temperatura do ar à energia cinética de suas partículas, isto é, ao estado de movimento dessas partículas.

Entretanto, o que acontece nos sólidos e nos líquidos, cujas partículas são impedidas de movimentar-se livremente?

Nesses casos, as partículas apenas agitam-se em regiões limitadas, e esse estado de agitação aumenta com o aquecimento, com o aumento de temperatura.

A conclusão a que podemos chegar é que, de alguma forma, a temperatura está relacionada com o estado de movimento ou de agitação das partículas de um corpo. Assim, como uma ideia inicial, podemos dizer que a temperatura é um valor numérico associado a um determinado estado de agitação ou de movimentação das partículas de um corpo, umas em relação às outras.

Recipiente 1

Recipiente 2

Considerando que os dois recipientes contêm o mesmo tipo de gás, no recipiente 2 o estado de agitação das partículas que compõem o gás é maior, pois estas se movimentam com maior rapidez. Assim, podemos concluir que o gás do recipiente 2 encontra-se em uma temperatura mais elevada que o gás do recipiente 1.

## 3. Equilíbrio térmico

Suponha que um assado recém-saído de um forno e um refrigerante de uma geladeira sejam colocados sobre uma mesa. Após alguns minutos, observamos que ambos atingem a temperatura ambiente. Assim, o assado "esfriou" e o refrigerante "esquentou".

Da observação de fenômenos dessa natureza, podemos concluir que os corpos colocados em um mesmo meio, sempre que possível, tendem espontaneamente para um mesmo estado térmico. Os corpos mais "quentes" fornecem parte da energia de agitação de suas partículas para os corpos mais "frios". Assim, os mais "quentes" esfriam e os mais "frios" esquentam, até que seus estados térmicos (suas temperaturas) fiquem iguais. Dizemos, então, que esses corpos atingiram o **equilíbrio térmico**.

Dois ou mais sistemas físicos estão em **equilíbrio térmico** entre si quando suas temperaturas são iguais.

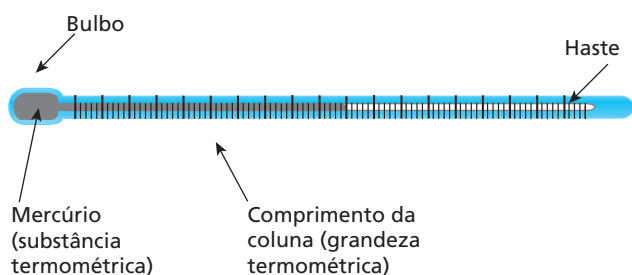
**Exemplo:**

As partículas da água "quente" fornecem parte de sua energia de agitação para as partículas da água "fria" e esfriam. Ao receber essa energia, as partículas da água "fria" esquentam. A troca de energia só é interrompida quando o equilíbrio térmico é atingido.

## 4. Medição de temperatura

Considerando o que vimos anteriormente, você deve ter percebido que não temos condições de medir diretamente a energia de agitação das moléculas de um corpo. Como podemos, então, avaliar sua temperatura?

É simples: isso deve ser feito por um processo indireto, usando-se um segundo corpo que sofra alterações mensuráveis em suas propriedades físicas quando do processo de busca do equilíbrio térmico com o primeiro. A esse corpo chamamos de **termômetro**.

O mais conhecido é o **termômetro de mercúrio**.

Na extremidade esquerda desse termômetro, há um reservatório (bulbo) onde fica armazenada a **substância termométrica**. No caso do termômetro ilustrado acima, essa substância é o mercúrio, mas poderia ser outra, como o álcool, por exemplo. No interior da haste, há um tubo muito estreito (capilar) através do qual a substância termométrica se desloca para a direita ou para a esquerda conforme a temperatura que está sendo medida. O valor da temperatura é fornecido pela medida do comprimento da coluna, que é chamada de **grandeza termométrica.**

É importante observar que:

**Substância termométrica** é aquela em que pelo menos uma de suas propriedades físicas (comprimento, volume, pressão, dentre outras) varia de forma mensurável com a temperatura.

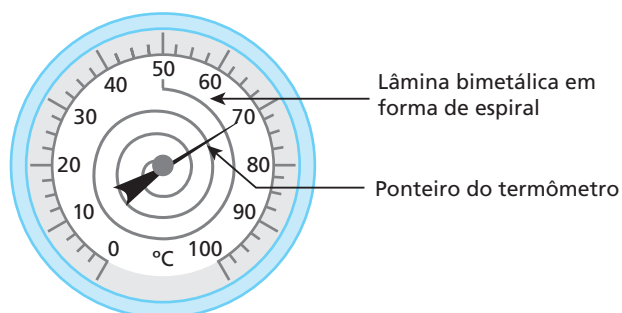
**Grandeza termométrica** é a propriedade física da substância termométrica que varia de forma mensurável com a temperatura e é usada para medi-la.

Vamos observar outros modelos de termômetros.

Burger/Phanie/Glow Images

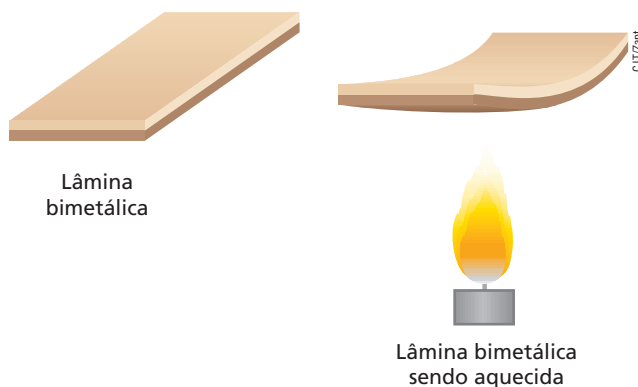
Na foto podemos observar um termômetro bastante prático utilizado para medir a temperatura de bebês. Ele funciona recebendo radiações na faixa do infravermelho emitido pela pele da testa das crianças. Não há necessidade de encostar o aparelho, ele deve estar a alguns centímetros da pele. A temperatura é registrada em poucos segundos com razoável precisão.

Sally Ullman/FoodPix/Getty Images

No interior de fornos são utilizados termômetros que funcionam através da dilatação de uma lâmina bimetálica. Na foto acima, um desses termômetros avalia a temperatura de uma ave assada.

Esse tipo de termômetro pode ser usado também no interior de câmaras frigoríficas e de fornos de padaria.

Mas o que são lâminas bimetálicas? São lâminas compostas de duas camadas, cada uma de um metal diferente.

Observe a ilustração a seguir.

CJT/Zapt

Quando a lâmina bimetálica é aquecida, um dos metais dilata mais do que o outro, seu comprimento fica maior. No entanto, como as chapas estão "coladas", a dilatação provoca o encurvamento da lâmina, ficando o metal que dilata mais na face externa (face convexa).

Imagebroker/Diomedia

Um outro modelo de termômetro é o óptico (também chamado de **pirômetro óptico**). Ele pode medir altas temperaturas utilizando a intensidade das radiações emitidas por um objeto muito aquecido. Esse tipo de termômetro é usado em fundições e siderúrgicas.

Thales Trigo

Termômetro a gás.

Para medir baixas temperaturas, podemos utilizar um termômetro a gás, a volume constante. No resfriamento, associamos o valor da pressão do gás a um valor de temperatura. Esse termômetro é muito usado em laboratórios de pesquisa.

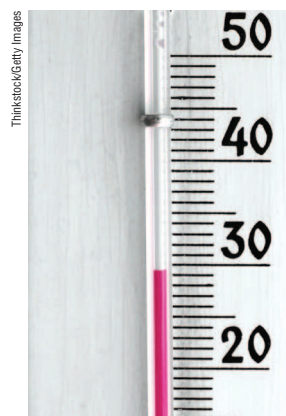
## 5. Equação termométrica

Em um termômetro, a grandeza termométrica varia praticamente de modo uniforme com a temperatura. Podemos, com boa aproximação, afirmar que a relação matemática de correspondência entre a grandeza termométrica (**G**) e a temperatura (**θ**) é uma função do 1º grau.

A essa relação damos o nome de **equação termométrica**:

$$G = a\theta + b$$

em que **a** e **b** são constantes características do termômetro, com $a \neq 0$.

No termômetro de álcool, por exemplo, a grandeza termométrica (**G**) é a altura da coluna. Substituindo o valor dessa altura na equação termométrica, obtemos a temperatura correspondente.

Thinkstock/Getty Images

Termômetro de álcool. A substância termométrica (álcool) é tingida de vermelho para melhor visualização.

## 6. Escalas termométricas

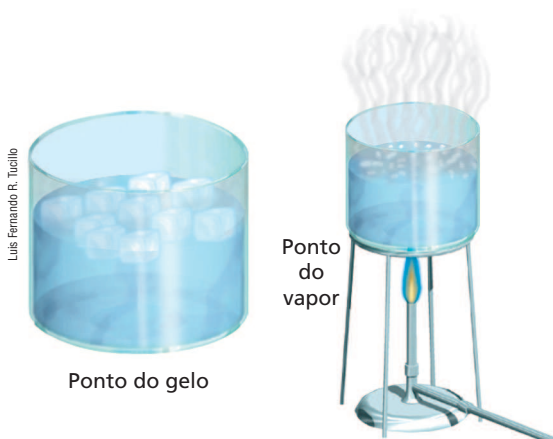
Escala termométrica é um conjunto de valores numéricos em que cada valor está associado a uma determinada temperatura.

Se, por exemplo, a temperatura de um sistema **A** é representada pelo valor 50 e a de um sistema **B**, pelo valor 20, em uma mesma escala termométrica, dizemos que a temperatura de **A** é maior que a de **B**. Isso indica que as partículas do sistema **A** estão em um nível energético mais elevado que as do sistema **B**.

Como uma escala termométrica é constituída por um conjunto de valores arbitrários, um mesmo estado térmico pode ser representado em escalas termométricas diversas, por valores numéricos diferentes.

Os valores numéricos de uma escala termométrica são obtidos a partir de dois valores atribuídos previamente a dois estados térmicos de referência, bem definidos, denominados **pontos fixos**.

## 7. Pontos fixos fundamentais

Pela facilidade de obtenção prática, são adotados usualmente como pontos fixos os estados térmicos correspondentes ao gelo fundente e à água em ebulição, ambos sob pressão normal. Esses estados térmicos costumam ser denominados **ponto do gelo** e **ponto do vapor**, respectivamente, e constituem os **pontos fixos fundamentais**.

**1º ponto fixo: ponto do gelo** – temperatura na qual o gelo e a água permanecem em equilíbrio térmico quando sob pressão normal.

**2º ponto fixo: ponto do vapor** – temperatura na qual a água entra em ebulição sob pressão normal.

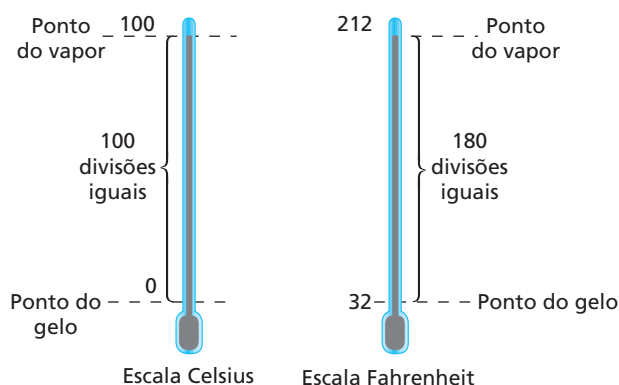
**Nota:**

- Em 1939, o químico canadense William Francis Giauque (1895-1982) passou a defender a proposta de Lorde Kelvin, que pretendia que as escalas termométricas usassem apenas um ponto fixo, o **ponto tríplice da água** (temperatura em que ela se apresenta em equilíbrio térmico nos três estados físicos: sólido, líquido e vapor). Essa tese foi aprovada em 1954 pelos representantes da comunidade científica e passou a ser chamada de **solução Giauque**. Por ser mais prático, no entanto, continuamos usando o ponto do gelo e o ponto do vapor como referências nas escalas termométricas.

## 8. Escalas Celsius e Fahrenheit

Anders Celsius (1701-1744)

A escala termométrica mais utilizada no mundo, inclusive no Brasil, foi criada pelo astrônomo e físico sueco Anders Celsius (1701-1744) e oficializada em 1742 por uma publicação da Real Academia Sueca de Ciências. O interessante é que, originalmente, Celsius utilizou o valor **0** para o ponto de ebulição da água e o valor **100** para seu ponto de congelamento. Foi um biólogo sueco, chamado Lineu [Carl von Linné (1707-1778)], quem inverteu essa escala, tornando-a tal como a conhecemos hoje.

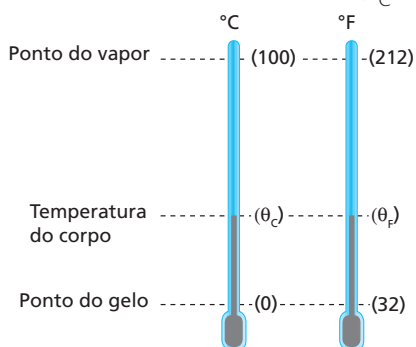
Em 1708, o físico alemão Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736), utilizando as ideias do astrônomo dinamarquês Ole Römer (1644-1710), estabeleceu os pontos de referência de uma nova escala. Para o ponto **0**, ele utilizou a temperatura de uma mistura de gelo e cloreto de amônia e, para o ponto **100**, a temperatura do corpo humano. Somente mais tarde, quando passaram a utilizar a água como referência, observou-se que a sua escala assinalava **32** para o ponto do gelo e **212** para o ponto do vapor. A escala Fahrenheit de temperaturas é utilizada principalmente nos países de língua inglesa.

Na **escala Celsius**, temos 100 divisões iguais entre os pontos fixos, cada divisão correspondendo à unidade da escala, que recebe o nome de **grau Celsius**, simbolizado por **°C**.

Na **escala Fahrenheit**, temos 180 divisões iguais entre os pontos fixos, sendo a unidade da escala denominada **grau Fahrenheit**, simbolizado por **°F**.

## 9. Conversão entre as escalas Celsius e Fahrenheit

Sempre é possível estabelecer uma relação entre duas escalas termométricas quaisquer. Podemos, por exemplo, obter uma equação que relacione os valores numéricos dados pelas escalas Celsius e Fahrenheit. Isso significa que, conhecendo a temperatura em uma determinada escala, podemos também, utilizando essa equação, conhecê-la em outra escala qualquer.

A que valor na escala Fahrenheit corresponde, por exemplo, 60 °C?

Para fazer a correspondência, vamos utilizar dois termômetros idênticos de mercúrio, sendo um graduado na escala Celsius e outro, na Fahrenheit. Ao colocá-los em contato com um mesmo corpo, observamos que as alturas de mercúrio são iguais, mas, por se tratarem de escalas distintas, os valores numéricos assinalados são diferentes ($\theta_C$ e $\theta_F$).

Perceba que os intervalos de temperaturas correspondentes nos dois termômetros são proporcionais. Assim, vale a relação:

$$\frac{\theta_C - 0}{\theta_F - 32} = \frac{100 - 0}{212 - 32}$$

$$\frac{\theta_C}{\theta_F - 32} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

Essa **equação de conversão** pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\theta_C}{5} = \frac{\theta_F - 32}{9}$$

## Leitura

### Procedimento com bolsa de gelo reduz risco de sequelas em vítimas de paradas cardíacas

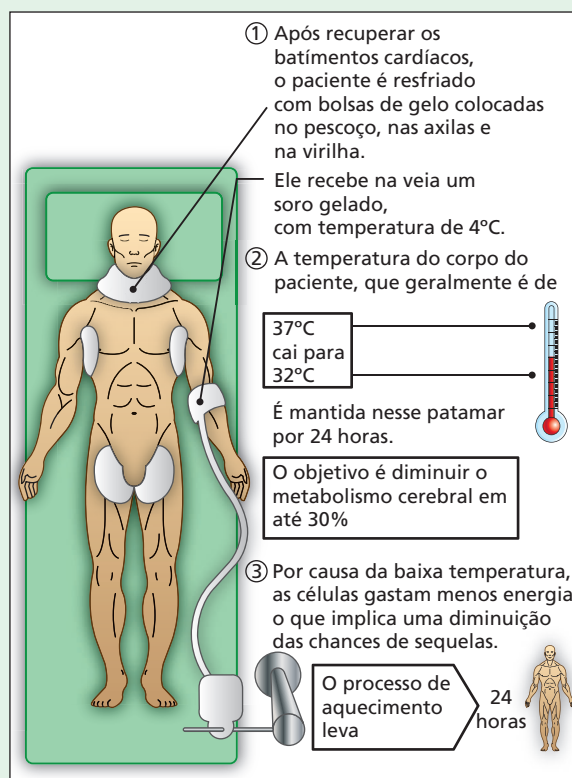
*Uma técnica que permite o resfriamento do corpo em até cinco graus é utilizada em hospitais de São Paulo para diminuir o risco de sequelas em vítimas de paradas cardíacas.*

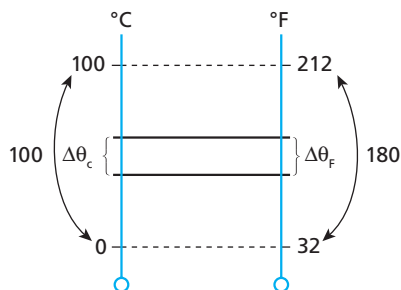
*A parada cardíaca interrompe repentinamente o bombardeamento de sangue, líquido que leva oxigênio para o resto do organismo. O alto número de mortes está relacionado à ausência de oxigênio no cérebro e ao gasto excessivo de energia por parte das células. Os neurônios morrem quando ficam sem oxigênio por mais de três minutos, o que pode provocar danos irreversíveis a atividades cerebrais e motoras do paciente.*

*Esses sintomas podem ser evitados abaixando a temperatura do corpo de 37 para 32 graus, o que implica uma diminuição do metabolismo do cérebro em 30%.*

O texto acima, retirado de um jornal diário de grande circulação, mostra uma aplicação tecnológica onde o conhecimento sobre temperatura é primordial. O fato de estudarmos o assunto *temperatura* nos leva a entender de forma mais clara os procedimentos médicos neste caso de um paciente de parada cardíaca.

A escala Celsius de temperatura também aparece com muita frequência nos jornais, revistas e noticiários de rádio e televisão. Antes de sair de casa, procuramos saber como será o tempo durante o dia. Devemos levar um agasalho ou não?

Se estivermos passeando em um país que utilize a escala Fahrenheit, como os Estados Unidos, devemos saber detalhes dessa escala e a sua relação com a nossa escala Celsius. Observe que a temperatura é um dos principais indicadores do que irá ocorrer com o tempo nas próximas horas, e o nosso conhecimento é importante para a compreensão desses fatos.

## 10. Variação de temperatura

Para converter uma **variação de temperatura** em graus Celsius para graus Fahrenheit, ou vice-versa, observe o esquema abaixo, em que comparamos essas duas escalas.

Note que a variação em uma das escalas é proporcional à variação correspondente na outra.

Assim, podemos afirmar que:

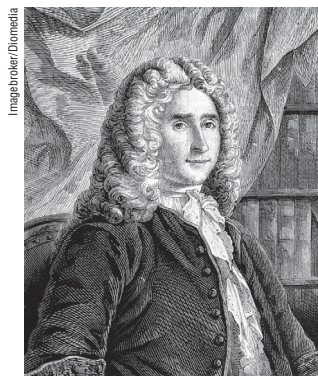
$$\frac{\Delta\theta_C}{100} = \frac{\Delta\theta_F}{180}$$

### Que calor!!!

Ricardo Helou Doca

Em alguns locais da Terra, são registradas grandes amplitudes térmicas (diferenças de temperatura) entre o verão (muito quente) e o inverno (muito frio). É o que ocorre, por exemplo, na costa oeste dos Estados Unidos, particularmente no estado de Nevada, na região desértica conhecida como Vale da Morte. Devido ao clima muito árido e à escassez de água, verificam-se grandes variações de temperatura, mesmo do dia para a noite. A torre que aparece na fotografia ao lado é um grande termômetro à beira da estrada, que registrava, no momento da fotografia (por volta do meio-dia), 113 °F, que equivalem a 45 °C.

### Escala Réaumur

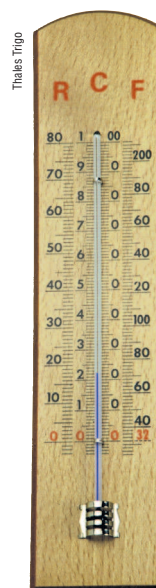
Imagebroker/Diomedia

Retrato de René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757).

Em 1730, o físico francês René-Antoine Ferchault de **Réaumur** observou que o álcool, ao ser aquecido do ponto do gelo até o ponto do vapor, apresentava uma expansão de 80 partes por mil. Assim, estabeleceu em sua escala a marca **0** para a fusão do gelo e **80** para a ebulição da água, sob pressão normal.

A conversão entre a escala Réaumur e a escala Celsius é feita pela relação:

$$\frac{\theta_C}{5} = \frac{\theta_R}{4}$$

Em um mesmo termômetro, podem-se utilizar escalas diferentes. No termômetro abaixo, podemos observar uma mesma temperatura nas escalas Celsius, Fahrenheit e Réaumur.

Thales Trigo

## Exercícios

nível 1

**1.** Um jornalista, em visita aos Estados Unidos, passou pelo deserto de Mojave, onde são realizados os pousos dos ônibus espaciais da Nasa. Ao parar em um posto de gasolina, à beira da estrada, ele observou um grande painel eletrônico que indicava a temperatura local na escala Fahrenheit. Ao fazer a conversão para a escala Celsius, ele encontrou o valor 45 °C. Que valor ele havia observado no painel?

**2.** Uma agência de turismo estava desenvolvendo uma página na Internet que, além dos pontos turísticos mais importantes, continha também informações relativas ao clima da cidade de Belém (Pará). Na versão em inglês dessa página, a temperatura média de Belém (30 °C) deveria aparecer na escala Fahrenheit. Que valor o turista iria encontrar, para essa temperatura, na página em inglês?

**3.** Um turista brasileiro, ao descer no aeroporto de Chicago (EUA), observou um termômetro marcando a temperatura local (68 °F). Fazendo algumas contas, ele verificou que essa temperatura era igual à de São Paulo, quando embarcara. Qual era a temperatura de São Paulo, em graus Celsius, no momento do embarque do turista?

**4. E.R.** Dois termômetros, um graduado na escala Celsius e outro, na escala Fahrenheit, são mergulhados em um mesmo líquido. A leitura em Fahrenheit supera em 100 unidades a leitura em Celsius. Qual era a temperatura desse líquido?

**Resolução:**

Do enunciado do problema, podemos escrever:

$$\theta_F = \theta_C + 100 \qquad \text{(I)}$$

A relação entre as escalas citadas é dada por:

$$\frac{\theta_C}{5} = \frac{\theta_F - 32}{9} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$\frac{\theta_C}{5} = \frac{(\theta_C + 100) - 32}{9}$$

$$9\theta_C = 5\theta_C + 340$$

$$4\theta_C = 340$$

$$\boxed{\theta_C = 85\ °C} \text{ ou } \boxed{\theta_F = 185\ °F}$$

**5.** Ao chegar ao aeroporto de Miami (EUA), um turista brasileiro observou em um painel eletrônico que a temperatura local medida na escala Fahrenheit ultrapassava o valor medido na escala Celsius em 48 unidades. Qual era a temperatura registrada no painel, em graus Celsius?

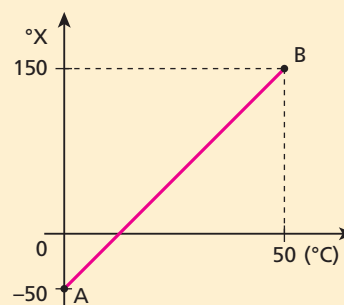
**6.** Em um laboratório, dois termômetros, um graduado em Celsius e outro em Fahrenheit, são colocados no interior de um *freezer*. Após algum tempo, verificou-se que os valores lidos nos dois termômetros eram iguais. Qual era a temperatura medida, em graus Celsius?

**7.** Em uma escala de temperaturas **A**, o ponto do gelo equivale a –10 °A e o do vapor, a + 40 °A. Se uma temperatura for indicada em um termômetro em Celsius pelo valor 22 °C, que valor será indicado por outro termômetro graduado na escala **A**?

**8.** Um professor de Física inventou uma escala termométrica que chamou de escala **X**. Comparando-a com a escala Celsius, ele observou que –4 °X correspondiam a 20 °C, e 44 °X equivaliam a 80 °C. Que valores essa escala **X** assinalaria para os pontos fixos fundamentais?

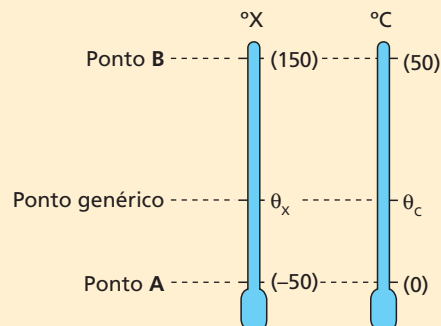
**9.** Lendo um jornal brasileiro, um estudante encontrou a seguinte notícia: "Devido ao fenômeno *El Niño*, o verão no Brasil foi mais quente do que costuma ser, ocorrendo em alguns locais variações de até 20 °C em um mesmo dia". Se essa notícia fosse vertida para o inglês, a variação de temperatura deveria ser dada na escala Fahrenheit. Que valor iria substituir a variação de 20 °C?

**10.** Um turista brasileiro sente-se mal durante uma viagem e é levado inconsciente a um hospital. Após recuperar os sentidos, sem saber em que local estava, é informado de que a temperatura de seu corpo atingira 104 graus, mas que já "caíra" de 5,4 graus. Passado o susto, percebeu que a escala utilizada era a Fahrenheit. De quanto seria a queda da temperatura desse turista se fosse utilizado um termômetro graduado em Celsius?

**11. E.R.** Uma escala termométrica **X** foi comparada com a escala Celsius, obtendo-se o gráfico dado a seguir, que mostra a correspondência entre os valores das temperaturas nessas duas escalas.

Determine:

a) a equação de conversão entre as escalas **X** e Celsius;
b) a indicação da escala **X**, quando tivermos 80 °C;
c) a indicação da escala **X** para os estados térmicos correspondentes aos pontos fixos fundamentais.

**Resolução:**

a) Fazendo o esquema e relacionando as escalas **X** e Celsius, temos:

Do esquema, concluímos:

$$\frac{\theta_X - (-50)}{150 - (-50)} = \frac{\theta_C - 0}{50 - 0}$$

$$\frac{\theta_X + 50}{200} = \frac{\theta_C}{50} \Rightarrow \frac{\theta_X + 50}{4} = \theta_C$$

$$\theta_X + 50 = 4\theta_C \Rightarrow \boxed{\theta_X = 4\theta_C - 50}$$

b) Substituindo-se 80 °C na equação de conversão encontrada no item **a**, obtemos o $\theta_X$ correspondente:

$$\theta_X = 4(80) - 50 \Rightarrow \theta_X = 320 - 50$$

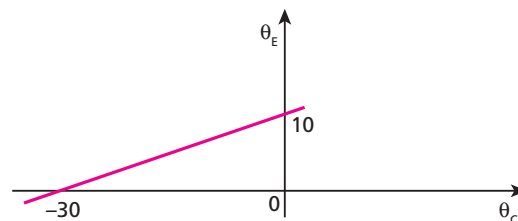
$$\boxed{\theta_X = 270\ °X}$$

c) Para os pontos fixos fundamentais, temos:
1º ponto fixo ⟶ ponto do gelo fundente, sob pressão normal ($\theta_C = 0$ °C)
Do próprio gráfico fornecido, concluímos que:

$$\boxed{\theta_X = -50\ °X}$$

2º ponto fixo ⟶ ponto do vapor de água em ebulição, sob pressão normal ($\theta_C = 100$ °C)
Utilizando-se a relação de transformação obtida no item **a** e impondo $\theta_C = 100$ °C, calculemos $\theta_X$ correspondente:

$$\theta_X = 4(100) - 50 \Rightarrow \boxed{\theta_X = 350\ °X}$$

**12.** Um estudante construiu uma escala de temperatura **E** cuja relação com a escala Celsius é expressa no gráfico representado a seguir:

Qual é a temperatura cujas leituras coincidem numericamente nessas duas escalas?

## Exercícios nível 2

**13.** O texto a seguir foi retirado da parte teórica deste tópico.

**Alguns estados térmicos interessantes**

*A maior temperatura já registrada na superfície da Terra foi de 58 °C, em 13 de setembro de 1922 na cidade de El Azizia, próxima de Trípoli, na Líbia (norte da África), e a menor foi de –89,2 °C, em 21 de julho de 1983, na estação russa de Vostok, na Antártida. A menor temperatura obtida em laboratório é da ordem de $10^{-7}$ K.*

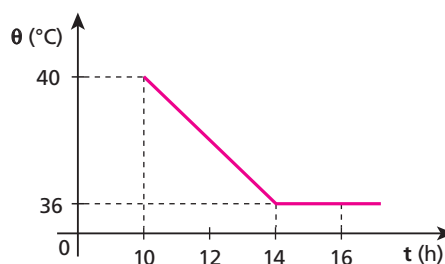
Se o texto acima fosse vertido para o inglês, as temperaturas seriam expressas na escala Fahrenheit. Que valores seriam encontrados para a maior e a menor temperaturas registradas na superfície da Terra? Dê as respostas com apenas uma casa decimal.

**14.** (Unaerp-SP) Durante um passeio em outro país, um médico, percebendo que seu filho está "quente", utiliza um termômetro com escala Fahrenheit para medir sua temperatura. O termômetro, após o equilíbrio térmico, registra 98,6 °F. O médico, então:

a) deve correr urgente para o hospital mais próximo, o garoto está mal, 49,3 °C.
b) não se preocupa, ele está com 37 °C, manda o garoto brincar e mais tarde mede novamente sua temperatura.
c) fica preocupado, ele está com 40 °C, então lhe dá para ingerir uns quatro comprimidos de antitérmico.
d) faz os cálculos e descobre que o garoto está com 32,8 °C.
e) fica preocupado, ele está com 39 °C, dá um antitérmico ao garoto e o coloca na cama sob cobertores.

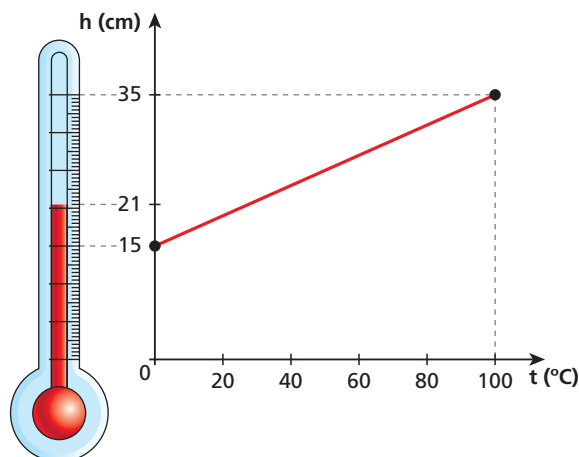
**15.** Um determinado estado térmico foi avaliado usando-se dois termômetros, um graduado em Celsius e outro, em Fahrenheit. A leitura Fahrenheit excede em 23 unidades o dobro da leitura Celsius. Essa temperatura corresponde a que valor na escala Celsius?

**16.** Uma jovem estudante, folheando um antigo livro de Física de seu avô, encontrou a temperatura de ebulição do álcool expressa na escala Réaumur (62,4 °R). Fazendo a conversão para a escala Celsius, ela encontrou que valor?

**17.** Um paciente foi internado em um hospital e apresentou o seguinte quadro de temperatura:

Que temperatura esse paciente apresentou às 12 h 30 min, expressa na escala Réaumur?

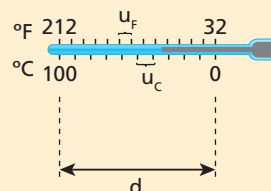
**18.** Em um termômetro de mercúrio, a altura da coluna assume os valores 1,0 cm e 21 cm quando o termômetro é submetido aos estados correspondentes aos pontos do gelo fundente e do vapor de água em ebulição, respectivamente, sob pressão normal. Determine:

a) a equação termométrica desse termômetro em relação à escala Celsius.
b) a temperatura registrada pelo termômetro quando a altura da coluna assume o valor 10 cm.
c) a altura da coluna quando o ambiente onde se encontra o termômetro está a 27 °C.

**19.** Nos termômetros utilizados no nosso dia a dia, a substância termométrica é um líquido (geralmente mercúrio ou álcool) e a propriedade termométrica, a altura **h** da coluna desse líquido. Na aferição, esse termômetro é colocado em equilíbrio com o gelo fundente e, depois, com a água em ebulição em condições de pressão normal. Ele foi colocado também em contato com um corpo **X**, quando, após o equilíbrio térmico, a altura **h** atingiu a marca de 21 cm.
Na figura dada a seguir, encontramos a relação entre as colunas **h** do líquido e as temperaturas Celsius correspondentes.

Qual a temperatura, em graus Celsius, encontrada para esse corpo?

**20.** Um termômetro foi graduado, em graus Celsius, incorretamente. Ele assinala 1 °C para o gelo em fusão e 97 °C para a água em ebulição, sob pressão normal. Qual a única temperatura que esse termômetro assinala corretamente, em graus Celsius?

**21. E.R.** Um fabricante de termômetros lançou no mercado um termômetro de mercúrio graduado nas escalas Celsius e Fahrenheit. Na parte referente à escala Celsius, a distância entre duas marcas consecutivas era de 1,08 mm. Qual a distância, na escala Fahrenheit, entre duas marcas consecutivas?

**Resolução:**
Chamemos de $u_C$ e $u_F$ as respectivas distâncias entre duas marcas consecutivas nas escalas Celsius e Fahrenheit:

Como a distância **d**, indicada na figura, é a mesma nas duas escalas, podemos escrever:

$$d = 100u_C = 180u_F$$

Do enunciado, sabemos que: $u_C = 1{,}08$ mm

Substituindo esse valor na expressão acima, calculemos $u_F$:

$$100 \cdot 1{,}08 = 180u_F \Rightarrow u_F = \frac{108}{180} \Rightarrow \boxed{u_F = 0{,}60 \text{ mm}}$$

**22.** Em um laboratório, um professor de Física encontrou um antigo termômetro que trazia graduações nas escalas Celsius e Réaumur. Com uma régua, observou que a distância entre duas marcas consecutivas na escala Celsius era de 1,0 mm. Que valor ele encontrou na escala Réaumur?

# Bloco 2

## 11. O zero absoluto

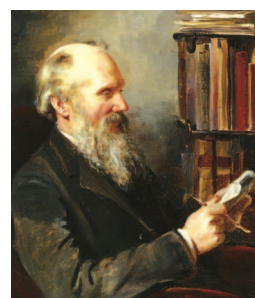
Imagine um sistema físico qualquer. Quando o aquecemos, sua temperatura se eleva, aumentando o estado de agitação de suas partículas. Se o esfriamos, sua temperatura diminui porque o estado de agitação das partículas também diminui. Se continuarmos a esfriar esse sistema, o estado de agitação das partículas diminuirá mais e mais, tendendo a um mínimo de temperatura, denominado **zero absoluto**.

**Zero absoluto** é o limite inferior de temperatura de um sistema. É a temperatura correspondente ao menor estado de agitação das partículas, isto é, um estado de agitação praticamente nulo.

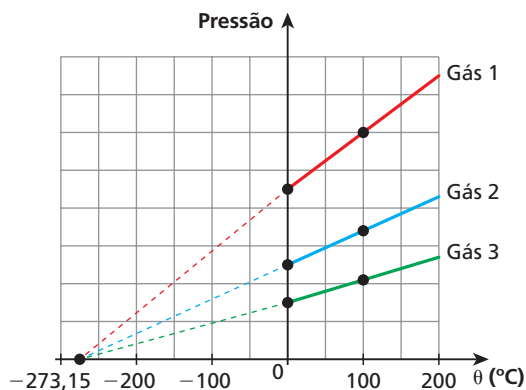
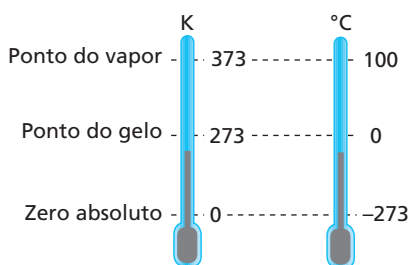
No zero absoluto, ainda existe nas partículas do sistema uma quantidade finita, não nula, de energia cinética. Essa energia é denominada **energia do ponto zero**.

## 12. A escala absoluta

O físico britânico William Thomson (1824-1907), mais conhecido como **Lorde Kelvin**, foi quem verificou experimentalmente a variação da pressão de um gás a volume constante. Por meio de uma extrapolação, ele concluiu que a menor temperatura que aquele gás poderia atingir coincidia com a anulação da pressão.

National Portrait Gallery, London/Diomedia

Retrato de Lorde Kelvin.

Até chegar a essa conclusão ele realizou experiências com diferentes amostras de gases, a volume constante. As variações de pressão foram plotadas (marcadas) em um gráfico, em função da temperatura Celsius. O prolongamento do gráfico levou-o ao valor –273,15 °C, que foi denominado "**zero absoluto**".

Para facilitar os cálculos, aproximamos esse valor para –273 °C.

A escala Kelvin, também denominada **escala absoluta**, tem sua origem no zero absoluto e utiliza o grau Celsius como unidade de variação. O símbolo da unidade da escala Kelvin é **K**.

Do exposto, pode-se concluir que a equação de conversão entre as escalas Celsius e Kelvin é dada por:

$$T(K) = \theta(°C) + 273$$

**Nota:**

- A partir de 1967, convencionou-se não usar "grau" para essa escala. Assim, 20 K, por exemplo, lê-se 20 kelvins e não 20 graus Kelvin.

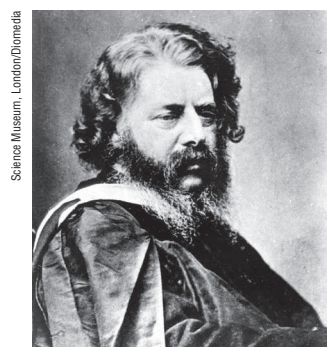
## Alguns estados térmicos interessantes

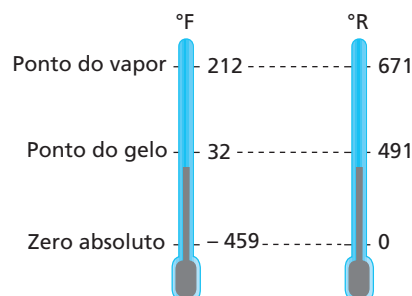
A maior temperatura já registrada na superfície da Terra foi de 58 °C, em 13 de setembro de 1922 na cidade de El Azizia, próxima de Trípoli, na Líbia (norte da África), e a menor foi de –89,2 °C, em 21 de julho de 1983, na estação russa de Vostok, na Antártida. A menor temperatura obtida em laboratório é da ordem de $10^{-7}$ K.

Na tabela a seguir, você poderá observar alguns dos principais estados térmicos, expressos nas escalas convencionais: Celsius, Fahrenheit e Kelvin. Note que os valores apresentados estão em ordem crescente de temperatura.

| | Celsius | Fahrenheit | Kelvin |
|---|---|---|---|
| Zero absoluto | –273,15 | –459,67 | 0 |
| Ar liquefeito | –39 | –38,2 | 234 |
| Menor temperatura na superfície da Terra | –89 | –128 | 184 |
| Ponto de solidificação do mercúrio | –39 | –38,2 | 234 |
| Ponto do gelo | 0 | 32 | 273,15 |
| Maior temperatura na superfície da Terra | 58 | 136 | 331 |
| Ponto do vapor | 100 | 212 | 373,15 |
| Ponto de combustão do papel | 184 | 363 | 457 |
| Ponto de combustão da madeira | 250 | 482 | 523 |
| Ponto de fusão do chumbo | 327 | 620 | 600 |
| Temperatura na chama do gás natural | 660 | 1 220 | 933 |
| Ponto de fusão do ferro | 1 535 | 2 795 | 1 808 |
| Temperatura na superfície do Sol | 5 530 | 10 000 | 5 800 |

**Fonte:** *The visual dictionary of Physics*. A Dorling Kindersley Book. Canadá, 1995.

## Escala Rankine

William John Macquorn Rankine (1820-1872)

Criada pelo físico escocês William John Macquorn **Rankine**, essa escala tem o valor zero atribuído ao zero absoluto e utiliza o grau Fahrenheit como unidade de variação.

## Leitura

### Criogenia

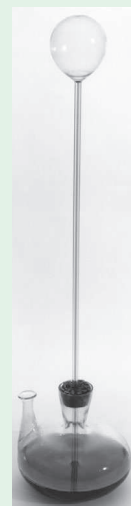
A Criogenia é o estudo das baixas temperaturas. Ela pesquisa as técnicas de obtenção das temperaturas muito baixas e o comportamento dos elementos e materiais nessas condições.

A Criogenia surgiu na virada do século XX quando se conseguiu a liquefação do ar atmosférico e a separação de seus componentes por destilação fracionada. A indústria alimentícia passou a usar dois desses gases criogênicos: o dióxido de carbono e o nitrogênio. O dióxido de carbono (nome comercial: gelo-seco) sublima a –78 °C, sendo usado no estado sólido na conservação de alimentos, como nos carrinhos que vendem sorvetes. O nitrogênio tem como ponto de liquefação a temperatura de –196 °C, sendo usado nas situações que requerem temperaturas mais baixas. O nitrogênio líquido é também utilizado na Medicina para conservação de embriões, espermas e óvulos.

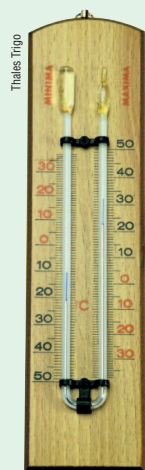
Alamy/Other Images

Na fotografia, observamos a Criogenia sendo empregada para a conservação de embriões em nitrogênio líquido.

### Termômetros

Todo dispositivo utilizado para medir temperaturas é chamado de termômetro. O primeiro termômetro de que se tem notícia foi construído por Galileu Galilei em 1597 (chamado de termoscópio de Galileu) e era formado por um longo tubo de vidro, aberto na extremidade inferior e com um reservatório na parte superior (um bulbo). Esse tubo era parcialmente preenchido com água e emborcado em uma vasilha, que também continha água. O ar que preenchia o bulbo e parte da haste, ao sofrer variação de pressão, se contraía ou se expandia, provocando alteração na altura da coluna de água. Dessa forma, media-se a temperatura. Esse termômetro, porém, era muito impreciso. Somente cinquenta anos após sua invenção, um amigo de Galileu, o Duque de Toscana, utilizou álcool em vez de água e lacrou o sistema, fazendo com que seu funcionamento não dependesse da pressão atmosférica.

Science Museum, London/Diomedia

Reprodução do termoscópio de Galileu.

Thales Trigo

### Termômetro de máxima e mínima

O termômetro de máxima e mínima foi idealizado pelo cientista inglês James Six e é utilizado para medir a **máxima** e a **mínima** temperatura em um determinado intervalo de tempo. O líquido termométrico utilizado costuma ser o álcool (o mercúrio existente no interior do tubo é usado apenas para empurrar os flutuadores de ferro). Na coluna da direita (coluna de temperaturas máximas) existe uma bolha de ar, o que facilita a dilatação do álcool da coluna da esquerda. Essa dilatação do álcool, ou contração, empurra o mercúrio, que move os flutuadores de ferro. Devido ao atrito, os flutuadores não acompanham o álcool, permanecendo nos locais que indicam as temperaturas máxima e mínima. Para recolocar os flutuadores nos níveis do mercúrio, usamos o ímã, que você observa ao lado do termômetro.

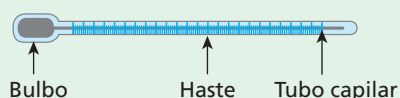
## Termômetro de mercúrio

Esse termômetro tem três partes: bulbo, haste e tubo capilar.

*Bulbo*: o reservatório de mercúrio;

*Haste*: a parte alongada, na qual é feita a graduação da escala termométrica;

*Tubo capilar*: o canal que se encontra dentro da haste e pelo qual o mercúrio se dilata ou se contrai.

Apesar de não ser o mais preciso, o termômetro de mercúrio é o mais usado, pois apresenta grande facilidade de manuseio.

## Termômetro clínico

O termômetro clínico tem por finalidade medir a temperatura do corpo humano. Por isso, ele indica apenas temperaturas com valores entre 35 °C e 42 °C.

O tubo capilar pelo qual passa o mercúrio é muito estreito. Isto pode dificultar a visão do nível atingido. Por isso, a haste de vidro é moldada de tal forma que sirva como lente de aumento, ampliando o tubo capilar, facilitando a visão do nível de mercúrio.

Entre o bulbo e o início da haste existe um estrangulamento no tubo que permite ao mercúrio se expandir ao longo do tubo mas não voltar ao bulbo. Isso faz dele um termômetro de máxima, ou seja, em um determinado intervalo de tempo, ele mede apenas a máxima temperatura do corpo.

Para que a porção do mercúrio expandida no tubo retorne ao bulbo, deve-se agitar o termômetro.

Termômetro clínico de mercúrio.

Thinkstock/Getty Images

Termômetro clínico digital.

## Termômetro de rua

Um termômetro diferente, que podemos encontrar nas ruas de algumas cidades, são esses relógios, como o da fotografia, que também registram a temperatura do ar no local. No seu funcionamento, esse dispositivo conta com uma antena que possui em sua extremidade um diodo semicondutor. Esse diodo está associado a outros componentes eletrônicos e o circuito é alimentado por uma fonte de tensão. Quando o ar no local esquenta (ou esfria), a corrente elétrica no diodo aumenta (ou diminui), e essa informação é transmitida ao circuito elétrico existente no interior do “relógio”, que altera o indicativo da temperatura.

Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

## Exercícios nível 1

**23.** A menor temperatura até hoje registrada na superfície da Terra ocorreu em 21 de julho de 1983 na estação russa de Vostok, na Antártida, e seu valor foi de –89,2 °C. Na escala Kelvin, que valor essa temperatura assumiria?

**24.** No interior de uma sala, há dois termômetros pendurados na parede. Um deles, graduado em Kelvin, indica 298 K para a temperatura ambiente. O outro está graduado em graus Celsius. Quanto esse termômetro está marcando?

**25.** Lorde Kelvin conceituou zero absoluto como o estágio nulo de agitação das partículas de um sistema físico. Nas escalas Celsius e Fahrenheit, que valores vamos encontrar para expressar a situação física do zero absoluto? (Dê sua resposta desprezando possíveis casas decimais.)

**26.** As pessoas costumam dizer que na cidade de São Paulo podemos encontrar as quatro estações do ano em um mesmo dia. Claro que essa afirmação é um tanto exagerada. No entanto, não é difícil termos variações de até 15 °C em um mesmo dia. Na escala absoluta Kelvin, que valor representaria essa variação de temperatura?

## Exercícios nível 2

**27.** (Unifesp-SP) O texto a seguir foi extraído de uma matéria sobre congelamento de cadáveres para sua preservação por muitos anos, publicada no jornal *O Estado de S. Paulo*.

> *Após a morte clínica, o corpo é resfriado com gelo. Uma injeção de anticoagulantes é aplicada e um fluido especial é bombeado para o coração, espalhando-se pelo corpo e empurrando para fora os fluidos naturais. O corpo é colocado em uma câmara com gás nitrogênio, onde os fluidos endurecem em vez de congelar. Assim que atinge a temperatura de –321 °, o corpo é levado para um tanque de nitrogênio líquido, onde fica de cabeça para baixo.*

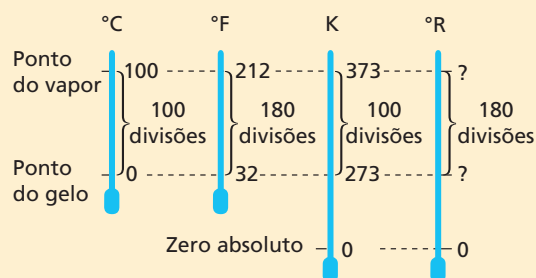
Na matéria, não consta a unidade de temperatura usada. Considerando que o valor indicado de –321 ° esteja correto e pertença a uma das escalas, Kelvin, Celsius ou Fahrenheit, pode-se concluir que foi usada a escala:

a) Kelvin, pois se trata de um trabalho científico e esta é a unidade adotada pelo Sistema Internacional.
b) Fahrenheit, por ser um valor inferior ao zero absoluto e, portanto, só pode ser medido nessa escala.
c) Fahrenheit, pois as escalas Celsius e Kelvin não admitem esse valor numérico de temperatura.
d) Celsius, pois só ela tem valores numéricos negativos para a indicação de temperaturas.
e) Celsius, por tratar-se de uma matéria publicada em língua portuguesa e essa ser a unidade adotada oficialmente no Brasil.

**28.** (Mack-SP) Um pesquisador verifica que certa temperatura obtida na escala Kelvin é igual ao correspondente valor na escala Fahrenheit acrescido de 145 unidades. Qual o valor dessa temperatura na escala Celsius?

**29. E.R.** A escala Kelvin tem sua origem no zero absoluto e usa como unidade o grau Celsius. Existe uma outra escala, denominada Rankine, que também tem sua origem no zero absoluto, mas usa como unidade o grau Fahrenheit. Determine a equação de conversão entre as escalas Kelvin e Rankine.

**Resolução:**

Façamos, inicialmente, um esquema representando as escalas Celsius, Fahrenheit, Kelvin e Rankine:

Do enunciado, sabemos que as origens das escalas Kelvin e Rankine coincidem com o zero absoluto.

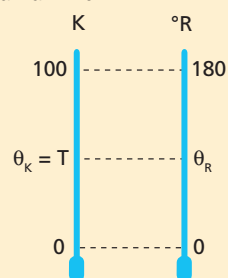
Uma vez que a escala Rankine usa como unidade o grau Fahrenheit, observamos que entre os pontos do gelo e do vapor temos 180 divisões, enquanto na Kelvin temos 100 divisões para o mesmo intervalo.

Do exposto, podemos afirmar que ao valor 100 da escala Kelvin corresponde o valor 180 da escala Rankine:

K °R
100 — 180
$\theta_K = T$ — $\theta_R$
0 — 0

$$\frac{T - 0}{100 - 0} = \frac{\theta_R - 0}{180 - 0}$$

$$\frac{T}{100} = \frac{\theta_R}{180} \Rightarrow \frac{T}{5} = \frac{\theta_R}{9}$$

$$\boxed{T = \frac{5}{9}\,\theta_R}$$

**30.** A relação entre as escalas Celsius (**C**) e Rankine (**R**) é dada pela equação:

$$\frac{R - 492}{9} = \frac{C}{5}$$

Para qual temperatura essas escalas fornecem a mesma leitura? Essa temperatura pode existir?

**31.** Um físico chamado Galileu Albert Newton encontrava-se em um laboratório realizando um experimento no qual deveria aquecer certa porção de água pura. Mediu a temperatura inicial da água e encontrou o valor 20 °C. Porém, como ele era muito desajeitado, ao colocar o termômetro sobre a mesa, acabou quebrando-o. Procurando outro termômetro, encontrou um graduado na escala Kelvin. No final do aquecimento, observou que a temperatura da água era de 348 K. Na equação utilizada por esse físico, a variação de temperatura deveria estar na escala Fahrenheit. O valor, em graus Fahrenheit, que ele encontrou para a variação de temperatura da água foi de:

a) 20 °F.
b) 66 °F.
c) 75 °F.
d) 99 °F.
e) 106 °F.

## Exercícios

nível 3

**32.** (Vunesp-FMJ-SP) Em uma nova escala termométrica expressa-se a temperatura dos corpos em graus Beta, indicada como °β. Sabendo-se que a temperatura de 0 °C corresponde a 40 °β e uma variação de temperatura de 1 °C corresponde a uma variação de $\left(\frac{3}{4}\right)$ °β , a temperatura de ebulição da água no nível do mar nessa nova escala será, em °β, igual a:

a) 115
b) 140
c) 185
d) 200
e) 295

**33.** (Mack-SP) Um termômetro graduado na escala Celsius (°C) é colocado juntamente com dois outros, graduados nas escalas arbitrárias **A** (°A) e **B** (°B), em uma vasilha contendo gelo (água no estado sólido) em ponto de fusão, ao nível do mar. Em seguida, ainda ao nível do mar, os mesmos termômetros são colocados em uma outra vasilha, contendo água em ebulição, até atingirem o equilíbrio térmico. As medidas das temperaturas, em cada uma das experiências, estão indicadas nas figuras **1** e **2**, respectivamente:

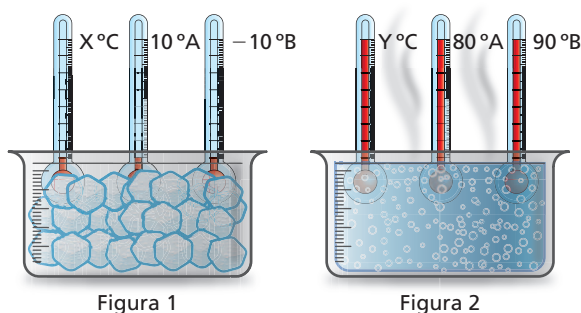
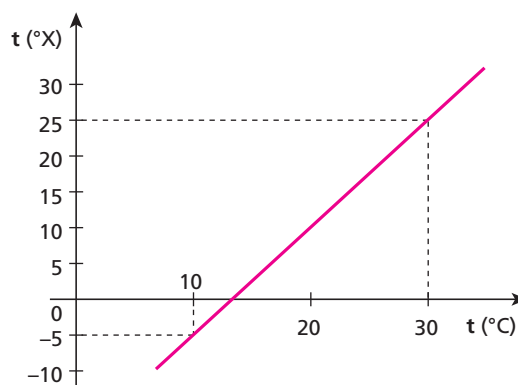



Figura 1 Figura 2

Para uma outra situação, na qual o termômetro graduado na escala **A** indica 17 °A, o termômetro graduado na escala **B** e o graduado na escala Celsius indicarão, respectivamente:

a) 0 °B e 7 °C
b) 0 °B e 10 °C
c) 10 °B e 17 °C
d) 10 °B e 27 °C
e) 17 °B e 10 °C

**34.** (UEL-PR) O gráfico indicado a seguir representa a relação entre a temperatura medida em uma escala **X** e a mesma temperatura medida na escala Celsius.

Para a variação de 1,0 °C, que intervalo vamos observar na escala **X**?

**35.** (UFSE) Um termômetro que mede a temperatura ambiente indica sempre 2 °C acima da temperatura correta, e outro que mede a temperatura de um líquido indica 3 °C abaixo da temperatura correta. Se o líquido está 5 °C acima da temperatura ambiente, a indicação dos termômetros defeituosos, em graus Celsius, pode ser:

a) 18 e 16.
b) 18 e 18.
c) 18 e 20.
d) 18 e 23.
e) 18 e 28.

**36.** (UCDB-MT) Um processo rápido para estimar valor em graus Celsius de uma temperatura fornecida em graus Fahrenheit é dividir o valor fornecido por dois e subtrair 16. Assim, 76 °F valeriam, aproximadamente, 22 °C. O erro dessa estimativa seria de:

a) 10%.
b) 15%.
c) 20%.
d) 23%.
e) 25%.

**37.** Na parede da sala de uma residência são colocados quatro termômetros, graduados nas escalas Celsius, Fahrenheit, Réaumur e Kelvin. Numericamente, qual deles apresentará maior leitura?

a) Fahrenheit.
b) Celsius.
c) Réaumur.
d) Kelvin.
e) Todos os termômetros apresentarão a mesma leitura.

**38.** A escala Rankine tem origem no zero absoluto e utiliza como unidade o grau Fahrenheit. Que valores, nessa escala, representam os pontos do gelo e do vapor?

## Descubra mais

1. É possível medirmos a temperatura do vácuo?
2. Por que um termômetro clínico é um termômetro de máxima?

## Para raciocinar um pouco mais

**39.** (UEPB) Em 1851, o matemático e físico escocês William Thomson, que viveu entre 1824 e 1907, mais tarde possuidor do título de Lorde Kelvin, propôs a escala absoluta de temperatura, atualmente conhecida como escala Kelvin de temperatura (**K**). Utilizando-se das informações contidas no texto, indique a alternativa **correta**:

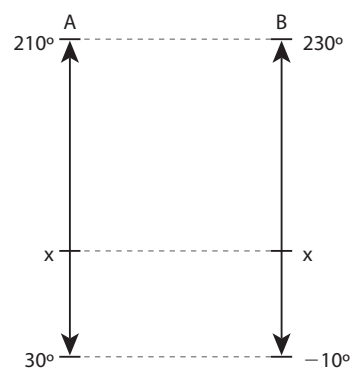
a) Com o avanço da tecnologia, atualmente, é possível obter a temperatura de zero absoluto.
b) Os valores dessa escala estão relacionados com os da escala Fahrenheit (°F), por meio da expressão K = °F + 273.
c) A partir de 1954, adotou-se como padrão o ponto tríplice da água, temperatura em que a água coexiste nos três estados – sólido, líquido e vapor. Isso ocorre à temperatura de 0,01 °F ou 273,16 K, por definição, e à pressão de 610 Pa (4,58 mm Hg).
d) Kelvin é a unidade de temperatura comumente utilizada nos termômetros brasileiros.
e) Kelvin considerou que a energia de movimento das moléculas dos gases atingiria um valor mínimo de temperatura, ao qual ele chamou zero absoluto.

**40.** (Cefet-SP) A superfície gelada do pequeno Plutão é composta por nitrogênio, metano e traços de monóxido de carbono. A temperatura do planeta-anão varia ao longo da sua órbita porque, no decorrer de sua trajetória, aproxima-se do Sol até 30 UA e afasta-se até 50 UA. Existe uma tênue atmosfera que congela e cai sobre o planeta-anão quando este se afasta do Sol. Sendo assim, dependendo da sua posição em relação ao Sol, a temperatura sobre a superfície do planeta-anão varia de –230 °C a –210 °C. Pode-se afirmar que:
(UA - Unidade Astronômica)

a) essas temperaturas não são lidas em em um termômetro graduado na escala Kelvin, pois a menor temperatura nesse termômetro é 0 K.
b) não se medem essas temperaturas em um termômetro graduado na escala Celsius, pois sua escala varia de 0 °C a 100 °C.
c) se medem essas temperaturas com termômetros graduados na escala Celsius, pois é o único que mede temperaturas abaixo de zero.
d) na escala Fahrenheit, o módulo da variação da temperatura sobre a superfície do pequeno Plutão corresponde a 36 °F.
e) na escala Fahrenheit, o módulo da variação da temperatura sobre a superfície do pequeno Plutão corresponde a 20 °F.

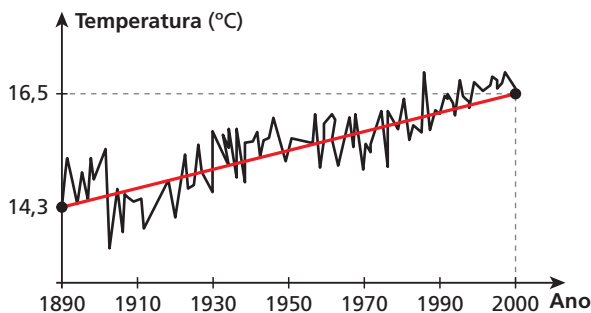
**41.** (Unifesp-SP) Quando se mede a temperatura do corpo humano com um termômetro clínico de mercúrio em vidro, procura-se colocar o bulbo do termômetro em contato direto com regiões mais próximas do interior do corpo e manter o termômetro assim durante algum tempo, antes de fazer a leitura. Esses dois procedimentos são necessários porque:

a) o equilíbrio térmico só é possível quando há contato direto entre dois corpos e porque demanda sempre algum tempo para que a troca de calor entre o corpo humano e o termômetro se efetive.
b) é preciso reduzir a interferência da pele, órgão que regula a temperatura interna do corpo, e porque demanda sempre algum tempo para que a troca de calor entre o corpo humano e o termômetro se efetive.
c) o equilíbrio térmico só é possível quando há contato direto entre dois corpos e porque é preciso evitar a interferência do calor específico médio do corpo humano.
d) é preciso reduzir a interferência da pele, órgão que regula a temperatura interna do corpo, e porque o calor específico médio do corpo humano é muito menor que o do mercúrio e o do vidro.
e) o equilíbrio térmico só é possível quando há contato direto entre dois corpos e porque é preciso reduzir a interferência da pele, órgão que regula a temperatura interna do corpo.

**42.** (Unirio-RJ) Em uma certa escala termométrica **A**, os pontos de fusão do gelo e de ebulição da água ao nível do mar são, respectivamente, 30° e 210°. Em outra escala termométrica **B**, os pontos de fusão do gelo e de ebulição da água ao nível do mar são, respectivamente, –10° e 230°, como mostra a figura abaixo. Há uma temperatura que é representada em ambas as escalas pelo mesmo número.

Sabendo-se que a temperatura de um corpo está entre os pontos de fusão do gelo e de ebulição da água ao nível do mar a probabilidade de que sua temperatura seja maior do que **x** vale:

a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{3}$

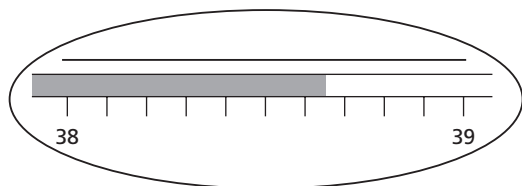
O texto a seguir refere-se às questões 43 e 44.

*O gráfico a seguir apresenta a variação das temperaturas médias mínimas em Campinas, dados esses observados entre 1890 e 2000 no Centro Experimental do Instituto Agronômico de Campinas. Essa variação pode ter seus valores representados aproximadamente pelos pontos de uma reta cuja equação também permite extrapolar valores para anos posteriores aos pesquisados.*

**43.** (Puccamp-SP) Considere no eixo horizontal uma escala em anos a partir de 1890 (x = 0). Dessa forma, a equação dessa reta é:

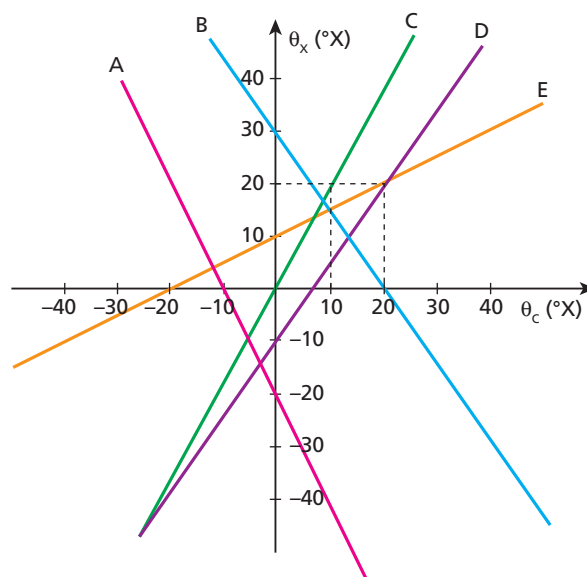
a) $y = 0,02x + 14,3$
b) $y = 0,022x + 14,3$
c) $y = 0,022x + 16,5$
d) $y = 0,1x - 14,3$
e) $y = 0,2x - 16,5$

**44.** (Puccamp-SP) Em outra cidade brasileira, as temperaturas médias mínimas nesse período podem ser representadas por uma reta paralela à do gráfico, com temperatura de 13,5 °C em 1890. Assim, a temperatura média mínima registrada nessa cidade em 2000 deve ter sido, aproximadamente:

a) 15,8 °C
b) 15,7 °C
c) 15,6 °C
d) 15,5 °C
e) 15,4 °C

**45.** (Unifesp-SP) Na medida de temperatura de uma pessoa por meio de um termômetro clínico, observou-se que o nível de mercúrio estacionou na região entre 38 °C e 39 °C da escala, como está ilustrado na figura.

Após a leitura da temperatura, o médico necessita do valor transformado para uma nova escala, definida por $t_X = \frac{2t_C}{3}$ e em unidades °X, onde $t_C$ é a temperatura na escala Celsius. Lembrando de seus conhecimentos sobre algarismos significativos, ele conclui que o valor mais apropriado para a temperatura $t_X$ é:

a) 25,7 °X.
b) 25,7667 °X.
c) 25,766 °X.
d) 25,77 °X.
e) 26 °X.

**46.** Um estudante inventou uma escala termométrica, denominada **X**, que registra o valor –10 °X para o ponto do gelo e 140 °X para o ponto do vapor.

Qual dos gráficos pode representar a relação entre essa escala **X** e a escala Celsius?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

**47.** No dia 1º, à 0 h de determinado mês, uma criança deu entrada em um hospital com suspeita de meningite. Sua temperatura estava normal (36,5 °C). A partir do dia 1º, a temperatura dessa criança foi plotada em um gráfico por meio de um aparelho registrador contínuo. Esses dados caíram nas mãos de um estudante de Física, que verificou a relação existente entre a variação de temperatura ($\Delta\theta$), em graus Celsius, e o dia (t) do mês. O estudante encontrou a seguinte equação:

$$\Delta\theta = -0,20t^2 + 2,4t - 2,2$$

A partir dessa equação, analise as afirmações dadas a seguir e indique a correta.

a) A maior temperatura que essa criança atingiu foi 40,5 °C.
b) A maior temperatura dessa criança foi atingida no dia 6.
c) Sua temperatura voltou ao valor 36,5 °C no dia 12.
d) Entre os dias 3 e 8 sua temperatura sempre aumentou.
e) Se temperaturas acima de 43 °C causam transformações bioquímicas irreversíveis, então essa criança ficou com problemas cerebrais.

**48.** No século XVIII, o físico francês Réaumur criou uma escala termométrica que assinalava 0 para o ponto do gelo e 80 para o ponto do vapor. A razão de ter adotado os valores 0 e 80 é que, após vários experimentos, ele descobriu que o álcool, que foi usado como substância termométrica, expandia 80 partes por mil ao ser aquecido do ponto do gelo até o ponto do vapor. Comparando essa escala Réaumur com a escala Fahrenheit, qual a temperatura em que as leituras correspondem a um mesmo valor numérico?

# Tópico 2

# O calor e sua propagação

## Bloco 1

### 1. Energia térmica

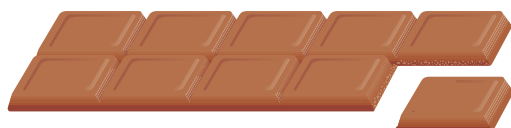
Quando observamos o mundo material à nossa volta, encontramos casas, plantas, automóveis, pessoas, a atmosfera (o ar), água, pedras e tantos outros representantes da matéria. Todos têm em comum o fato de serem formados por pequenas partículas, as moléculas.

Como vimos no Tópico 1, essas partículas possuem energia de agitação, exceto no **zero absoluto**.

Em uma primeira abordagem desse assunto, podemos dizer que essa energia de agitação das partículas é a **energia térmica** do corpo. Portanto, o somatório das energias de agitação das partículas de um corpo estabelece a energia térmica do mesmo. No Tópico 3, veremos que a energia térmica é, na realidade, o somatório das energias de agitação com a energia de agregação das partículas. Essa energia de agregação é que estabelece o estado físico do corpo (sólido, líquido ou gasoso).

A **energia térmica** do corpo depende de dois fatores: da energia de agitação média de cada partícula (que determina a temperatura do corpo) e do número de partículas que o corpo possui.

Assim:

A **energia térmica** de um corpo é o somatório das energias de agitação das suas partículas e depende da temperatura do corpo e do número de partículas nele existentes.

A barra de chocolate foi dividida em duas partes. Apesar de ambas estarem à mesma temperatura, a parte maior possui mais energia térmica que a menor, por ser constituída de um número maior de partículas.

É oportuno observar que o fato de um corpo **A** estar a uma temperatura maior que um outro **B** não implica, necessariamente, que **A** tenha maior quantidade de energia térmica que **B**. O corpo **B**, por exemplo, pode ter mais partículas que **A**, de tal forma que o somatório das energias de vibração de suas partículas supere o de **A**.

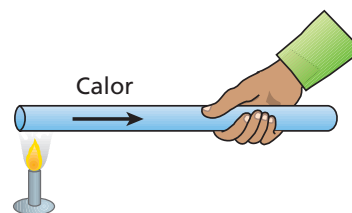
### 2. Calor

Quando colocamos em contato térmico dois corpos de temperaturas diferentes, notamos que eles buscam uma situação de equilíbrio térmico, em que as temperaturas tornam-se iguais.

Para que isso aconteça, o corpo de maior temperatura fornece certa quantidade de energia térmica ao de menor temperatura. Isso provoca uma diminuição em sua temperatura e um aumento na temperatura do corpo inicialmente mais frio, até que se estabeleça o equilíbrio térmico.

Essa energia térmica, quando e apenas enquanto está em trânsito, é denominada **calor**.

**Calor** é energia térmica em trânsito de um corpo para outro ou de uma parte para outra de um mesmo corpo, trânsito este provocado por uma diferença de temperaturas.

Observe que o calor flui, espontaneamente, da região de maior temperatura para a de menor temperatura.

Na situação representada acima, o calor propaga-se da extremidade esquerda da barra, em contato com o fogo, para a extremidade direita. Note que o calor flui naturalmente da região de maior temperatura para a de menor temperatura.

## 3. Unidade usual de calor

Sendo o calor uma forma de energia, no Sistema Internacional de Unidades (SI) sua unidade é o **joule** (**J**). Esse nome foi uma forma de a comunidade científica homenagear o físico inglês James Prescott Joule (1818-1889), que, entre outros trabalhos, demonstrou a equivalência entre a energia mecânica e a energia térmica. Esse assunto será tratado no Tópico 5 (Termodinâmica).

Além do joule, podemos usar também a unidade **caloria** (**cal**) para avaliar quantidades de calor. Essa unidade é pouco utilizada nos laboratórios, mas muito usada nos livros escolares. Inicialmente, a caloria foi definida como a quantidade de calor necessária para fazer 1 grama de água sofrer a variação de 1 grau Celsius em sua temperatura. Porém, observou-se que essa quantidade de energia era um pouco diferente quando se aquecia 1 grama de água de 10 °C para 11 °C e de 90 °C para 91 °C, por exemplo. Assim, foi estabelecido um valor médio, que acabou se encaixando entre 14,5 °C e 15,5 °C. Portanto:

Uma **caloria** (**cal**) é a quantidade de calor que 1 grama de água pura deve receber, sob pressão normal, para que sua temperatura seja elevada de 14,5 °C a 15,5 °C.

Na comparação com a definição de joule, estabelecida como o trabalho realizado por uma força de 1 newton quando o ponto em que a força é aplicada se desloca 1 metro na direção da força, encontramos a equivalência entre essas unidades:

$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}$$

No entanto, para facilitar os cálculos, é comum aparecer o valor 4,2 joules para cada caloria. Assim:

$$J = 4{,}2 \frac{\text{joules}}{\text{caloria}}$$

Essa relação é utilizada na conversão de joule para caloria ou vice-versa.

$$\tau \text{ (joule)} = J \cdot Q \text{ (caloria)}$$

Além da unidade caloria, um dos múltiplos mais usados é a **quilocaloria** (**kcal**).

$$1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal}$$

Esse múltiplo costuma aparecer nos rótulos dos alimentos, expressando o valor energético de uma porção definida, como vamos ver a seguir.

| Informação nutricional | |
|---|---|
| **Cada 100 g de aveia contém em média:** | |
| Carboidratos | 60 g |
| Proteínas | 12 g |
| Gordura | 10 g |
| Fibras alimentares | 10 g |
| Cálcio | 30 mg |
| Fósforo | 130 mg |
| Ferro | 2,1 mg |
| Vitamina B1 | 0,2 mg |
| Vitamina B2 | 0,08 mg |
| Sódio | 1,0 mg |
| Niacina | 1,0 mg |
| **Calorias** | **390** |
| **CONTÉM GLÚTEN** **Ingrediente:** Aveia 100% natural. | |
| CONSERVAR EM LUGAR SECO E AREJADO | |

### Caloria alimentar (Cal)

Nas embalagens de alimentos, normalmente encontramos a equivalência energética de uma porção. Essa energia vem expressa em kcal (quilocaloria) ou em Cal (caloria alimentar ou grande caloria), que são equivalentes.

$$1{,}0 \text{ Cal} = 1{,}0 \text{ kcal}$$

Ao lado, observamos uma tabela retirada da embalagem de uma caixa de aveia.

Apesar de não vir mencionado na embalagem, a unidade utilizada é a caloria alimentar (Cal), que equivale a $10^3$ calorias, ou a 1 quilocaloria (kcal).

Assim, cada 100 gramas dessa aveia tem capacidade energética equivalente a 390 Cal (390 kcal).

Uma pessoa geralmente precisa, em média, de 2500 kcal/dia para suas necessidades básicas. Um atleta necessita de uma quantidade maior que a citada e uma pessoa sedentária necessita de uma quantidade menor.

Nas tabelas a seguir, é apresentado um estudo feito pela Organização das Nações Unidas, no qual encontramos a média alimentar diária, em calorias alimentares, de alguns países.

| OS MAIS FAMINTOS | |
|---|---|
| **Países** | **Média alimentar diária** |
| Somália | 1 580 Cal |
| Eritreia | 1 640 Cal |
| Burundi | 1 710 Cal |
| Moçambique | 1 710 Cal |
| Afeganistão | 1 710 Cal |
| Etiópia | 1 780 Cal |
| Comores | 1 830 Cal |
| Congo-Brazzaville | 1 880 Cal |

| A MESA MAIS FARTA | |
|---|---|
| **Países** | **Média alimentar diária** |
| Dinamarca | 3 780 Cal |
| Portugal | 3 650 Cal |
| Irlanda | 3 620 Cal |
| Estados Unidos | 3 620 Cal |
| Bélgica | 3 570 Cal |
| Luxemburgo | 3 570 Cal |
| França | 3 550 Cal |
| Itália | 3 480 Cal |

**Fonte**: Organização das Nações Unidas para a Alimentação e Agricultura, FAO.

É bom lembrar que uma mesa farta nem sempre é composta de alimentos saudáveis.

## 4. Processos de propagação do calor

Já vimos que a energia térmica pode mudar de local, indo, espontaneamente, da região de maior temperatura para a de menor temperatura. Essa mudança pode processar-se de três maneiras distintas, denominadas **condução**, **convecção** e **radiação**.

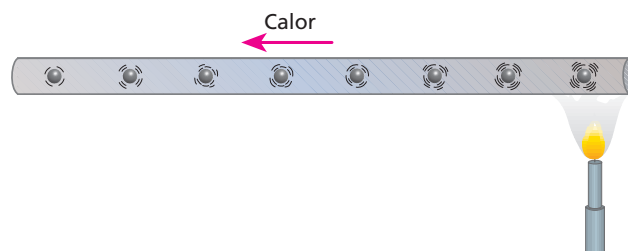
### A condução

Ao colocarmos a ponta de uma barra de metal em contato com uma fonte térmica e segurarmos a outra extremidade, notamos que o local que está em contato com a mão se torna, rapidamente, cada vez mais quente, apesar de estar distante da fonte de calor.

É o que acontece quando uma cozinheira fica mexendo o conteúdo de uma panela com uma colher metálica. Após algum tempo ela não consegue manter a colher em sua mão, já que toda a colher se encontra muito quente. As cozinheiras mais experientes usam colher de madeira, material que conduz o calor de forma mais lenta do que o metal.

Nos exemplos citados, o calor propaga-se através da barra e da colher. Esse fenômeno físico é denominado **condução**.

Assim:

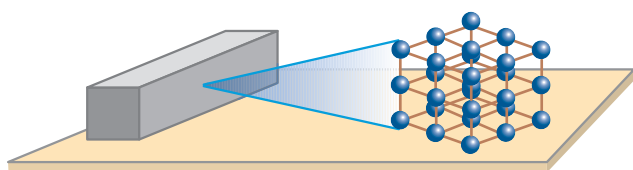
**Condução** é o processo de propagação de calor no qual a energia térmica passa de partícula para partícula de um meio.

Esquema, sem rigor na escala, que representa a condução do calor através de uma barra. Note que a energia térmica é passada sequencialmente de partícula para partícula e que vibram mais as partículas mais próximas da fonte de calor.

É importante notar que, na condução, as partículas permanecem vibrando em torno de suas posições de equilíbrio. As partículas não se deslocam, ao contrário do que acontece com a energia.

Destaquemos que, como a ocorrência da condução requer a existência de um meio material, esse fenômeno não ocorre no vácuo.

O calor propaga-se por condução através da parede do forno da pizzaria, atingindo a mão da pessoa que se encontra na face externa dessa parede.

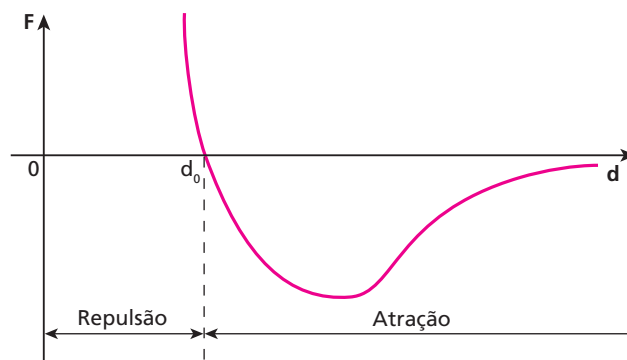
## Forças intermoleculares explicando a condução

As forças de interação molecular são de origem eletromagnética.

Representação esquemática da estrutura cristalina de um sólido. As partículas se mantêm coesas devido às forças intermoleculares.

Num corpo, duas moléculas vizinhas estão na **posição de equilíbrio** quando a resultante das forças de interação entre elas é nula. Nessa situação, chamaremos de $d_0$ a distância que separa essas moléculas.

Quando a distância **d** entre as moléculas torna-se maior que $d_0$, surgem forças de interação **atrativas**. É por isso que uma barra de ferro, por exemplo, resiste a esforços de tração.

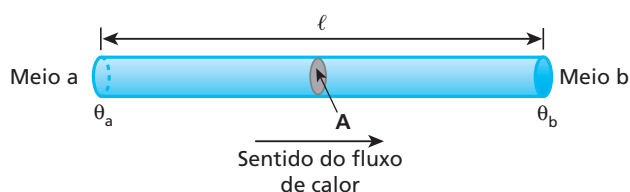
Quando as moléculas são aproximadas de modo que a distância **d** entre elas torna-se menor que $d_0$, surgem as forças de interação **repulsivas**. É por essa razão que a barra de ferro do exemplo anterior resiste a esforços de compressão.

Seja **F** o valor algébrico da força de interação entre as moléculas vizinhas pertencentes a um dado corpo. O gráfico a seguir mostra a variação de **F** em função da distância **d** entre essas moléculas.

No gráfico, os valores positivos de **F** correspondem a forças de repulsão ($d < d_0$), enquanto os valores negativos correspondem a forças de atração ($d > d_0$). A força atrativa praticamente se anula quando **d** vale aproximadamente 10 $d_0$.

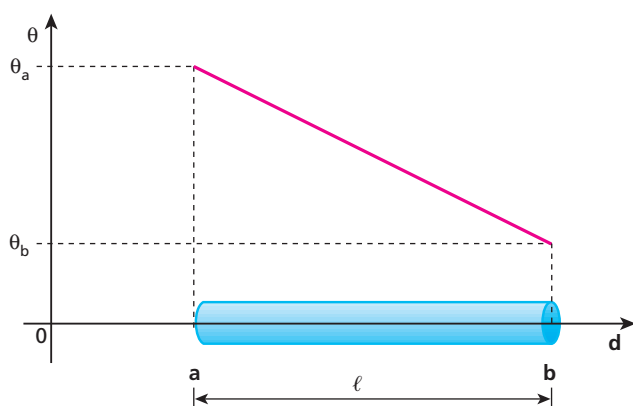
Dessa forma, podemos concluir que as moléculas, ao vibrarem com maior amplitude, conseguem aproximar-se mais de moléculas vizinhas, intensificando-se as forças repulsivas. Consequentemente, essas moléculas vizinhas são "sacudidas" pelas primeiras, passando a um estágio de vibração de amplitudes maiores. Assim, a energia térmica (o calor) é conduzida de molécula para molécula do meio a que elas pertencem.

## Cálculo do fluxo de calor ($\phi$) — Lei de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier, matemático e físico francês, que nasceu em 1768, em Auxerre (Borgonha), e faleceu em 1830.

Façamos, agora, um estudo quantitativo do calor que flui através de uma barra de secção transversal uniforme. Para tanto, vamos considerar $\ell$ o comprimento da barra e **A** a área de sua secção transversal. Coloquemos as extremidades dessa barra em contato térmico com dois meios **a** e **b**, cujas temperaturas constantes são, respectivamente, $\theta_a$ e $\theta_b$ (com $\theta_a > \theta_b$). Para evitar possíveis perdas de calor, a barra é isolada termicamente ao longo de sua superfície.

Devido à diferença de temperatura entre as extremidades **a** e **b**, há um fluxo de calor (ou corrente térmica) através da barra, no sentido da extremidade mais quente para a mais fria. A intensidade desse fluxo térmico é definida pela razão entre a quantidade de calor **Q** que atravessa uma secção transversal da barra e o intervalo de tempo $\Delta t$ correspondente:

$$\phi = \frac{Q}{\Delta t} \qquad \text{Unidade usual: } \frac{\text{cal}}{\text{s}}$$

Inicialmente, as diversas secções da barra apresentam temperatura variável. Decorrido certo intervalo de tempo, entretanto, essas secções assumem temperaturas constantes, mas diferentes entre si. Nessa situação, atingiu-se um equilíbrio e o fluxo de calor dá-se em **regime permanente** ou **estacionário**. Nesse caso, o fluxo de calor é o mesmo em qualquer secção da barra e a temperatura ao longo dela obedece ao gráfico representado a seguir.

No regime permanente, o fluxo térmico depende de quatro fatores: da área (**A**) da secção transversal da barra, de seu comprimento (**ℓ**), da diferença de temperaturas ($\Delta\theta$) dos meios **a** e **b** e do material de que é feita a barra (**k**).

Matematicamente, tais grandezas são relacionadas pela equação a seguir, denominada **Lei de Fourier**:

$$\phi = k\,\frac{A\,|\Delta\theta|}{\ell}$$

A grandeza **k** é uma constante característica do material da barra, sendo denominada **coeficiente de condutibilidade térmica**.

Os maiores valores do coeficiente **k** pertencem aos metais, que são os melhores condutores de energia térmica. Os menores valores de **k** ficam para os isolantes térmicos, como a lã de vidro, a cortiça, a madeira, os gases em geral e outros.

A seguir, temos uma tabela dos coeficientes de condutibilidade térmica de algumas substâncias (ou materiais).

**Tabela de condutibilidade térmica**

| Material | k em $\frac{\text{cal} \cdot \text{cm}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot {}^\circ\text{C}}$ |
|---|---|
| **Gases** | |
| Oxigênio | $5{,}6 \cdot 10^{-5}$ |
| Ar | $5{,}7 \cdot 10^{-5}$ |
| Hidrogênio | $3{,}3 \cdot 10^{-4}$ |
| Hélio | $3{,}4 \cdot 10^{-4}$ |
| **Sólidos diversos** | |
| Cortiça e feltro | $1 \cdot 10^{-4}$ |
| Lã de vidro | $1 \cdot 10^{-4}$ |
| Madeira | $3 \cdot 10^{-4}$ |
| Tijolo de barro | $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ |
| Concreto e vidro | $2 \cdot 10^{-3}$ |
| Tijolo refratário | $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ |
| Gelo | $4 \cdot 10^{-3}$ |
| **Metais** | |
| Chumbo | $8{,}2 \cdot 10^{-2}$ |
| Aço | $1{,}2 \cdot 10^{-1}$ |
| Latão | $2{,}6 \cdot 10^{-1}$ |
| Alumínio | $4{,}9 \cdot 10^{-1}$ |
| Cobre | $9{,}2 \cdot 10^{-1}$ |
| Prata | 1,01 |

## Exercícios

nível 1

**1.** Imagine dois corpos **A** e **B** com temperaturas $T_A$ e $T_B$, sendo $T_A > T_B$. Quando colocamos esses corpos em contato térmico, podemos afirmar que ocorre o seguinte fato:
a) Os corpos se repelem.
b) O calor flui do corpo **A** para o corpo **B** por tempo indeterminado.
c) O calor flui do corpo **B** para o corpo **A** por tempo indeterminado.
d) O calor flui de **A** para **B** até que ambos atinjam a mesma temperatura.
e) Não acontece nada.

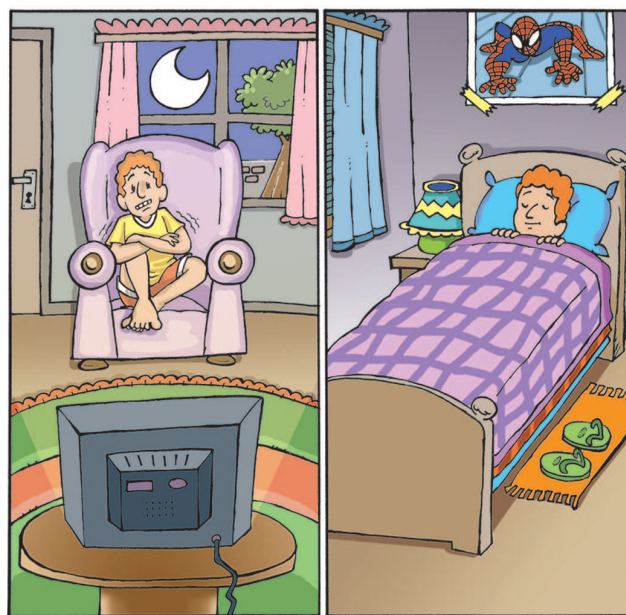
**2.** No café da manhã, uma colher metálica é colocada no interior de uma caneca que contém leite bem quente. A respeito desse acontecimento, são feitas três afirmativas.
I. Após atingirem o equilíbrio térmico, a colher e o leite estão a uma mesma temperatura.
II. Após o equilíbrio térmico, a colher e o leite passam a conter quantidades iguais de energia térmica.
III. Após o equilíbrio térmico, cessa o fluxo de calor que existia do leite (mais quente) para a colher (mais fria).
Podemos afirmar que:
a) somente a afirmativa I é correta;
b) somente a afirmativa II é correta;
c) somente a afirmativa III é correta;
d) as afirmativas I e III são corretas;
e) as afirmativas II e III são corretas.

**3.** Analise as proposições e indique a **verdadeira**.
a) Calor e energia térmica são a mesma coisa, podendo sempre ser usados tanto um termo como o outro, indiferentemente.
b) Dois corpos estão em equilíbrio térmico quando possuem quantidades iguais de energia térmica.
c) O calor sempre flui da região de menor temperatura para a de maior temperatura.
d) Calor é energia térmica em trânsito, fluindo espontaneamente da região de maior temperatura para a de menor temperatura.
e) Um corpo somente possui temperatura maior que a de um outro quando sua quantidade de energia térmica também é maior que a do outro.

**4.** (Enem) A sensação de frio que nós sentimos resulta:
a) do fato de nosso corpo precisar receber calor do meio exterior para não sentirmos frio.
b) da perda de calor do nosso corpo para a atmosfera que está a uma temperatura maior.
c) da perda de calor do nosso corpo para a atmosfera que está a uma temperatura menor.
d) do fato de a friagem que vem da atmosfera afetar o nosso corpo.
e) da transferência de calor da atmosfera para o nosso corpo.

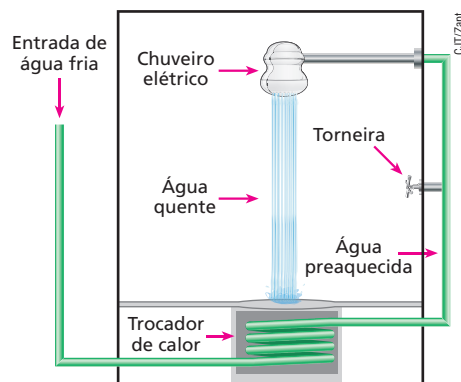
**5.** Você sabe que o aprendizado da Física também se faz por meio da observação das situações que ocorrem no nosso dia a dia. Faça um experimento. Caminhe descalço sobre um carpete ou um tapete e sobre um piso cerâmico, como o do banheiro da sua casa, por exemplo. Você vai notar que o piso cerâmico parece mais frio do que o tapete, apesar de estarem à mesma temperatura. Essa diferença de sensação se deve ao fato de:
a) a capacidade térmica do piso cerâmico ser menor que a do tapete;
b) a temperatura do piso cerâmico ser menor que a do tapete;
c) a temperatura do tapete ser menor que a do piso cerâmico;
d) a condutividade térmica do piso cerâmico ser maior que a do tapete;
e) a condutividade térmica do piso cerâmico ser menor que a do tapete.

**6.** Numa noite muito fria, você ficou na sala assistindo à televisão. Após algum tempo, foi para a cama e deitou-se debaixo das cobertas (lençol, cobertor e edredom). Você nota que a cama está muito fria, apesar das cobertas, e só depois de algum tempo o local se torna aquecido.

Luís Augusto Ribeiro

Isso ocorre porque:
a) o cobertor e o edredom impedem a entrada do frio que se encontra no meio externo;
b) o cobertor e o edredom possuem alta condutividade térmica;
c) o cobertor e o edredom possuem calor entre suas fibras, que, ao ser liberado, aquece a cama;
d) o cobertor e o edredom não são aquecedores, são isolantes térmicos, que não deixam o calor liberado por seu corpo sair para o meio externo;
e) sendo o corpo humano um bom absorvedor de frio, após algum tempo não há mais frio debaixo das cobertas.

**7.** (UFV-MG) Um engenheiro criou um chuveiro que preaquece a água no ralo antes que ela chegue à resistência do chuveiro.

A água quente que cai do chuveiro, ao passar pelo ralo, entra em contato com o cano que fornece água fria para o chuveiro. Nesse ralo há um tubo em forma de espiral cuja função é proporcionar a troca de calor, como se observa no esquema ao lado.
Para aumentar a troca de calor no ralo, o engenheiro testou vários materiais. Usou o CPVC, que é isolante térmico e, em ordem crescente de condutividade térmica, o aço, o alumínio e o cobre. Dos materiais testados, o mais adequado para ser usado como trocador de calor no ralo é o:

a) cobre. b) alumínio. c) CPVC. d) aço.

## Exercícios

nível 2

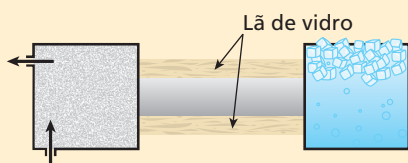
**8.** Uma garrafa e uma lata de refrigerante permanecem durante vários dias em uma geladeira. Quando pegamos a garrafa e a lata com as mãos desprotegidas para retirá-las da geladeira, temos a impressão de que a lata está mais fria do que a garrafa. Isso é explicado pelo fato de:

a) a temperatura do refrigerante na lata ser diferente da temperatura do refrigerante na garrafa;
b) a capacidade térmica do refrigerante na lata ser diferente da capacidade térmica do refrigerante na garrafa;
c) o calor específico dos dois recipientes ser diferente;
d) o coeficiente de dilatação térmica dos dois recipientes ser diferente;
e) a condutividade térmica dos dois recipientes ser diferente.

**9.** (UFSC) Identifique a(s) proposição(ões) **verdadeira(s):**

(01) Um balde de isopor mantém o refrigerante gelado porque impede a saída do frio.
(02) A temperatura de uma escova de dentes é maior que a temperatura da água da pia; mergulhando-se a escova na água, ocorrerá uma transferência de calor da escova para a água.
(04) Se tivermos a sensação de frio ao tocar um objeto com a mão, isso significa que esse objeto está a uma temperatura inferior à nossa.
(08) Um copo de refrigerante gelado, pousado sobre uma mesa, num típico dia de verão, recebe calor do meio ambiente até ser atingido o equilíbrio térmico.
(16) O agasalho, que usamos em dias frios para nos mantermos aquecidos, é um bom condutor de calor.
(32) Os esquimós, para se proteger do frio intenso, constroem abrigos de gelo porque o gelo é um isolante térmico.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

**10. E.R.** Uma barra de alumínio de 50 cm de comprimento e área de secção transversal de 5 cm$^2$ tem uma de suas extremidades em contato térmico com uma câmara de vapor de água em ebulição (100 °C).

A outra extremidade está imersa em uma cuba que contém uma mistura bifásica de gelo fundente (0 °C).
A pressão atmosférica local é normal. Sabendo que o coeficiente de condutibilidade térmica do alumínio vale 0,5 cal/s cm °C, calcule:

a) a intensidade da corrente térmica através da barra, depois de estabelecido o regime permanente;
b) a temperatura numa secção transversal da barra, situada a 40 cm da extremidade mais quente.

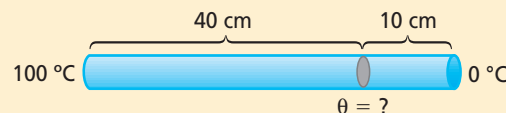
### Resolução:

a) No regime permanente, a corrente térmica é calculada pela Lei de Fourier:

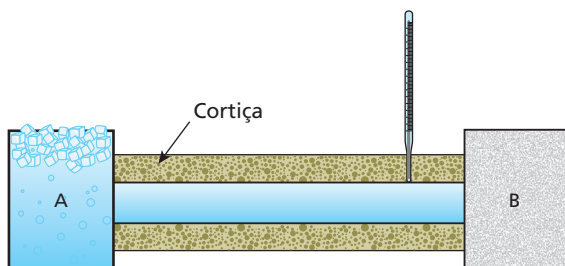
$$\phi = k\,\frac{A\Delta\theta}{\ell}$$

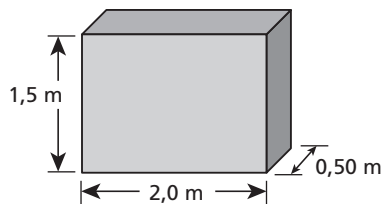
Do enunciado, temos que:
$k = 0,5$ cal/s cm °C
$A = 5$ cm$^2$
$\Delta\theta = 100$ °C $- 0$ °C $= 100$ °C
$\ell = 50$ cm
Substituindo esses valores na expressão anterior, vem:

$$\phi = \frac{0,5 \cdot 5 \cdot 100}{50} \qquad \boxed{\phi = 5 \text{ cal/s}}$$

b) Sabemos que, no regime permanente ou estacionário, a intensidade da corrente térmica através da barra é constante; assim, temos:

$$\phi = \frac{kA(100 - \theta)}{40} \Rightarrow 5 = \frac{0,5 \cdot 5 \cdot (100 - \theta)}{40} \Rightarrow$$

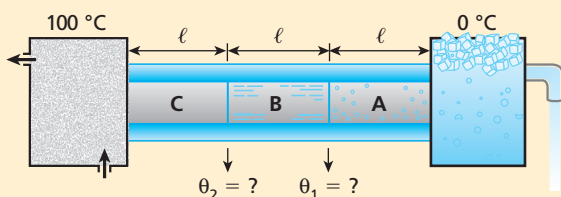
$$\Rightarrow \boxed{\theta = 20 \text{ °C}}$$

**11.** (Unama-PA) A figura a seguir apresenta uma barra de chumbo de comprimento 40 cm e área de secção transversal 10 cm² isolada com cortiça; um termômetro fixo na barra calibrado na escala Fahrenheit, e dois dispositivos **A** e **B** que proporcionam, nas extremidades da barra, as temperaturas correspondentes aos pontos do vapor e do gelo, sob pressão normal, respectivamente. Considerando a intensidade da corrente térmica constante ao longo da barra, determine a temperatura registrada no termômetro, sabendo que ele se encontra a 32 cm do dispositivo **A**. **Dado:** coeficiente de condutibilidade térmica do chumbo $= 8{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot \dfrac{\text{cal cm}}{\text{cm}^2\ ^\circ\text{C s}}$

**12.** Na figura a seguir, você observa uma placa de alumínio que foi utilizada para separar o interior de um forno, cuja temperatura mantinha-se estável a 220 °C, e o meio ambiente (20 °C).

Após atingido o regime estacionário, qual a intensidade da corrente térmica através dessa chapa metálica?
Suponha que o fluxo ocorra através da face de área maior.
**Dado:** coeficiente de condutibilidade térmica do alumínio = 0,50 cal/s cm °C

**13. E.R.** Três barras cilíndricas idênticas em comprimento e secção são ligadas formando uma única barra, cujas extremidades são mantidas a 0 °C e 100 °C. A partir da extremidade mais fria, as condutibilidades térmicas dos materiais das barras valem:

$$(0{,}20),\ (0{,}50)\ \text{e}\ (1{,}0)\ \frac{\text{kcal m}}{\text{h m}^2\ ^\circ\text{C}}$$

Supondo que em volta das barras exista um isolamento de vidro e desprezando quaisquer perdas de calor, calcule a temperatura nas junções onde uma barra é ligada à outra.

**Resolução:**

$$k_A = 0{,}20\frac{\text{kcal m}}{\text{h m}^2\ ^\circ\text{C}} \qquad k_B = 0{,}50\frac{\text{kcal m}}{\text{h m}^2\ ^\circ\text{C}}$$

$$k_C = 1{,}0\frac{\text{kcal m}}{\text{h m}^2\ ^\circ\text{C}}$$

No regime permanente, o fluxo de calor através das barras será o mesmo e permanecerá constante; portanto, podemos escrever:

$$\phi = k_A\frac{A_A(\theta_1 - 0)}{\ell_A} = k_B\frac{A_B(\theta_2 - \theta_1)}{\ell_B} = k_C\frac{A_C(100 - \theta_2)}{\ell_C}$$

Mas $A_A = A_B = A_C$ e $\ell_A = \ell_B = \ell_C$.

Logo:

$$k_A(\theta_1 - 0) = k_B(\theta_2 - \theta_1) = k_C(100 - \theta_2)$$

Desmembrando, temos:

$$\begin{cases} k_A(\theta_1 - 0) = k_C(100 - \theta_2) \\ k_A(\theta_1 - 0) = k_B(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$\begin{cases} 0{,}20\theta_1 = 1{,}0(100 - \theta_2) \quad (I) \\ 0{,}20\theta_1 = 0{,}50(\theta_2 - \theta_1) \quad (II) \end{cases}$$

De (II), temos:

$$0{,}20\theta_1 = 0{,}50\theta_2 - 0{,}50\theta_1$$

$$0{,}70\theta_1 = 0{,}50\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{0{,}70}{0{,}50}\theta_1$$

$$\theta_2 = 1{,}4\theta_1 \quad (III)$$

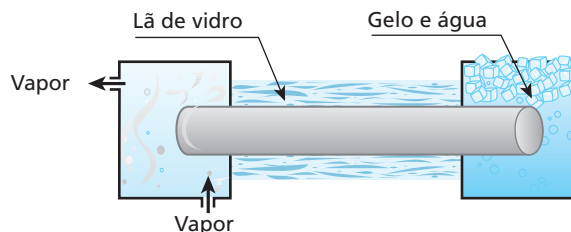
Substituindo (III) em (I), temos:

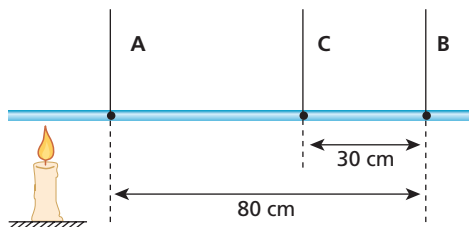
$$0{,}20\theta_1 = 100 - 1{,}4\theta_1 \Rightarrow 1{,}6\theta_1 = 100$$

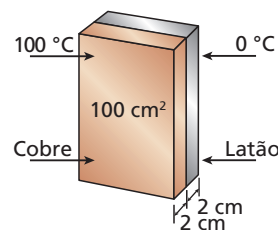
$$\boxed{\theta_1 = 62{,}5\ ^\circ\text{C}}$$

Voltando em (III), resulta:

$$\theta_2 = 1{,}4(62{,}5) \Rightarrow \boxed{\theta_2 = 87{,}5\ ^\circ\text{C}}$$

**14.** Uma barra de alumínio de 50 cm de comprimento e área de secção transversal 5 cm² tem uma de suas extremidades em contato térmico com uma câmara de vapor de água em ebulição.
A outra extremidade da barra está imersa em uma cuba que contém uma mistura bifásica de gelo e água em equilíbrio térmico. A pressão atmosférica é normal. Sabe-se que o coeficiente de condutibilidade térmica do alumínio vale 0,5 cal cm/s cm² °C.

Qual a temperatura da secção transversal da barra, situada a 40 cm da extremidade mais fria?

**15.** Uma barra metálica é aquecida conforme a figura; **A**, **B** e **C** são termômetros. Admita a condução de calor em regime estacionário e no sentido longitudinal da barra. Quando os termômetros das extremidades indicarem 200 °C e 80 °C, o intermediário indicará:

a) 195 °C.
b) 175 °C.
c) 140 °C.
d) 125 °C.
e) 100 °C.

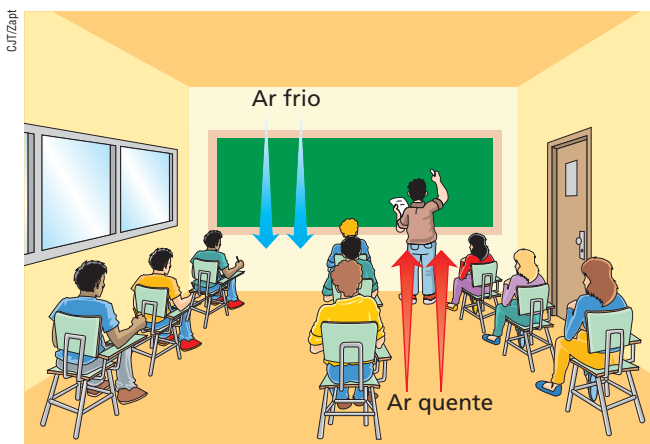
**16.** A condutividade térmica do cobre é aproximadamente quatro vezes maior que a do latão. Duas placas, uma de cobre e outra de latão, com 100 cm$^2$ de área e 2,0 cm de espessura, são justapostas como ilustra a figura dada abaixo.

Considerando-se que as faces externas do conjunto sejam mantidas a 0 °C e 100 °C, qual será a temperatura na interface da separação das placas quando for atingido o regime estacionário?

# Bloco 2

## A convecção

É comum, quando estamos num ambiente fechado (cinema, teatro ou a sala de aula), sentirmos, após algum tempo, que ele está muito "abafado". Parece que o ar fica "parado". O que pode ter ocorrido, já que no início não sentíamos isso?

Tal fato acontece porque as camadas de ar mais próximas das pessoas que estão no ambiente são aquecidas por elas e se expandem, aumentando seu volume, com consequente diminuição de sua densidade. Esse ar (quente) menos denso sobe, produzindo a descida do ar (frio) de maior densidade, que se encontra mais acima. Como esse fenômeno é cíclico, ao se repetir constantemente, produz no ar as **correntes de convecção**. Após algum tempo, todo o ar da sala encontra-se aquecido de maneira praticamente uniforme, não mais ocorrendo a convecção. Vem daí a sensação de ambiente "abafado".

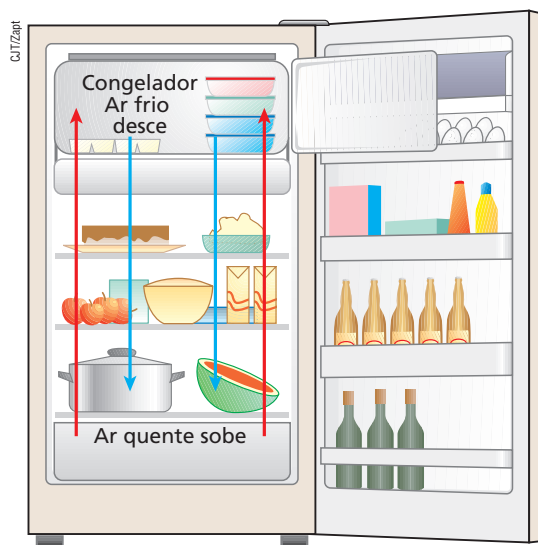
CJT/Zapt

**Convecção** é o processo de propagação de calor no qual a energia térmica muda de local, acompanhando o deslocamento do próprio material aquecido.

Notemos que a energia térmica muda de local acompanhando as partículas do fluido, ao contrário da condução, em que apenas a energia térmica se desloca e as partículas permanecem em suas posições de equilíbrio.

É importante observar que a convecção só ocorre nos fluidos (gases, vapores e líquidos), não acontecendo nos sólidos e no vácuo.

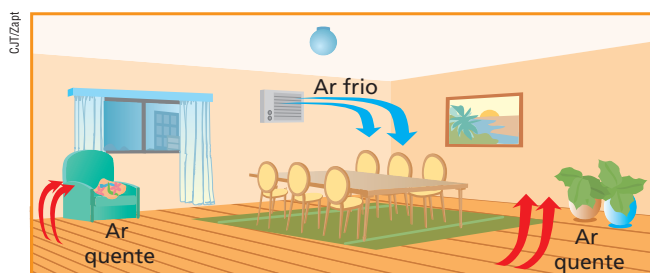
O movimento vertical de massas fluidas, de densidades diferentes, é provocado pela existência do campo gravitacional da Terra. Em um local sem campo gravitacional não ocorre convecção. No interior de uma espaçonave em uma viagem entre a Terra e a Lua, por exemplo, um sistema de ventiladores e exaustores deve ser usado para movimentar e renovar o ar da cabine onde estão os astronautas.

### Refrigeradores domésticos

Nos refrigeradores domésticos convencionais, a refrigeração dos alimentos é feita por convecção do ar em seu interior. O ar em contato com os alimentos é aquecido, expande-se — com consequente diminuição de densidade —, sobe até o congelador, onde é resfriado, e volta a descer. Notemos que, para isso acontecer, é necessário que o congelador esteja na parte superior e as prateleiras sejam grades vazadas.

A convecção do ar no interior de um refrigerador doméstico.

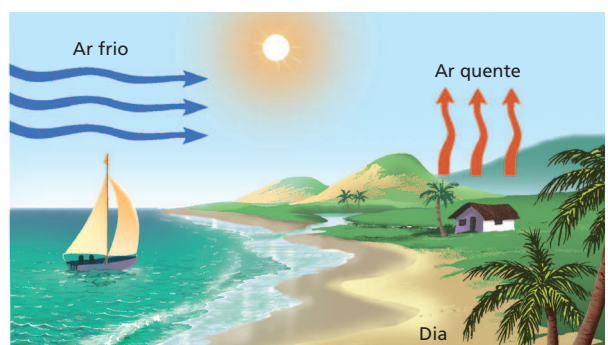
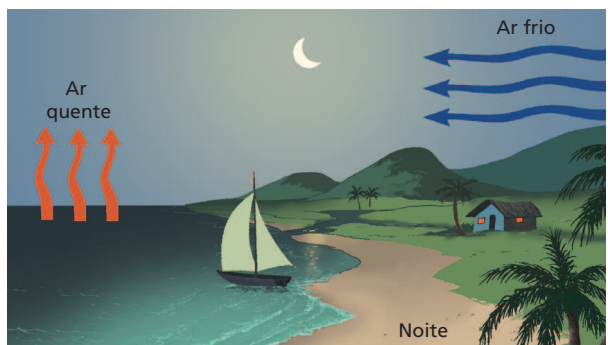
Nos refrigeradores que funcionam com sistema *frost free* (livre de gelo), a placa fria não fica na parte interna do aparelho, mas entre as paredes interna e externa traseira. Um conjunto de ventiladores provoca a circulação do ar, retirando o ar quente e injetando o ar frio, resfriando a parte interna onde ficam os alimentos. As prateleiras são inteiriças, de vidro ou de plástico, fazendo com que cada compartimento receba ar gelado através de aberturas existentes na parede do fundo. A circulação de ar quente, por convecção, ocorre nas prateleiras da porta, que são vazadas. O ar quente é retirado na parte superior da geladeira. A água formada pela condensação escorre para um recipiente na parte inferior e evapora.

## Ar-condicionado (ar frio) e Aquecedor (ar quente)

Em uma residência, podemos usar um aparelho de ar-condicionado no verão e um aquecedor elétrico no inverno. Observe nas figuras que o ar-condicionado deve sempre ficar na parte superior da parede, enquanto o aquecedor deve ficar no nível do chão. Lembre-se de que o ar quente (menos denso) sobe e o ar frio (mais denso) desce.

Note que, se fosse feito o contrário, o ar frio (mais denso) continuaria embaixo e o ar quente (menos denso) permaneceria em cima, não havendo circulação de ar.

## Brisas marinhas

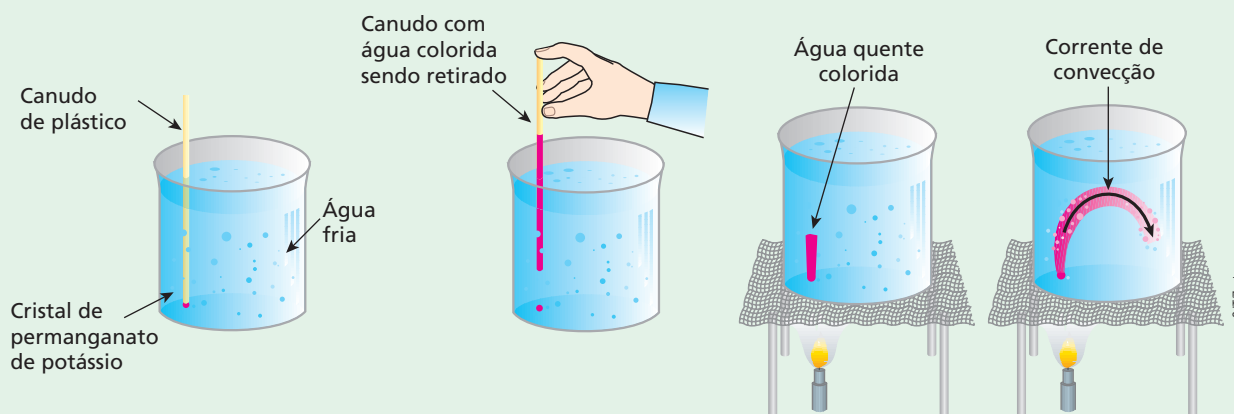
No litoral, durante o dia, a brisa sopra do mar para a praia e, à noite, da praia para o mar. A explicação para isso é que a areia tem calor específico muito pequeno em relação ao da água (para massas iguais, a areia precisa de menos energia para sofrer a mesma variação de temperatura), por isso se aquece e se resfria mais rapidamente.

Durante o dia, o ar quente próximo à areia sobe, provocando o deslocamento do ar frio que se encontra sobre a água.

À noite, a água demora mais para esfriar, invertendo o sentido das correntes de ar.

Isso explica por que o jangadeiro tem de sair de madrugada, quando a brisa sopra da praia para o mar, e tem de voltar antes de escurecer, quando a brisa ainda sopra do mar para a praia.

## Faça você mesmo

Vamos realizar um experimento que mostre a convecção da água durante seu aquecimento. Você precisará de um recipiente de vidro refratário e transparente, um canudo de plástico, um pequeno cristal de permanganato de potássio e água.

Introduza o cristal de permanganato de potássio através do canudo. Ele deslizará até o fundo do recipiente, já com água. Para que a água colorida pelo permanganato de potássio existente dentro do canudo não se misture com o restante, retire o canudo com o dedo fechando sua abertura superior.

Aqueça a água na região em que está o cristal. Você observará a água colorida subindo e depois descendo, acompanhando a corrente de convecção.

## A radiação

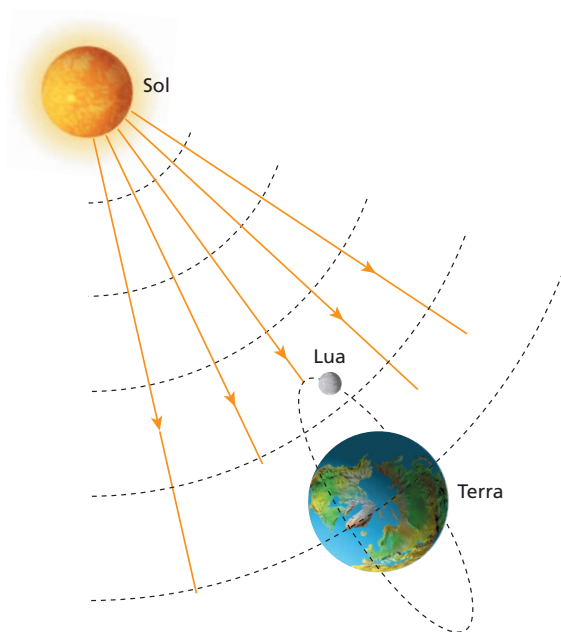
Quando nos bronzeamos na praia, ficamos expostos às radiações solares. A maior parte da energia que recebemos vem do Sol até a Terra através de ondas eletromagnéticas, que, ao atingirem nosso corpo, são absorvidas e transformadas, em grande parte, em energia térmica.

Esse processo de propagação da energia através de ondas eletromagnéticas é denominado **radiação**.

> **Radiação** é o processo de propagação de energia na forma de ondas eletromagnéticas. Ao serem absorvidas, essas ondas se transformam em energia térmica.

Rigorosamente, a radiação não é um processo de transmissão de calor. Sabemos, no entanto, que um corpo emite energia radiante ao sofrer um resfriamento. Assim, associamos a energia existente nas ondas eletromagnéticas emitidas com a energia térmica que saiu do corpo. Essas ondas, ao serem absorvidas por um outro corpo, transformam-se novamente em energia térmica, aquecendo-o. Por isso, costuma-se definir radiação como um processo de transferência de energia térmica.

Apesar de todas as ondas eletromagnéticas transportarem energia, apenas as correspondentes à faixa do infravermelho são chamadas de ondas de calor. Isso porque o infravermelho transforma-se mais facilmente em energia térmica ao ser absorvido. Num banho de luz solar, recebemos, dentre outras radiações, a ultravioleta e a infravermelha, sendo que a ultravioleta produz bronzeamento e a infravermelha provoca aquecimento e até queimaduras na pele.

O fato de as ondas eletromagnéticas se propagarem no vácuo explica como parte da energia térmica que saiu do Sol chega até a superfície da Terra. Assim, apenas por meio da radiação podemos entender como a energia térmica é levada de uma região para outra, havendo vácuo entre elas.

A vida na Terra pôde se desenvolver devido à energia emitida pelo Sol. Essa estrela é uma fonte limitada de energia. Segundo as modernas teorias científicas, dentro de 5 bilhões de anos ela será uma estrela morta. Sem essa energia, poderá existir vida na Terra? Será que o ser humano chegará até lá? (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.)

## 5. Algumas aplicações tecnológicas

O conhecimento tecnológico é extremamente importante para que as condições de vida do ser humano possam melhorar mais e mais com custo cada vez menor. Todos sabemos que o nosso corpo não suporta temperaturas muito altas e também muito baixas. Por isso, a tecnologia procura manter os ambientes em que vivemos dentro de intervalos de temperaturas confortáveis.

O aparelho de ar-condicionado foi uma das criações da tecnologia para tornar ambientes quentes e abafados em locais agradáveis para as pessoas. Não esquecer que esse mesmo aparelho pode também aquecer ambientes muito frios. Ele pode ter somente a função "frio", indicada para locais quentes (de invernos amenos) e também a função "quente" para locais onde o inverno é muito rigoroso. O conhecimento do funcionamento da convecção nos ajuda a entender o local em que tal aparelho deve ser instalado.

Maksud/Glow Images

O aparelho da foto é um ar-condiconado modelo "Split", muito utilizado nas residências. Ele pode ter apenas a função "frio" ou as funções "frio" e "quente".

Em ambientes muito abafados, como o galpão de uma indústria, é preciso fazer o ar circular utilizando-se exaustores que retiram o ar quente do interior e provocam a entrada de ar externo mais frio. Algumas pessoas, utilizando a tecnologia e seus conhecimentos, podem produzir sistemas eficientes, capazes de tornar confortáveis tais locais. Os exaustores eólicos podem, com baixo custo, realizar essa função.

Thinkstock/Getty Images

Na fotografia, podemos observar um exaustor eólico utilizado na renovação do ar de grandes ambientes.

Uma das riquezas da natureza é a grande quantidade de energia que a Terra recebe do Sol. Essa energia pode e deve ser utilizada para melhor conforto das pessoas.

O Brasil recebe, em média, $1\,800\ kWh/m^2 \cdot ano$ de energia proveniente do Sol. Para se ter uma ideia, a radiação que incide em um ano na área do Distrito Federal, onde se encontra a cidade de Brasília, equivale a mais de 160 usinas de Itaipu. A utilização de uma parte dessa energia poderia representar uma grande economia para cada um de nós e para o país, que não precisaria construir novas usinas hidrelétricas, termoelétricas ou nucleares.

A utilização de coletores solares para uso doméstico no aquecimento de água pode representar uma economia de 30% a 40% na conta de energia elétrica das residências. Cada metro quadrado de coletor solar em uso representa 56 $m^2$ a menos de área inundada em usinas hidrelétricas e a economia de 55 kg/ano de gás ou 215 kg/ano de lenha que deixaria de ser queimada.

Hoje, 68% das residências brasileiras têm chuveiro elétrico (são 18 milhões de aparelhos) e poucas possuem aquecedor solar. Nos países de primeiro mundo, 80% dos lares possuem aquecimento solar, para aquecer a água utilizada nos banhos e para calefação (aquecimento dos cômodos), sendo também empregadas células fotovoltaicas, que transformam energia solar em energia elétrica.

Thinkstock/Getty Images

As placas coletoras são, geralmente, colocadas no telhado das residências.

O aquecedor solar é um sistema simples que utiliza a radiação, a condução e a convecção térmica para aquecimento da água. Esse dispositivo é constituído de duas partes: o coletor solar (placas) e o reservatório térmico (onde a água aquecida é armazenada).

## Leitura

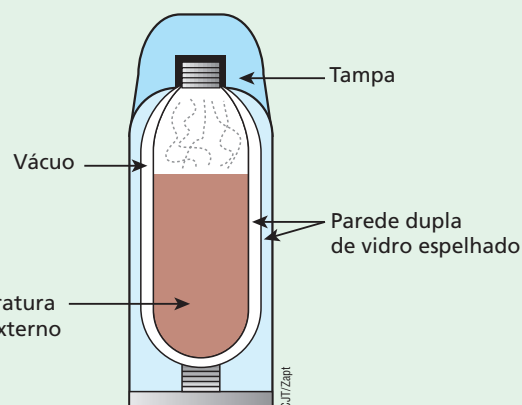
### O vaso de Dewar

Ao contrário do que muita gente pensa, a garrafa térmica não foi inventada para manter o café quente. Foi o físico britânico James Dewar (1842-1923) que, no final do século XIX, a pedido de colegas, inventou um recipiente que pudesse conservar soluções biológicas a temperaturas estáveis. Dewar havia lido trabalhos do físico italiano Evangelista Torricelli, que no século XVII tinha comprovado ser o vácuo um bom isolante térmico. O grande problema de Dewar era como manter o vácuo. Para tanto, ele construiu uma garrafa de vidro com paredes duplas. O ar existente entre essas paredes foi retirado, e a garrafa, lacrada. Para evitar que a luz atingisse a solução biológica e provocasse alguma alteração, Dewar espelhou as paredes da garrafa. Com isso, evitava que as ondas de calor entrassem ou saíssem dela.

Cristina Xavier

James Dewar era um daqueles cientistas que achavam que suas descobertas deviam ser usadas por todos, por isso não patenteou essa invenção, considerando-a um presente à Ciência. Somente no início do século XX, o alemão Reinhold Burger, fabricante de vidros, aperfeiçoou o invento de Dewar, diminuindo o seu tamanho e lançando-o no mercado. Foi um sucesso de vendas, que tornou Burger muito rico.

### Detalhes funcionais de uma garrafa térmica

A garrafa térmica é um dispositivo cuja finalidade principal é manter constante, por um maior intervalo de tempo, a temperatura de seu conteúdo. Para tanto, as paredes desse sistema são praticamente **adiabáticas**, isto é, reduzem consideravelmente as trocas de calor entre o seu conteúdo e o meio externo.

Com a finalidade de isolar termicamente o conteúdo de uma garrafa térmica do meio ambiente, adotam-se os seguintes procedimentos:

- as paredes internas são feitas de vidro, que, por ser mau condutor, atenua as trocas de calor por condução;
- as paredes internas são duplas, separadas por uma região de vácuo, cuja função é tentar evitar a condução do calor que passa pelas paredes de vidro;
- o vidro de que são feitas as paredes internas da garrafa é espelhado, para que o calor radiante seja refletido, atenuando assim as trocas por radiação.

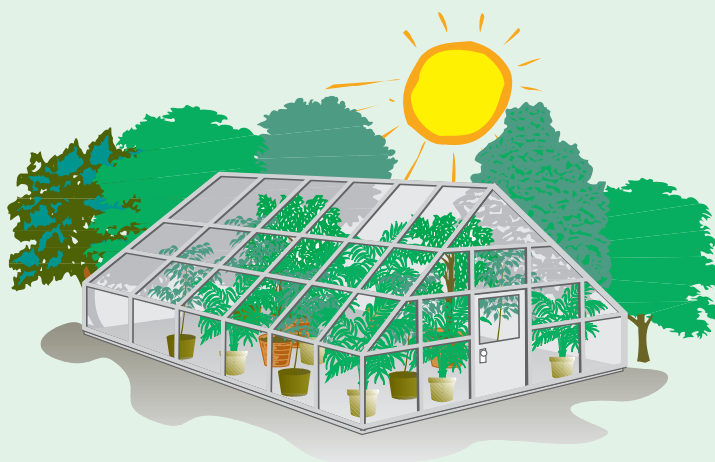
Para evitar as possíveis trocas de calor por convecção, basta fechar a garrafa, pois dessa forma as massas fluidas internas não conseguem sair do sistema.

É evidente que não existe o isolamento térmico perfeito; assim, apesar dos cuidados citados, após um tempo relativamente grande (várias horas), o conteúdo da garrafa térmica acaba atingindo o equilíbrio térmico com o meio ambiente.

## Estufas

Estufas são recintos fechados com paredes e teto de vidro, utilizadas, principalmente em países de inverno rigoroso, para o cultivo de verduras, legumes e mesmo flores.

O vidro é transparente à luz visível e parcialmente opaco às **ondas de calor** (infravermelho).

As radiações **infravermelhas** na realidade se constituem de uma gama de ondas de diversas frequências; aquelas que possuem menor frequência (portanto, maior comprimento de onda) não conseguem passar pelo vidro, mas as de maior frequência (portanto, menor comprimento de onda), as mais próximas das radiações correspondentes à cor vermelha, conseguem passar juntamente com a luz visível e outras radiações. Uma parcela dessa energia é absorvida pelas plantas que estão no interior da estufa. Essas plantas se aquecem e emitem parte da energia absorvida em forma de infravermelho, só que agora com comprimentos de onda maiores, que não consegue passar pelo vidro e fica retida no interior da estufa. Desse modo, a temperatura permanece relativamente estável, mesmo que esteja nevando na parte externa.

## O efeito estufa na atmosfera terrestre

A atmosfera terrestre é formada principalmente por nitrogênio (78%), oxigênio (20,9%) e argônio (0,9%), aparecendo ainda em quantidades bem pequenas o neônio, o hélio, o hidrogênio e outros gases. A essa composição, devemos acrescentar os chamados “gases-estufa”, que dificultam a dispersão dos raios solares que incidem na Terra. São eles o dióxido de carbono ($CO_2$), o metano ($CH_4$), o óxido nitroso ($N_2O$) e os compostos de clorofluorcarbono (CFC) provenientes da queima de carvão, petróleo (na forma de seus derivados), florestas e pastagens e da decomposição da madeira e

A visão maravilhosa de um céu azul é possível devido ao nitrogênio que faz parte da atmosfera terrestre.

de materiais orgânicos (como dejetos humanos e de outros animais). Além desses gases, o vapor de água na atmosfera também contribui para o efeito estufa.

A forma de retenção do calor na atmosfera é semelhante à de uma estufa de paredes e teto de vidro: permite que a energia radiante penetre, mas dificulta a dissipação das radiações emitidas pelas superfícies aquecidas da Terra. Um grupo de cientistas americanos calculou em 1 W/m$^2$ a diferença entre a energia que a Terra absorve de radiação solar e a energia que ela emite de volta para o espaço. Essa energia retida é importante para que haja vida animal e vegetal na Terra, porém o crescimento da população humana, o desmatamento de florestas (que absorvem parte do $CO_2$) e o ritmo acelerado da industrialização estão provocando um desequilíbrio, com aquecimentos acima do normal. Geleiras estão derretendo; correntes marinhas de água quente (no Oceano Atlântico) estão mais aquecidas que o normal, provocando mais furacões que a média do último século; chuvas intensas inundam locais antes secos e estiagens ocorrem em locais antes castigados por intensas chuvas. Segundo o Painel Internacional sobre Mudanças Climáticas, a temperatura global aumentou 0,6 °C no século XX e pode elevar-se mais 1 °C até 2030, sendo projetado um aumento de 4 °C até 2090, caso medidas de prevenção não sejam tomadas.

Mauricio Simonetti/Pulsar Imagens

A industrialização produz gases como o dióxido de carbono, o metano e os compostos de clorofluorcarbono, que poluem e funcionam como "gases-estufa".

## Exercícios

nível 1

**17.** Em cada uma das situações descritas a seguir você deve reconhecer o processo de transmissão de calor envolvido: condução, convecção ou radiação.

I. As prateleiras de uma geladeira doméstica são grades vazadas para facilitar a ida da energia térmica até o congelador por (...).
II. O único processo de transmissão de calor que pode ocorrer no vácuo é a (...).
III. Numa garrafa térmica, é mantido vácuo entre as paredes duplas de vidro para evitar que o calor saia ou entre por (...).

Na ordem, os processos de transmissão de calor que você usou para preencher as lacunas são:

a) condução, convecção e radiação;
b) radiação, condução e convecção;
c) condução, radiação e convecção;
d) convecção, condução e radiação;
e) convecção, radiação e condução.

**18.** Usando os seus conhecimentos de transmissão de calor, analise as proposições e indique a que você acha correta.

a) A condução térmica é a propagação do calor de uma região para outra com deslocamento do material aquecido.
b) A convecção térmica é a propagação de calor que pode ocorrer em qualquer meio, inclusive no vácuo.
c) A radiação térmica é a propagação de energia por meio de ondas eletromagnéticas e ocorre exclusivamente nos fluidos.
d) A transmissão do calor, qualquer que seja o processo, sempre ocorre, naturalmente, de um ambiente de maior temperatura para outro de menor temperatura.
e) As correntes ascendentes e descendentes na convecção térmica de um fluido são motivadas pela igualdade de suas densidades.

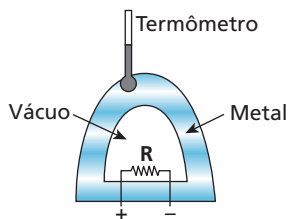
**19.** (UFRN) Matilde é uma estudante de Arquitetura que vai fazer o seu primeiro projeto: um prédio a ser construído em Natal (RN). Ela precisa prever a localização de um aparelho de ar-condicionado para uma sala e, por ter estudado pouco Termodinâmica, está em dúvida se deve colocar o aparelho próximo do teto ou do piso. Ajude Matilde, dando-lhe uma sugestão sobre a escolha que ela deve fazer nesse caso. (Justifique a sua sugestão.)

**20.** Na praia, você já deve ter notado que, durante o dia, a areia esquenta mais rápido que a água do mar e, durante a noite, a areia esfria mais rápido que a água do mar. Isso ocorre porque o calor específico da água é maior que o da areia (a água precisa receber mais calor, por unidade de massa, para sofrer o mesmo aquecimento da areia). Esse fato explica a existência da brisa:

a) do mar para a praia, à noite;
b) da praia para o mar, durante o dia;
c) do mar para a praia, durante o dia;
d) sempre do mar para a praia;
e) sempre da praia para o mar.

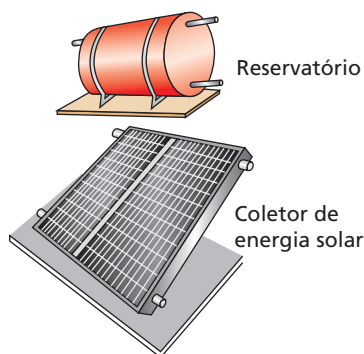
## Exercícios

nível 2

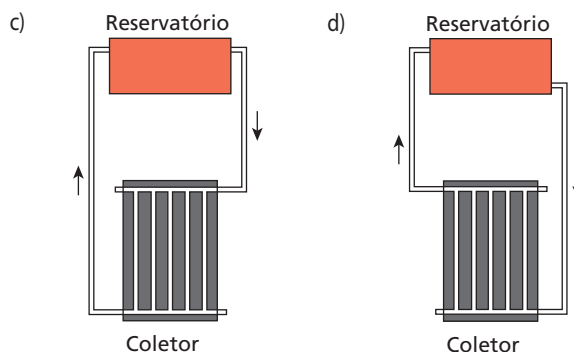
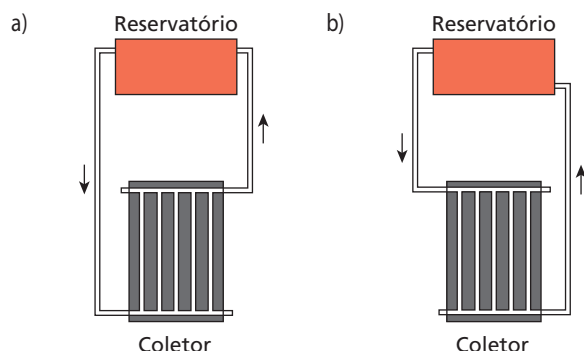
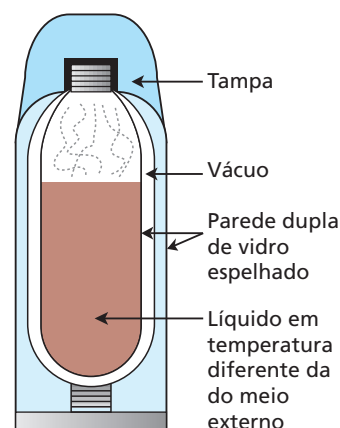
**21.** (UFV-MG) Um resistor **R** é colocado dentro de um recipiente de parede metálica – no qual é feito vácuo – que possui um termômetro incrustado em sua parede externa. Para ligar o resistor a uma fonte externa ao recipiente, foi utilizado um fio, com isolamento térmico, que impede a transferência de calor para as paredes do recipiente. Essa situação encontra-se ilustrada na figura acima.

Ligando o resistor, nota-se que a temperatura indicada pelo termômetro aumenta, mostrando que há transferência de calor entre o resistor e o termômetro. Pode-se afirmar que os processos responsáveis por essa transferência de calor, na ordem correta, são:

a) primeiro convecção e depois radiação.
b) primeiro convecção e depois condução.
c) primeiro radiação e depois convecção.
d) primeiro radiação e depois condução.
e) primeiro condução e depois convecção.

**22.** (UFMG) Atualmente, a energia solar está sendo muito utilizada em sistemas de aquecimento de água.

Nesses sistemas, a água circula entre um reservatório e um coletor de energia solar. Para o perfeito funcionamento desses sistemas, o reservatório deve estar em um nível superior ao do coletor, como mostrado nesta figura:

No coletor, a água circula através de dois canos horizontais ligados por vários canos verticais. A água fria sai do reservatório, entra no coletor, onde é aquecida, e retorna ao reservatório por convecção.

Nas quatro alternativas, estão representadas algumas formas de se conectar o reservatório ao coletor. As setas indicam o sentido de circulação da água.

Indique a alternativa em que estão **corretamente** representados o sentido da circulação da água e a forma mais eficiente para se aquecer toda a água do reservatório.

**23.** Ao contrário do que se pensa, a garrafa térmica não foi criada originalmente para manter o café quente. Esse recipiente foi inventado pelo físico e químico britânico James Dewar (1842–1923) para conservar substâncias biológicas em bom estado, mantendo-as a temperaturas estáveis. Usando a observação do físico italiano Evangelista Torricelli (1608–1647), que descobriu ser o vácuo um bom isolante térmico, Dewar criou uma garrafa de paredes duplas de vidro que, ao ser lacrada, mantinha vácuo entre elas. Para retardar ainda mais a alteração de temperatura no interior da garrafa, ele espelhou as paredes, tanto nas faces externas como nas faces internas. Dewar nunca patenteou sua invenção, que considerava um presente à Ciência. Coube ao alemão Reinhold Burger, um fabricante de vidros, diminuir o seu tamanho, lançando-a no mercado em 1903.

A respeito do texto acima, indique a alternativa correta.

a) Na garrafa térmica, o vácuo existente entre as paredes duplas de vidro tem a finalidade de evitar trocas de calor por **convecção**.
b) As paredes espelhadas devem evitar que as ondas de calor saiam ou entrem por **condução**.
c) Apesar de o texto não se referir ao fato de que a garrafa deve permanecer bem fechada, isso deve ocorrer para evitar perdas de calor por **convecção**.
d) O vácuo existente no interior das paredes duplas de vidro vai evitar perdas de calor por **radiação**.
e) As paredes espelhadas não têm função nas trocas de calor; foram apenas uma tentativa de tornar o produto mais agradável às pessoas que pretendessem comprá-lo.

**24.** Analisando uma geladeira doméstica convencional, podemos afirmar:

I. O congelador fica na parte superior para favorecer a condução do calor que sai dos alimentos e vai até ele.
II. As prateleiras são grades vazadas (e não chapas inteiriças), para permitir a livre convecção das massas de ar quentes e frias no interior da geladeira.
III. A energia térmica que sai dos alimentos chega até o congelador, principalmente, por radiação.
IV. As paredes das geladeiras normalmente são intercaladas com material isolante, com o objetivo de evitar a entrada de calor por condução.

Quais são as afirmativas corretas?
a) Apenas a afirmativa I.
b) Apenas as afirmativas I, II e III.
c) Apenas as afirmativas I e III.
d) Apenas as afirmativas II e IV.
e) Todas as afirmativas.

**25.** (Enem) A refrigeração e o congelamento de alimentos são responsáveis por uma parte significativa do consumo de energia elétrica numa residência típica.
Para diminuir as perdas térmicas de uma geladeira, podem ser tomados alguns cuidados operacionais:

I. Distribuir os alimentos nas prateleiras deixando espaços vazios entre eles, para que ocorra a circulação do ar frio para baixo e do ar quente para cima.
II. Manter as paredes do congelador com camada bem espessa de gelo, para que o aumento da massa de gelo aumente a troca de calor no congelador.
III. Limpar o radiador (“grade” na parte de trás) periodicamente, para que a gordura e a poeira que nele se depositam não reduzam a transferência de calor para o ambiente.

Para uma geladeira tradicional, é correto indicar, apenas,
a) a operação I.
b) a operação II.
c) as operações I e II.
d) as operações I e III.
e) as operações II e III.

**26.** A comunidade científica há tempos anda preocupada com o aumento da temperatura média da atmosfera terrestre. Os cientistas atribuem esse fenômeno ao chamado efeito estufa, que consiste na “retenção” da energia térmica junto ao nosso planeta, como ocorre nas estufas de vidro, que são usadas em locais onde em certas épocas do ano a temperatura atinge valores muito baixos. A explicação para esse acontecimento é que a atmosfera (com seus gases naturais mais os gases poluentes emitidos por automóveis, indústrias, queimadas, vulcões etc.) é pouco transparente aos raios solares na faixa:
a) das ondas de rádio;
b) das ondas ultravioleta;
c) das ondas infravermelhas;
d) das ondas correspondentes aos raios gama;
e) das ondas correspondentes aos raios X.

**27.** (UFRN) O efeito estufa, processo natural de aquecimento da atmosfera, é essencial para a existência de vida na Terra. Em tal processo, uma parcela de radiação solar refletida e da radiação térmica emitida pela superfície terrestre interage com determinados gases presentes na atmosfera, aquecendo-a.
O principal mecanismo físico responsável pelo aquecimento da atmosfera devido à ação do efeito estufa resulta da
a) absorção, por certos gases da atmosfera, de parte da radiação ultravioleta recebida pela Terra.
b) reflexão, por certos gases da atmosfera, da radiação visível emitida pela Terra.
c) absorção, por certos gases da atmosfera, de parte da radiação infravermelha proveniente da superfície da Terra.
d) reflexão, por certos gases da atmosfera, de parte da radiação de micro-ondas recebida pela Terra.
e) refração das radiações infravermelhas e ultravioletas na atmosfera terrestre.

**28.** (Enem) As cidades industrializadas produzem grandes proporções de gases como o $CO_2$, o principal gás causador do efeito estufa. Isso ocorre por causa da quantidade de combustíveis fósseis queimados, principalmente no transporte, mas também em caldeiras industriais. Além disso, nessas cidades concentram-se as maiores áreas com solos asfaltados e concretados, o que aumenta a retenção de calor, formando o que se conhece por “ilhas de calor”. Tal fenômeno ocorre porque esses materiais absorvem o calor e o devolvem para o ar sob a forma de radiação térmica. Em áreas urbanas, devido à atuação conjunta do efeito estufa e das “ilhas de calor”, espera-se que o consumo de energia elétrica
a) diminua devido à utilização de caldeiras por indústrias metalúrgicas.
b) aumente devido ao bloqueio da luz do sol pelos gases do efeito estufa.
c) diminua devido à não necessidade de aquecer a água utilizada em indústrias.
d) aumente devido à necessidade de maior refrigeração de indústrias e residências.
e) diminua devido à grande quantidade de radiação térmica reutilizada.

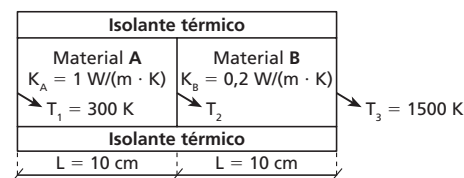
## Descubra mais

**1.** Pesquise e cite (com a devida explicação) um fator positivo e outro negativo do efeito estufa na atmosfera da Terra.
**2.** Em 10 de dezembro de 1997, vários países assinaram, no Japão, um acordo que foi denominado “Protocolo de Kyoto”. Qual a relação do efeito estufa na nossa atmosfera com esse acordo?

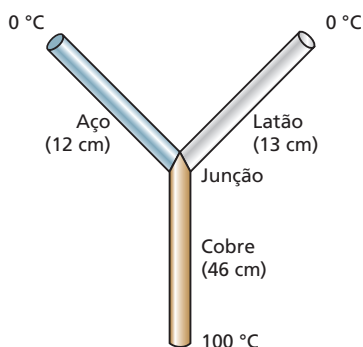
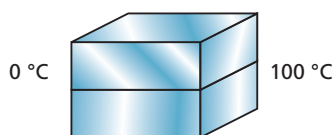
## Exercícios

nível 3

**29.** (Uepa) A área total das paredes externas de uma geladeira é 4,0 m$^2$ e a diferença de temperatura entre o exterior e o interior da geladeira é 25 °C. Se a geladeira tem um revestimento de poliestireno com 25 mm de espessura, determine a quantidade de calor que flui através das paredes da geladeira durante 1,0 h, em watt-hora. A condutividade térmica do revestimento de poliestireno é 0,01 W/(m °C).

**30.** (IME-RJ) A figura composta por dois materiais sólidos diferentes **A** e **B**, apresenta um processo de condução de calor, cujas temperaturas não variam com o tempo. É correto afirmar que a temperatura $T_2$ da interface desses materiais, em kelvins, é:

Observações:
• $T_1$: Temperatura da interface do material **A** com o meio externo.
• $T_3$: Temperatura da interface do material **B** com o meio externo.
• $K_A$: Coeficiente de condutividade térmica do material **A**.
• $K_B$: Coeficiente de condutividade térmica do material **B**.

a) 400 b) 500 c) 600 d) 700 e) 800

**31.** (Mack-SP) Tem-se três cilindros de secções transversais iguais de cobre, latão e aço, cujos comprimentos são, respectivamente, 46 cm, 13 cm e 12 cm. Soldam-se os cilindros, formando o perfil em **Y**, indicado na figura. O extremo livre do cilindro de cobre é mantido a 100 °C e dos cilindros de latão e aço, a 0 °C. Supor que a superfície lateral dos cilindros esteja isolada termicamente. As condutividades térmicas do cobre, latão e aço valem, respectivamente, 0,92, 0,26 e 0,12, expressas em cal $cm^{-1}$ $s^{-1}$ $°C^{-1}$. No regime estacionário de condução, qual a temperatura na junção?

**32.** (Mack-SP) A figura I mostra uma barra metálica de secção transversal quadrada. Suponha que 10 cal fluam em regime estacionário através da barra, de um extremo para outro, em 2 minutos. Em seguida, a barra é cortada ao meio no sentido transversal e os dois pedaços são soldados como representa a figura II. O tempo necessário para que 10 cal fluam entre os extremos da barra assim formada é:

a) 4 minutos.
b) 3 minutos.
c) 2 minutos.
d) 1 minuto.
e) 0,5 minuto.

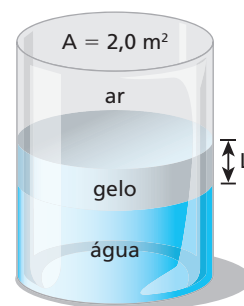
**33.** (Unicamp-SP) Nas regiões mais frias do planeta, camadas de gelo podem se formar rapidamente sobre um volume de água a céu aberto. A figura a seguir mostra um tanque cilíndrico de água cuja área da base é $A = 2{,}0\ m^2$, havendo uma camada de gelo de espessura **L** na superfície da água. O ar em contato com o gelo está a uma temperatura $T_{ar} = -10\ °C$, enquanto a temperatura da água em contato com o gelo é $T_{ag} = 0{,}0\ °C$.
O calor é conduzido da água ao ar através do gelo. O fluxo de calor $\phi_{cal}$, definido como a quantidade de calor conduzido por unidade de tempo, é dado por $\phi_{cal} = kA\,\dfrac{T_{ag} - T_{ar}}{L}$, em que $k = 4{,}0 \times 10^{-3}$ cal/(s cm °C) é a condutividade térmica do gelo. Qual é o fluxo de calor $\phi_{cal}$ quando $L = 5{,}0$ cm?

**34.** (UFPA) Para obter água aquecida, um estudante montou o seguinte sistema, esquematizado na figura I, a seguir: no coletor solar, feito de uma cuba de vidro, com fundo metálico preto-fosco, a água é aquecida pela radiação e, através de um ciclo convectivo usando as mangueiras 1 e 2, é armazenada no reservatório térmico.
O estudante realizou dois experimentos: primeiro o coletor foi exposto à ação do sol e depois, nas mesmas condições, apenas à luz de uma lâmpada de 200 W. Os resultados da variação de temperatura do reservatório em função do tempo, nos dois experimentos, estão representados no gráfico da figura II a seguir.

**Figura I**

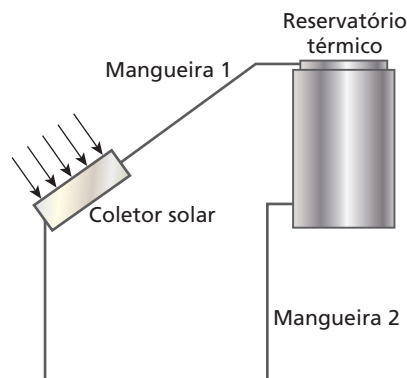
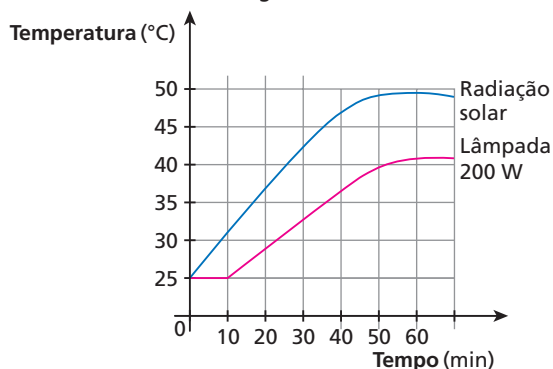



**Figura II**

Com base na interpretação das figuras I e II, é correto afirmar:
a) Ao se usar a lâmpada, observa-se que o processo de aquecimento da água foi mais eficiente do que com o uso da radiação solar.
b) No intervalo de 10 min a 40 min, observa-se que a radiação solar aqueceu a água a uma taxa 1,5 vez maior do que a lâmpada.
c) O aquecimento da água com o uso da lâmpada é menos eficiente; no entanto, nesse caso, a resposta ao aquecimento é mais rápida.
d) Acima de 40 °C, o aquecimento com a radiação solar torna-se mais rápido.
e) O fundo preto-fosco não serve somente para absorver a radiação incidente, mas, principalmente, para produzir efeito estufa dentro do coletor solar.

**35.** (Uepa) O efeito estufa é um fenômeno natural, característico de planetas onde existe atmosfera. Ele acontece na atmosfera da Terra e também na de Vênus, onde o efeito é muito acentuado e a temperatura alcança valores de cerca de 460 °C. Embora importante para a manutenção da vida no planeta, hoje é uma preocupação para muitos ambientalistas e cientistas. Com base em seus conhecimentos sobre o efeito estufa, analise as seguintes afirmativas:

I. Existem materiais, como o vidro, que permitem a passagem de luz, mas dificultam a passagem de radiação térmica. Numa estufa com cobertura de vidro, por exemplo, parte da luz que entra é absorvida pelas plantas. Estas, sendo aquecidas, emitem radiação infravermelha, que tem dificuldade para atravessar o vidro e aquece o interior da estufa. Esse efeito é semelhante ao que acontece na atmosfera da Terra, daí o nome "efeito estufa".

II. O efeito estufa é importante porque retém o calor na Terra, possibilitando a vida de animais e vegetais. Sua intensificação é que é danosa, ocasionando o aumento da temperatura do planeta. Como consequência disso, dentre outras ocorrências, parte da ilha do Marajó poderá ser inundada e os furacões no Caribe poderão ser mais frequentes e devastadores.

III. No efeito estufa, a radiação solar atravessa a atmosfera, parte é absorvida pela Terra e parte é refletida. Uma parcela da radiação absorvida é reemitida na forma de raios ultravioleta (ondas de calor), que têm pequeno comprimento de onda e dos quais uma pequena parte é absorvida, principalmente pelo gás carbônico, vapor de água e metano, nas altas camadas atmosféricas, criando um manto quente na superfície da Terra.

IV. Na Lua, não há ocorrência de efeito estufa em virtude de não existir atmosfera. Isso é uma das causas de as temperaturas no nosso satélite variarem entre −150 °C durante a noite e 100 °C durante o dia.

Estão corretas somente as afirmativas:

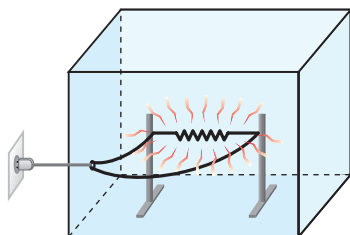
a) I, II e IV.
b) I, II e III.
c) I, III e IV.
d) I e II.
e) II e IV.

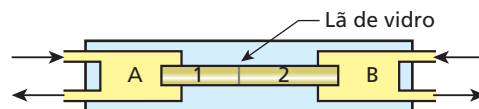
## Para raciocinar um pouco mais

**36.** (IJSO) A taxa de condução de calor é proporcional à área de secção e ao gradiente de temperatura (diferença de temperatura por unidade de comprimento). Em um dia típico durante a Copa do Mundo da África do Sul, o ar dentro de uma sala é aquecido a uma temperatura de 25 °C, enquanto externamente está a −2 °C. Uma janela dessa sala tem área de 2 $m^2$, e é feita de um vidro com uma espessura de 2 mm e constante de condutividade térmica de 1,0 $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$. Qual a potência de calor perdida através da janela?

a) 1,2 kW
b) 2,7 kW
c) 27 kW
d) 50 kW

**37.** Uma forma experimental para medir a condutividade térmica de um material usado como isolante é construir uma caixa com esse material. No seu interior, é colocado um aquecedor elétrico de potência conhecida que mantém a temperatura interna superior à externa.

Suponha que foi construída uma caixa com determinado material isolante. A área total externa tem 4,0 $m^2$ e a espessura das paredes é de 5,0 mm. O aquecedor elétrico desenvolve uma potência constante de 300 W, mantendo a temperatura interna da caixa 50 °C acima da temperatura externa. Desprezando possíveis efeitos de bordas, determine o coeficiente de condutividade térmica do material em questão.

Se essa caixa fosse cúbica, qual seria o fluxo de calor através de uma de suas faces?

**38.** O esquema a seguir representa o aparelho de Searle, no qual se notam duas câmaras, **A** e **B**, por onde circulam fluidos a temperaturas constantes e respectivamente iguais a 100 °C e 0 °C. Duas barras metálicas, 1 e 2, de mesma secção transversal, são associadas como se indica; as extremidades da associação adentram as câmaras **A** e **B**. Os comprimentos das barras 1 e 2 valem, respectivamente, 10 cm e 16 cm e os coeficientes de condutibilidade térmica, na mesma ordem, são 1,0 cal/s cm °C e 0,4 cal/s cm °C.

a) Estabelecido o regime permanente de condução, qual é a temperatura na junção da associação das barras?

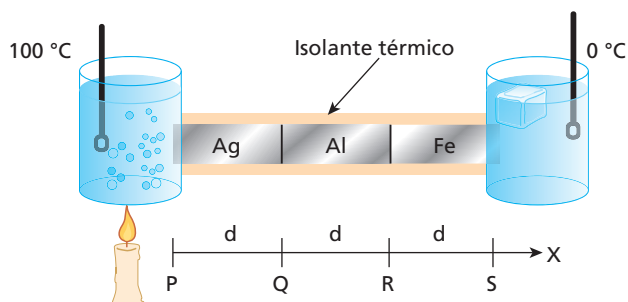
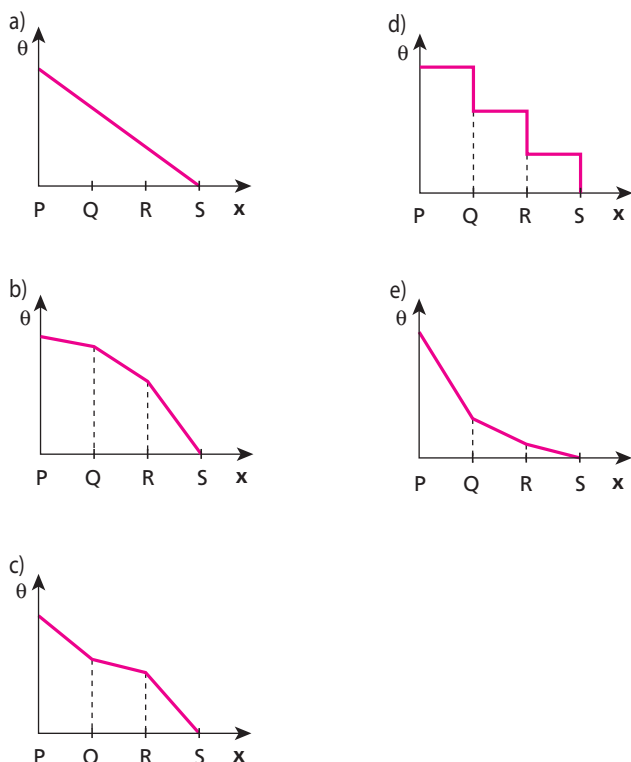
b) Construa o gráfico da temperatura ao longo das barras. Considere a origem do gráfico na extremidade esquerda da barra 1.

**39.** Numa sauna, para separar a sala de banho do escritório, usou-se uma parede de tijolos com 12 cm de espessura. A parede foi revestida do lado mais quente com uma camada de madeira com 6 cm de espessura e, do lado mais frio, com uma camada de cortiça com 3 cm de espessura. A temperatura da sauna é mantida a 70 °C, enquanto a do ambiente do escritório, a 20 °C. Determine as temperaturas nos pontos de separação madeira/tijolo e tijolo/cortiça, após ser estabelecido o regime permanente.

**Dados:** $k_{madeira} = 2 \cdot 10^{-4}$ cal/s cm °C;

$k_{tijolo} = 15 \cdot 10^{-4}$ cal/s cm °C;

$k_{cortiça} = 1 \cdot 10^{-4}$ cal/s cm °C.

**40.** Três barras, de prata, alumínio e ferro, geometricamente iguais, estão soldadas e envolvidas por um isolante térmico, permitindo um fluxo de calor entre os recipientes mantidos sob temperatura constante.

Sabe-se que as barras metálicas foram colocadas, da esquerda para a direita, na ordem decrescente das condutividades térmicas, isto é, a prata é melhor condutora de calor do que o alumínio, que por sua vez é melhor condutor do que o ferro.
O diagrama que melhor representa a variação da temperatura ($\theta$) em função da posição ($x$) é:

a)
d)
b)
e)
c)
**41.** Um vestibulando estava na cozinha de sua casa quando resolveu realizar uma experiência de trocas de calor que seu professor de Física havia proposto. Para tanto, utilizou um caldeirão, uma garrafa de vidro, água e sal. Colocou água no caldeirão e no interior da garrafa de vidro. O caldeirão foi colocado sobre a chama do fogão e a garrafa, que estava aberta, teve seu gargalo preso a um barbante, que, esticado, a mantinha afastada do fundo do caldeirão, porém mergulhada na água.
Após alguns minutos, ele observou que a água do caldeirão entrou em ebulição (a 100 °C), mas a água do interior da garrafa (que também estava a 100 °C) não fervia. Esperou mais alguns minutos e colocou um punhado de sal na água do caldeirão; pouco tempo depois, notou que a água no interior da garrafa entrava em ebulição.

a) Por que, mesmo estando a 100 °C, a água da garrafa não fervia?
b) O que ocorre com a temperatura de ebulição da água quando acrescentamos sal?
c) Por que, depois de ser acrescentado sal à água do caldeirão, a água do interior da garrafa também entrou em ebulição?

**42.** Uma massa **m** de água e um bloco metálico de massa **M** são aquecidos em um laboratório durante um intervalo de tempo $\Delta t$, ambos sofrendo a mesma variação de temperatura $\Delta\theta$. Usando-se a mesma fonte térmica, com a mesma potência, dentro de um elevador em queda livre, a mesma água precisou de um intervalo de tempo $\Delta t_A$ e o mesmo bloco metálico precisou de um intervalo de tempo $\Delta t_B$ para sofrerem a mesma variação de temperatura $\Delta\theta$. Se as demais condições não se alterarem, é verdade que:

a) $\Delta t = \Delta t_B < \Delta t_A$.
b) $\Delta t < \Delta t_A = \Delta t_B$.
c) $\Delta t > \Delta t_A = \Delta t_B$.
d) $\Delta t = \Delta t_A = \Delta t_B$.
e) $\Delta t < \Delta t_A < \Delta t_B$.

**43.** (Enem) A padronização insuficiente e a ausência de controle na fabricação podem também resultar em perdas significativas de energia através das paredes da geladeira. Essas perdas, em função da espessura das paredes, para geladeiras e condições de uso típicas, são apresentadas na tabela.

| Espessura das paredes (cm) | Perda térmica mensal (kWh) |
|---|---|
| 2 | 65 |
| 4 | 35 |
| 6 | 25 |
| 10 | 15 |

Considerando uma família típica, com consumo médio mensal de 200 kWh, a perda térmica pelas paredes de uma geladeira com 4 cm de espessura, relativamente a outra de 10 cm, corresponde a uma porcentagem do consumo total de eletricidade da ordem de:

a) 30%.
b) 20%.
c) 10%.
d) 5%.
e) 1%.

**44.** (IJSO) A radiação solar chega até a atmosfera terrestre a uma taxa de 1 353 $W \cdot m^{-2}$, sendo que 36% da radiação é refletida de volta para o espaço e outros 18% é absorvido pela atmosfera. A potência de radiação de um corpo é dada por $\sigma T^4$, onde $\sigma$ é a constante de Stefan-Boltzmann e T é a temperatura na escala absoluta. Qual a máxima temperatura que um corpo negro na superfície da Terra pode atingir? ($\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$).

a) 120 °C.
b) 63,9 °C.
c) 50,7 °C.
d) 31,4 °C.

# Tópico 3

# Calor sensível e calor latente

## Bloco 1

### 1. Introdução

Werner, Michael/StockFood/Latinstock

A energia térmica fornecida pela chama do fogão foi utilizada inicialmente para aquecer a água e a chaleira. Quando ocorre a ebulição, observamos vapor de água saindo pelo bico da chaleira. Esse vapor é parte da água que passou para o estado gasoso.

Quando um corpo recebe ou cede certa quantidade de energia térmica, podemos observar, como consequência, uma variação de sua temperatura ou uma mudança em seu estado físico.

A variação de temperatura corresponde a uma variação no estado de agitação das partículas do corpo. Nesse caso, a energia térmica transferida é denominada **calor sensível**. A mudança de estado físico corresponde a uma alteração no estado de agregação das partículas do corpo, fazendo com que um sólido, por exemplo, transforme-se em líquido. A energia térmica responsável pelas mudanças de estado denomina-se **calor latente**.

Quando ocorre uma mudança de estado físico, nas partículas de um corpo, a energia térmica armazenada na forma de energia potencial de agregação aumenta (ou diminui). Assim, o **calor latente** é a denominação que damos à energia térmica quando ela, ao ser recebida, se transforma em energia potencial de agregação e, ao ser cedida, veio da energia potencial de agregação das partículas, provocando uma mudança de estado físico no corpo.

### 2. Capacidade térmica (C) e calor específico (c)

Se tomarmos um corpo de massa **m** e temperatura inicial $\theta_1$ e fornecermos a ele uma quantidade de calor **Q**, sua temperatura passa a ser $\theta_2$, sofrendo uma variação correspondente a $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Define-se **capacidade térmica** (**C**) ou **capacidade calorífica** desse corpo como sendo:

$$C = \frac{Q}{\Delta\theta} \quad \text{Unidade usual: } \frac{\text{cal}}{°\text{C}}$$

A **capacidade térmica** (**C**) de um corpo indica a quantidade de calor que ele precisa receber ou ceder para que sua temperatura varie uma unidade.

Suponha, por exemplo, que um corpo precise receber 100 calorias de energia térmica para que sua temperatura aumente em 5,0 °C. Dividindo esses dados, vamos encontrar para a **capacidade térmica** desse corpo o valor 20 cal/°C. Isso significa que, para variar 1 °C, ele precisa receber (ou ceder) 20 calorias. A capacidade térmica por unidade de massa do corpo é denominada **calor específico** (**c**), dada usualmente pela unidade $\frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$.

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\Delta\theta}$$

O **calor específico** (**c**) indica a quantidade de calor que cada unidade de massa do corpo precisa receber ou ceder para que sua temperatura varie uma unidade.

Supondo-se que o corpo do exemplo anterior (cuja capacidade térmica é 20 cal/°C) tivesse 100 g de massa, seu calor específico seria 0,20 cal/g °C. Para esse cálculo, dividimos sua capacidade térmica pela respectiva massa.

Note que o calor específico não depende da massa do corpo, pois é uma característica da substância e não do corpo. Nem a capacidade térmica nem o calor específico sensível de uma substância têm valores constantes com a temperatura. No entanto, para efeito de cálculo, costuma-se usar o valor médio de cada um no intervalo de temperatura considerado.

A água é a substância que mais aparece nos exercícios, sendo usado o valor 1,0 cal/g °C para seu calor específico. Isso significa que cada grama de água necessita de 1,0 caloria para sofrer uma variação de temperatura de um grau Celsius.

A tabela a seguir apresenta o calor específico de algumas substâncias.

| Substâncias | Calor específico em cal/g °C |
|---|---|
| Alumínio | 0,219 |
| Água | 1,000 |
| Álcool | 0,590 |
| Bronze (liga metálica) | 0,090 |
| Cobre | 0,093 |
| Chumbo | 0,031 |
| Estanho | 0,055 |
| Ferro | 0,119 |
| Gelo | 0,550 |
| Mercúrio | 0,033 |
| Ouro | 0,031 |
| Platina | 0,032 |
| Prata | 0,056 |
| Vapor de água | 0,480 |
| Vidro | 0,118 |
| Zinco | 0,093 |

## 3. O calor sensível e o seu cálculo

**Calor sensível** é o calor que, recebido ou cedido por um corpo, provoca nele uma variação de temperatura.

Para calcular a quantidade de calor sensível que um corpo recebe (ou cede), usamos a definição de calor específico sensível:

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta\theta} \Rightarrow Q = m\,c\,\Delta\theta$$

Essa equação é também denominada **Equação Fundamental da Calorimetria**.

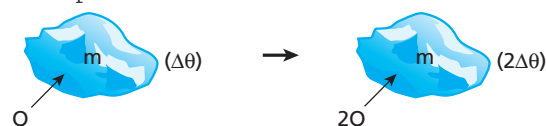
Observe que a variação de temperatura é dada por:

$$\Delta\theta = \theta_{final} - \theta_{inicial}$$

Dessa forma, se a temperatura aumenta, $\theta_f > \theta_i$ e $\Delta\theta > 0$; nesse caso, a quantidade de calor **Q** é positiva. Se a temperatura diminui, $\theta_f < \theta_i$ e $\Delta\theta < 0$; nesse caso, **Q** é negativa.

Considerando o calor específico (**c**) uma constante relativa à substância de que é feito o corpo, podemos concluir que, para uma mesma variação de temperatura ($\Delta\theta$), a quantidade de calor (**Q**) é diretamente proporcional à massa do corpo.

Ainda levando em conta a hipótese anterior, podemos concluir que:

- Para um mesmo corpo, a variação de temperatura é proporcional à quantidade de calor recebido ou cedido por ele.

- Para que corpos constituídos de igual substância sofram a mesma variação de temperatura ($\Delta\theta$), a quantidade de calor recebido ou cedido deve ser proporcional à massa.

### Por que não queima?

Louie Psihoyos/CORBIS/Latinstock

As diversas tecnologias de soldagem disponíveis têm grande importância na indústria, sendo empregadas em larga escala na fabricação de automóveis, navios e aviões, por exemplo. A soldagem consiste em unir duas ou mais peças, estabelecendo, nas regiões de contato, ligações químicas de natureza similar às existentes no interior dos próprios materiais. Na foto acima, um operário está soldando partes de uma estrutura metálica posicionada atrás de um esqueleto jurássico, o que produz uma profusão de fagulhas luminosas. Uma determinada fagulha, cuja massa é muito pequena, lançada em temperatura da ordem de 500 °C, não é capaz de queimar com gravidade os corpos que estão à sua volta. Isso ocorre devido à sua baixa capacidade térmica. Ao atingir um desses corpos, ela sofre um brusco resfriamento, que ocorre mediante o desprendimento de uma pequena quantidade de calor.

## Exercícios

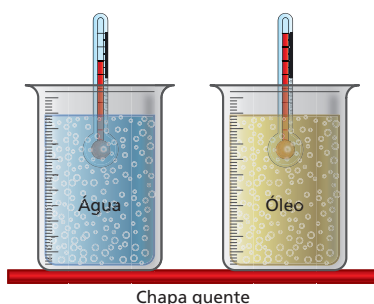
nível 1

**1.** (UFMG) Observe na figura, um ferreiro que aquece uma ferradura e a esfria, em seguida, em um balde cheio de água, à temperatura ambiente.

Quando o equilíbrio térmico é atingido, a água se aquece de poucos graus Celsius, enquanto a ferradura se resfria de algumas centenas de grau, na mesma escala de temperatura.
A grandeza física que determina essa diferença de comportamento entre a água e a ferradura é:

a) o peso.
b) o volume.
c) o calor específico.
d) a capacidade térmica.

**2.** (UFRN) Em uma aula prática de Termologia, o professor realizou a demonstração a seguir:

I. Colocou massas iguais de água e óleo, à mesma temperatura, respectivamente, em dois recipientes de vidro pirex, isolados termicamente em suas laterais e respectivas partes superiores.
II. Pegou dois termômetros idênticos e colocou um em cada recipiente.
III. Em seguida, colocou esses recipientes sobre uma chapa quente. Passado algum tempo, o professor mostrou para seus alunos que o termômetro do recipiente com óleo exibia um valor de temperatura maior que o do recipiente com água, conforme ilustrado na figura abaixo.

Considerando-se que a água e o óleo receberam a mesma quantidade de calor da chapa quente, é correto afirmar que a temperatura do óleo era mais alta porque:

a) a condutividade térmica da água é igual à do óleo.
b) a condutividade térmica da água é maior que a do óleo.
c) o calor latente da água é igual ao do óleo.
d) o calor específico da água é maior que o do óleo.

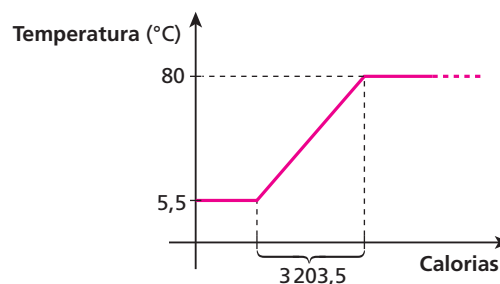
**3.** (Fazu-MG) Tia Anastácia é famosa por sua habilidade na cozinha. Um de seus pratos mais famosos é o risoto de camarão feito em panela de pedra. Inácia, sobrinha de Tia Anastácia, ao tentar reproduzir o famoso prato, frustou-se, pois, apesar de todos os cuidados e da bela aparência do prato, quando do momento da retirada do fogo, surpreendeu-se com o fato de que, posto à mesa, o arroz acabou por queimar.
Ao questionar Tia Anastácia sobre o ocorrido, esta lhe respondeu que o segredo do cozimento dos alimentos em panela de pedra, para que a comida não queime, está no fato de se retirar a panela do fogo um pouco antes que o prato esteja totalmente cozido. Nas palavras de tia Anastácia:

*"— A quentura da panela acaba por cozer os alimentos mesmo que ela já não esteja mais no fogo."*

Dentre as afirmações abaixo, qual a que explica corretamente a "quentura" da panela de pedra salientada por Tia Anastácia?

a) A capacidade térmica da panela de pedra é muito pequena, fazendo com que a temperatura se mantenha elevada por muito tempo.
b) A capacidade térmica da panela é grande, permitindo que seu resfriamento se dê com rapidez, passando todo o calor para o alimento, fazendo-o queimar.
c) A capacidade térmica da panela é grande, o que significa que, para uma pequena variação de temperatura no resfriamento, a panela irradia grande quantidade de calor, podendo acarretar a queima do alimento.
d) A frase de Tia Anastácia é mais uma crendice popular. O fato de a comida ter queimado não está relacionado à panela de pedra, e sim ao tempo excessivo à espera do prato na mesa.
e) A pedra, de que é feita a panela, tem a capacidade de reproduzir calor quando estimulada, acabando por queimar o alimento se o estímulo for muito grande.

**4.** (Fatec-SP) Na tabela, é possível ler os valores do calor específico de cinco substâncias no estado líquido, e no gráfico é representada a curva de aquecimento de 100 g de uma dessas substâncias.

| Substância | Calor específico (cal/g °C) |
|---|---|
| Água | 1,00 |
| Álcool etílico | 0,58 |
| Ácido acético | 0,49 |
| Acetona | 0,52 |
| Benzeno | 0,43 |

A curva de aquecimento representada é a:

a) da água.
b) do álcool etílico.
c) do ácido acético.
d) da acetona.
e) do benzeno.

**5.** Uma garrafa térmica contém água a 60 °C. O conjunto garrafa térmica + água possui capacidade térmica igual a 80 cal/°C. O sistema é colocado sobre uma mesa e após algum tempo sua temperatura diminui para 55 °C. Qual foi a perda de energia térmica para o ambiente nesse intervalo de tempo?

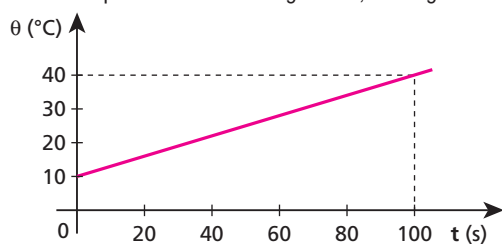
**6.** A massa e o calor específico sensível de cinco amostras de materiais sólidos e homogêneos são fornecidos a seguir.

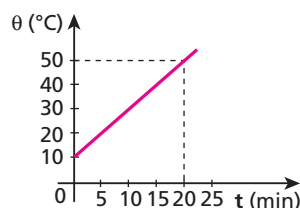
| **Amostra** | **Massa** (g) | **Calor específico** (cal/g °C) |
|---|---|---|
| A | 150 | 0,20 |
| B | 50 | 0,30 |
| C | 250 | 0,10 |
| D | 140 | 0,25 |
| E | 400 | 0,15 |

As cinco amostras encontram-se inicialmente à mesma temperatura e recebem quantidades iguais de calor. Qual delas atingirá a maior temperatura?

**7.** O chamado leite longa vida é pasteurizado pelo processo UHT *(Ultra High Temperature)*, que consiste em aquecer o leite da temperatura ambiente (22 °C) até 137 °C em apenas 4,0 s, sendo em seguida envasado em embalagem impermeável a luz e a micro-organismos.
O calor específico do leite é praticamente igual ao da água, 1,0 cal/g °C. Assim, no aquecimento descrito, que quantidade de calor cada litro (1 000 g) de leite precisou receber? Dê sua resposta em quilocalorias (kcal).

**8.** Uma fonte térmica foi utilizada para o aquecimento de 1,0 L de água (1 000 g) da temperatura ambiente (20 °C) até o ponto de ebulição (100 °C) em um intervalo de tempo igual a 1 min 40 s com rendimento de 100%. Sendo o calor específico da água igual a 1,0 cal/g °C, qual o valor da potência dessa fonte?

**9.** O gráfico mostra o aquecimento de um bloco de ferro de massa 500 g. O calor específico do ferro é igual a 0,12 cal/g °C.

Qual a potência dessa fonte térmica, sabendo que seu rendimento foi de 50%?

**10.** Uma fonte térmica de potência constante fornece 50 cal/min para uma amostra de 100 g de uma substância.

O gráfico fornece a temperatura em função do tempo de aquecimento desse corpo. Qual o valor do calor específico do material dessa substância?

**11.** A energia utilizada para a manutenção e o desempenho do corpo humano é obtida por meio dos alimentos que são ingeridos. A tabela a seguir mostra a quantidade média de energia absorvida pelo corpo humano a cada 100 gramas do alimento ingerido.

| **Alimento** | **Porções** (100 g) | **Energia** (kcal) |
|---|---|---|
| Alface | 20 folhas | 15 |
| Batata frita | 2 unidades | 274 |
| Chocolate em barra | 1 tablete | 528 |
| Coca-cola | 1/2 copo | 39 |
| Macarrão cozido | 7 colheres de sopa | 111 |
| Mamão | 1 fatia | 32 |
| Margarina vegetal | 20 colheres de chá | 720 |
| Pão | 2 fatias | 269 |
| Repolho cru | 10 folhas | 28 |
| Sorvete industrializado | 2 bolas | 175 |

Se for preciso, use: 1 caloria = 4,2 joules;
calor específico sensível da água = 1,0 cal/g °C.
Analisando a tabela, podemos concluir que, em termos energéticos:
a) o chocolate é o alimento mais energético dentre os listados;
b) uma fatia de mamão equivale, aproximadamente, a 10 folhas de alface;
c) um copo de Coca-cola fornece uma energia de, aproximadamente, 328 J;
d) 0,50 kg de sorvete é equivalente a, aproximadamente, 320 g de batatas fritas;
e) um sanduíche com 2 fatias de pão, 2 folhas de alface e 2 folhas de repolho equivale a 1 unidade de batata frita.

## Exercícios — nível 2

**12.** Você sabia que uma barra de chocolate de 100 g pode fornecer ao nosso organismo 500 calorias alimentares (kcal)? Usando o dado acima e os seus conhecimentos de Física, responda:

a) Se você pudesse transferir essa energia (da barra de chocolate) para **m** gramas de água a 0 °C, na fase líquida, e esta atingisse a temperatura de ebulição (100 °C), qual seria o valor de **m**?
**Dado:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C.
b) Se uma pessoa de massa 70 kg ingerisse essa barra de chocolate e utilizasse toda essa energia para subir uma escada com degraus de 20 cm de altura, quantos degraus poderia subir?
**Dados:** aceleração da gravidade = 10 m/s$^2$; 1,0 cal = 4,2 J.

**13.** (Fuvest-SP) Um ser humano adulto e saudável consome, em média, uma potência de 120 J/s. Uma caloria alimentar (1,0 kcal) corresponde aproximadamente a $4,0 \cdot 10^3$ J. Para nos mantermos saudáveis, quantas calorias alimentares devemos utilizar, por dia, a partir dos alimentos que ingerimos?

a) 33
b) 120
c) $2,6 \cdot 10^3$
d) $4,0 \cdot 10^3$
e) $4,8 \cdot 10^3$

**14. E.R.** Um watt é a potência necessária para produzir a energia de um joule em um segundo. Uma caloria é a quantidade aproximada de energia necessária para elevar em 1,0 °C a temperatura de 1,0 grama de água.
Um aquecedor elétrico de potência 1 500 W e capacidade de 135 litros está totalmente cheio com água à temperatura ambiente (20 °C). Quanto tempo o aquecedor gasta para elevar a temperatura dessa água até 60 °C?

**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
densidade absoluta da água = 1,0 kg/L;
1 caloria = 4 joules.

**Resolução:**

Observe que:

$$\text{Pot} = 1\,500 \text{ W} = 1\,500 \ \frac{\text{J}}{\text{s}} = 375 \text{ cal/s}$$

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d\,V = 1{,}0 \ \frac{\text{kg}}{\text{L}} \cdot 135 \text{ L} = 135 \text{ kg} = 135\,000 \text{ g}$$

Usando a **Equação Fundamental da Calorimetria**, temos:

$$Q = m\,c\,\Delta\theta$$

Mas:

$$\text{Pot} = \frac{Q}{\Delta t} \Rightarrow \text{Pot}\,\Delta t = Q$$

Então:

$$\text{Pot}\,\Delta t = m\,c\,\Delta\theta$$

Substituindo os valores fornecidos, vem:

$$375 \cdot \Delta t = 135\,000 \cdot 1{,}0\,(60 - 20)$$

$$\Delta t = 14\,400 \text{ s} = 240 \text{ min} = 4{,}0 \text{ h}$$

$$\boxed{\Delta t = 4{,}0 \text{ h}}$$

**15.** (UFPel-RS) Um médico, após avaliação criteriosa, recomenda a um paciente uma dieta alimentar correspondente a 1 200 cal/dia, fornecendo-lhe uma lista de alimentos com as respectivas “calorias”. (Espera o médico que, com esse regime, a pessoa, pelo menos, não engorde.)
Os médicos utilizam, na realidade, a “grande caloria”, que vale 1000 cal utilizadas na Física, ou seja, esse regime é na verdade de 1 200 000 cal/dia.
Com base nesses dados e considerando o calor específico da água igual a 1,0 cal/g °C e 1,0 cal igual a 4,2 J, responda:

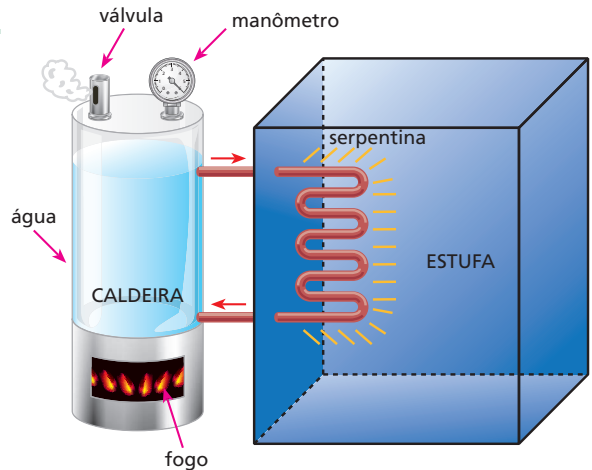
a) Qual a potência média mínima (em watts) que a pessoa mencionada deverá dissipar, ao longo das suas atividades diárias, para, pelo menos, não ganhar peso?
b) Se essa energia pudesse ser empregada para aquecer água de 10 °C a 60 °C, que massa de água (em gramas) seria utilizada?

**16.** Em uma pequena estufa, improvisada com uma caixa de papelão, são utilizadas duas lâmpadas para o aquecimento. Uma delas de 100 W e a outra de 60 W. Se o percentual de energia convertida em térmica é de 90%, qual a quantidade de calor, em joules, transferida à estufa em meia hora? Dê a resposta usando a notação científica, com apenas uma casa decimal.

**17.** Um bom chuveiro elétrico, quando ligado na posição “inverno”, dissipa uma potência de 6,4 kW, fornecendo essa energia à água que o atravessa com vazão de 50 gramas por segundo. Se a água, ao entrar no chuveiro, tem uma temperatura de 23 °C, qual a sua temperatura na saída?

**Dado:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
1 cal = 4 J.

**18.** (PUC-MG) Um recipiente adiabático contém 500 g de água, inicialmente a 20 °C. O conjunto é aquecido até 80 °C, utilizando-se uma fonte de calor que desenvolve uma potência útil de 200 W. Considerando o calor específico da água igual a 1,0 cal/g °C e fazendo 1 cal igual a 4 J, quanto tempo foi gasto nesse aquecimento?

**19.**

O dispositivo observado acima mostra de maneira simples uma estufa utilizada para a secagem de grãos. A água aquecida na caldeira circula através de uma serpentina, irradiando energia térmica para o interior da estufa. A água sai da caldeira a 90 °C com vazão de 20 litros por minuto, esfria ao circular no interior da estufa e retorna a 65 °C. Sendo para a água o calor específico sensível igual a 1,0 cal/g °C e a densidade absoluta igual a 1,0 kg/L, qual a quantidade de calor fornecida para a estufa, a cada hora?

**20.** (Unesp-SP) Foi realizada uma experiência em que se utilizava uma lâmpada de incandescência para, ao mesmo tempo, aquecer 100 g de água e 100 g de areia. Sabe-se que, aproximadamente, 1 cal = 4 J e que o calor específico da água é de 1 cal/g °C e o da areia é 0,2 cal/g °C. Durante 1 hora, a água e a areia receberam a mesma quantidade de energia da lâmpada, 3,6 kJ, e verificou-se que a água variou sua temperatura em 8 °C e a areia em 30 °C. Podemos afirmar que a água e a areia, durante essa hora, perderam, respectivamente, a quantidade de energia para o meio, em kJ, igual a:

a) 0,4 e 3,0.
b) 2,4 e 3,6.
c) 0,4 e 1,2.
d) 1,2 e 0,4.
e) 3,6 e 2,4.

**21.** Para determinar o calor específico de um líquido, usou-se um béquer **A** contendo 250 g desse líquido, a chama de um bico de Bunsen de potência constante e outro béquer **B** contendo 210 g de água pura. Usando o bico de Bunsen alternadamente, o líquido do béquer **A** teve sua temperatura elevada em 10 °C, em 20 s, enquanto a água do béquer **B** teve variação de 8,0 °C em 24 s. Qual é o calor específico do líquido? Despreze a capacidade térmica do béquer e as perdas de calor para o ambiente. Considere, para o calor específico da água, o valor 1,0 cal/g °C.

**22.** O calor específico do cobre é igual a 0,09 cal/g °C. Se em vez de usarmos a escala Celsius usássemos a escala Fahrenheit, quanto valeria esse calor específico?

# Bloco 2

## 4. Sistema físico termicamente isolado

A busca do equilíbrio térmico é uma lei natural.

Os corpos tendem a ter a mesma temperatura do ambiente em que se encontram. Assim, o mais "quente" cede calor e o mais "frio" recebe calor.

Imagens: Jonny Gitti

Na primeira jarra podemos observar que a água encontra-se quente e, na segunda, ela encontra-se gelada. Deixando-as sobre uma mesa, a água quente perderá calor para o meio ambiente e a água fria receberá calor. Após algum tempo, ambas estarão na mesma temperatura do meio.
Elas atingiram o equilíbrio térmico.

Em alguns casos, porém, as trocas de calor entre o sistema e o meio externo podem ser evitadas. Isso ocorre sempre que o sistema físico é **termicamente isolado**.

Um sistema físico é **termicamente isolado** quando não existe troca de calor entre seus componentes e o meio externo.

É importante observar que, na prática, por melhor que seja o isolamento térmico de um sistema, ele sempre troca calor com o meio externo.

Se você colocar, em uma caixa de isopor, algumas latas de refrigerante sem gelo com outras geladas, perceberá que o isopor irá reduzir a participação do meio externo nas trocas de calor. No entanto, após algum tempo, todas as latas estarão à mesma temperatura, pois terão atingido o **equilíbrio térmico**.

Para que isso ocorra, é necessário que os corpos troquem calor entre si, de modo que os de maior temperatura forneçam calor aos de menor temperatura.

Cristina Xavier

Garrafa térmica e caixa de isopor são utilizadas para reduzir as trocas de calor entre seu conteúdo e o meio em que se encontram.

Em um sistema termicamente isolado, as trocas de calor ocorrem apenas entre os seus integrantes. Assim, toda a energia térmica que sai de alguns corpos é recebida por outros pertencentes ao próprio sistema, valendo a relação:

$$|\Sigma Q_{cedido}| = |\Sigma Q_{recebido}|$$

O somatório das quantidades de calor cedidas por alguns corpos de um sistema tem módulo igual ao do somatório das quantidades de calor recebidas pelos outros corpos desse mesmo sistema.

O uso do módulo na fórmula deve-se ao fato de o calor recebido ser positivo e de o calor cedido ser negativo, podendo-se também escrever essa relação da seguinte forma:

$$\Sigma Q_{cedido} + \Sigma Q_{recebido} = 0$$

## 5. Equivalente em água

No cálculo de quantidades de calor trocadas entre corpos pertencentes a um mesmo sistema, costuma-se usar um artifício que pode facilitar a determinação do resultado final. Teoricamente, pode-se substituir um determinado corpo pela massa de água equivalente a ele nas trocas de calor. Para tanto, essa massa de água deve ter a mesma capacidade térmica do referido corpo:

$$C_{corpo} = C_{água}$$

$$(m\,c)_{corpo} = (m\,c)_{água}$$

Simbolizando por **E** a massa da água expressa em gramas e lembrando que o calor específico da água vale 1 cal/g °C, temos:

$$(m\,c)_{corpo} = E \cdot 1$$

Assim, podemos dizer que:

O **equivalente em água** de um corpo é a massa **E** de água que possui capacidade térmica igual à do corpo considerado, podendo substituí-lo no equacionamento das quantidades de calor trocadas.

Consideremos, por exemplo, um corpo de massa igual a 100 g, constituído de um material de calor específico igual a 0,4 cal/g °C. Calculemos a capacidade térmica desse corpo:

$$C_{corpo} = (m\ c)_{corpo} = 100 \cdot 0{,}4$$

$$C_{corpo} = 40 \text{ cal/ °C}$$

Consideremos também uma porção de água de massa igual a 40 g e calculemos sua capacidade térmica:

$$C_{água} = (m\ c)_{água} = 40 \cdot 1 \Rightarrow C_{água} = 40 \text{ cal/ °C}$$

Disso, concluímos que a capacidade térmica do corpo é igual à da porção de água, o que significa que nas trocas de calor esse corpo comporta-se de modo equivalente a 40 gramas de água. Por isso, dizemos que o equivalente em água do corpo é igual a 40 gramas:

$$E_{corpo} = 40 \text{ g}$$

Podemos observar que a capacidade térmica do corpo, expressa em cal/ °C, e seu equivalente em água, expresso em gramas, têm o mesmo valor numérico.

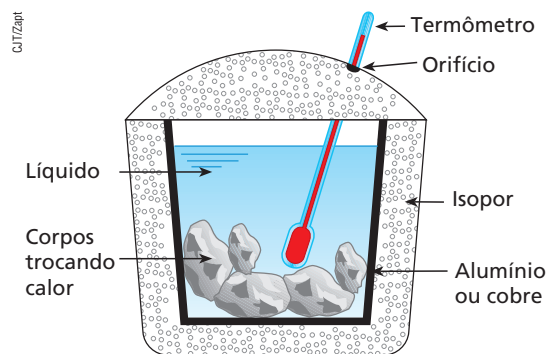
## 6. Calorímetro

A mistura térmica de dois ou mais corpos, principalmente quando um deles está no estado líquido, requer um recipiente adequado. Alguns desses recipientes possuem aparatos que permitem obter, de forma direta ou indireta, o valor das quantidades de calor trocadas entre os corpos.

A esse tipo de recipiente chamamos de **calorímetro**.

De modo geral, o calorímetro é metálico (de alumínio ou cobre) e isolado termicamente por um revestimento de isopor. Em sua tampa, também de isopor, há um orifício pelo qual se introduz o termômetro, que indica a temperatura da mistura em observação.

O calorímetro representado na figura é o mais usado nos laboratórios escolares. Em experimentos que requerem tratamento especial, são usados calorímetros mais sofisticados.

CJT/Zapt

Representação de um calorímetro usual.

Não podemos esquecer que o calorímetro, além de servir como recipiente, também participa das trocas de calor, cedendo calor para seu conteúdo ou recebendo calor dele. Geralmente, não são dados o calor específico do material de que é feito nem sua massa, mas é fornecido seu equivalente em água.

Do exposto, podemos chegar à relação:

$$C_{calorímetro} = E\ c_{água}$$

Um calorímetro é denominado **ideal** quando, além de impedir as trocas de calor entre seu conteúdo e o meio externo, não troca calor com os corpos nele contidos. Esse tipo de calorímetro existe somente na teoria, mas aparece com frequência em exercícios. Nesses casos, os enunciados referem-se a ele dizendo que tem **capacidade térmica desprezível** ou **equivalente em água desprezível**.

Cristina Xavier

Fotografia de um calorímetro utilizado em laboratórios de Física.

## Exercícios

nível 1

**23.** (Unesp-SP) Quando uma enfermeira coloca um termômetro clínico de mercúrio sob a língua de um paciente, por exemplo, ela sempre aguarda algum tempo antes de fazer a sua leitura. Esse intervalo de tempo é necessário:

a) para que o termômetro entre em equilíbrio térmico com o corpo do paciente.
b) para que o mercúrio, que é muito pesado, possa subir pelo tubo capilar.
c) para que o mercúrio passe pelo estrangulamento do tubo capilar.
d) devido à diferença entre os valores do calor específico do mercúrio e do corpo humano.
e) porque o coeficiente de dilatação do vidro é diferente do coeficiente de dilatação do mercúrio.

**24. E.R.** Em um recipiente termicamente isolado e com capacidade térmica desprezível, misturam-se 200 g de água a 10 °C com um bloco de ferro de 500 g a 140 °C. Qual a temperatura final de equilíbrio térmico?

**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor específico do ferro = 0,12 cal/g °C.

### Resolução:

Como o recipiente tem capacidade térmica desprezível, ele não participa das trocas de calor. E, como é termicamente isolado, é correto afirmar que:

$$Q_{ferro} + Q_{água} = 0$$

Uma vez que o calor trocado é sensível, temos:

$$(m\,c\,\Delta\theta)_{ferro} + (m\,c\,\Delta\theta)_{água} = 0$$

$$500 \cdot 0{,}12(\theta_E - 140) + 200 \cdot 1{,}0(\theta_E - 10) = 0$$

$$60(\theta_E - 140) + 200(\theta_E - 10) = 0$$

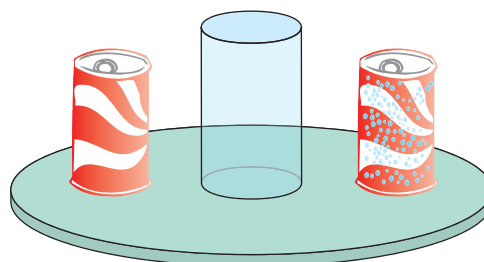
$$60\theta_E - 8\,400 + 200\theta_E - 2\,000 = 0$$

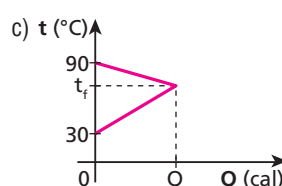
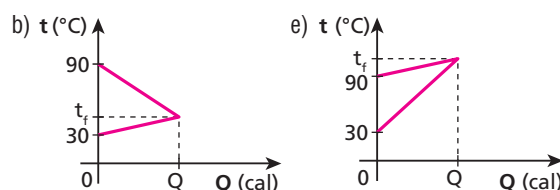
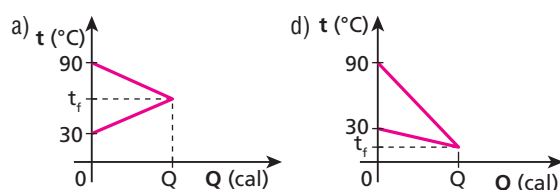
$$260\theta_E = 10\,400 \Rightarrow \boxed{\theta_E = 40\ °C}$$

**25.** Em um recipiente termicamente isolado e de capacidade térmica desprezível, são misturados 200 g de água a 55 °C com 500 g também de água a 20 °C. Quando a mistura atingir o equilíbrio térmico, qual será sua temperatura?

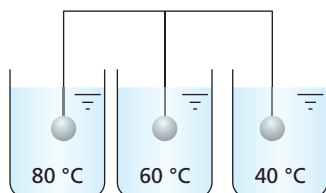
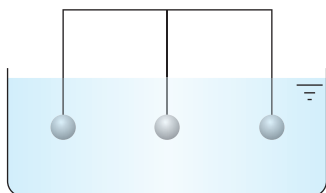
**26.** Em uma garrafa térmica ideal, com 1,0 L de capacidade, são colocados 500 $cm^3$ de leite, à temperatura ambiente (20 °C), e 200 $cm^3$ de café a 90 °C. Admitindo-se que as trocas de calor somente aconteçam entre o café e o leite (cujas densidades e calores específicos podem ser considerados iguais), qual será a temperatura final de equilíbrio térmico do sistema?

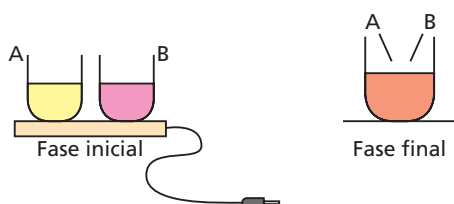
**27.** Um calorímetro ideal contém determinada massa de um líquido **A** na temperatura de 10 °C. Acrescenta-se nesse mesmo recipiente um líquido **B**, inicialmente a 90 °C, de massa duas vezes maior que a do líquido **A**. Sabendo-se que o equilíbrio térmico entre os dois líquidos se estabeleceu a 30 °C e, supondo-se o sistema isolado termicamente, qual a relação $c_A/c_B$, entre os calores específicos desses líquidos?

**28.** Um aluno entrou em uma lanchonete e pediu dois refrigerantes, um "sem gelo", à temperatura de 25 °C, e o outro "gelado", à temperatura de 5,0 °C. Ele preencheu $\frac{1}{4}$ da capacidade de um copo grande com o refrigerante "sem gelo" e terminou de completar o copo com o refrigerante "gelado".
Desprezando as trocas de calor que não sejam entre os líquidos, determine a temperatura final de equilíbrio térmico do refrigerante.

**29.** (UFTM-MG) Dona Joana é cozinheira e precisa de água a 80 °C para sua receita. Como não tem um termômetro, decide misturar água fria, que obtém de seu filtro, a 25 °C, com água fervente. Só não sabe em que proporção deve fazer a mistura. Resolve, então, pedir ajuda a seu filho, um excelente aluno de física. Após alguns cálculos, em que levou em conta o fato de morarem no litoral, e em que desprezou todas as possíveis perdas de calor, ele orienta sua mãe a misturar um copo de 200 mL de água do filtro com uma quantidade de água fervente, em mL, igual a **V**. Determine **V**.

**30.** (PUC-MG) Em um calorímetro de capacidade térmica desprezível, foram colocados 100 g de água a 30 °C e 200 g de ferro a 90 °C. O calor específico da água é igual a 1,0 cal/g °C e o do ferro, 0,10 cal/g °C. Qual dos gráficos melhor representa a variação de temperatura desses corpos em função da quantidade de calor trocado?

## Exercícios

**nível 2**

**31.** Três esferas de mesma massa e de mesmo material, suspensas por fios isolados termicamente, estão imersas em três banhos térmicos cujas temperaturas estão mencionadas na figura abaixo.

Após atingidos os equilíbrios térmicos, essas esferas são simultânea e rapidamente retiradas e levadas para um recipiente com água a 20 °C.

Desprezando-se possíveis perdas de energia para o meio ambiente, a temperatura final desse banho térmico único será:
a) um valor maior que 80 °C;
b) um valor entre 60 °C e 20 °C;
c) 60 °C;
d) 50 °C;
e) um valor menor que 20 °C.

**32.** (Fuvest-SP) Dois recipientes iguais **A** e **B**, contendo dois líquidos diferentes, inicialmente a 20 °C, são colocados sobre uma placa térmica, da qual recebem aproximadamente a mesma quantidade de calor. Com isso, o líquido em **A** atinge 40 °C, enquanto o líquido em **B**, 80 °C. Se os recipientes forem retirados da placa e seus líquidos misturados, a temperatura final da mistura ficará em torno de:
a) 45 °C. b) 50 °C. c) 55 °C. d) 60 °C. e) 65 °C.

**33.** (Olimpíada Paulista de Física) Deseja-se preparar um banho em um ofurô. Sabe-se que a temperatura da água da torneira é de 20 °C, e que a temperatura ideal da água para o banho é de 36 °C. Quantos litros de água fervendo deve-se misturar com a água da torneira para obter 100 litros de água na temperatura ideal para o banho?

**34.** Em um ritual místico, as pessoas aquecem a água de um caldeirão utilizando sete pedras. As pedras são colocadas em uma fogueira e depois são lançadas no caldeirão com 0,70 L de água a 20 °C. Cada uma das pedras tem, em média, 100 g de massa e se encontram a 300 °C no instante em que são lançadas no caldeirão. No equilíbrio térmico, tem-se uma temperatura de 50 °C. Sendo o calor específico da água igual a 1,0 cal/g °C e desprezando as perdas de calor para o ambiente e para o caldeirão, pode-se afirmar que o calor específico médio das pedras em questão, em cal/g °C, é:
a) 0,030.
b) 0,12.
c) 0,17.
d) 0,50.
e) 1,04.

**Dado:** densidade absoluta da água = 1,0 kg/L

**35. E.R.** Um bloco **A** tem massa, calor específico e temperatura inicial respectivamente iguais a $m_A$, $c_A$ e $\theta_A$. Um bloco **B** tem massa, calor específico e temperatura inicial respectivamente iguais a $m_B$, $c_B$ e $\theta_B$. Os blocos **A** e **B** são postos em contato térmico e, depois de certo tempo, atingem o equilíbrio térmico, adquirindo uma temperatura $\theta_E$. Considerando $c_A$ e $c_B$ constantes e supondo o sistema termicamente isolado, calcule $\theta_E$.

**Resolução:**

Sendo desprezíveis as trocas de calor com o resto do universo, é válido afirmar que:

$$Q_A + Q_B = 0$$
$$(m\,c\,\Delta\theta)_A + (m\,c\,\Delta\theta)_B = 0$$
$$m_A\,c_A(\theta_E - \theta_A) + m_B\,c_B(\theta_E - \theta_B) = 0$$
$$m_A\,c_A\,\theta_E - m_A\,c_A\,\theta_A + m_B\,c_B\,\theta_E - m_B\,c_B\,\theta_B = 0$$
$$(m_A\,c_A + m_B\,c_B)\theta_E = m_A\,c_A\,\theta_A + m_B\,c_B\,\theta_B$$

$$\boxed{\theta_E = \frac{m_A\,c_A\,\theta_A + m_B\,c_B\,\theta_B}{m_A\,c_A + m_B\,c_B}}$$

**Notas:**

- O produto da massa pelo calor específico é a capacidade térmica do bloco:

$$m_A\,c_A = C_A \qquad m_B\,c_B = C_B$$

Assim, temos:

$$\theta_E = \frac{C_A\,\theta_A + C_B\,\theta_B}{C_A + C_B}$$

- Observe ainda que a expressão deduzida representa uma **média ponderada** das temperaturas iniciais, sendo os "pesos" a **capacidade térmica** de cada corpo envolvido.

**36.** Dois corpos **A** e **B**, de capacidades térmicas iguais, são colocados no interior de um calorímetro ideal. A temperatura inicial do corpo **A** é $\theta_A$ e a do corpo **B** é $\theta_B$. Não considerando possíveis perdas de calor, a temperatura final de equilíbrio térmico será dada por:

a) $\dfrac{\theta_A + \theta_B}{2}$.
b) $\dfrac{\theta_A - \theta_B}{2}$.
c) $\dfrac{\theta_B - \theta_A}{2}$.
d) $|\theta_A + \theta_B|$.
e) $|\theta_B - \theta_A|$.

**37.** Três amostras de um mesmo líquido, cujas temperaturas iniciais são 40 °C, 70 °C e 100 °C, são misturadas em um calorímetro. As massas das amostras são iguais. Supondo-se que as trocas de calor ocorrem somente entre as amostras do líquido, qual a temperatura de equilíbrio da mistura, em graus Celsius?

**38.** (UFTM-MG) Para fazer café, meio litro de água fervente, aquecido em uma chaleira, foi despejado sobre o pó, a 100 °C. O café coado goteja a 90 °C para o interior de uma cafeteira. Após todo conteúdo do coador ter se esgotado, o café contido na cafeteira, agora a 80 °C, é vertido em uma garrafa térmica onde, após o equilíbrio térmico, permanece sob temperatura de 75 °C.

Considerando desprezível a perda da massa de água por evaporação durante o processo e que no final temos meio litro de café na cafeteira e admitindo que o calor específico sensível da água é igual ao calor específico sensível do café, sendo seu valor igual a 1 cal/(g · °C),

a) determine a quantidade de calor cedida pelo líquido para os corpos envolvidos na elaboração do café, desde o momento em que a água a 100 °C é vertida sobre pó, até o momento em que é obtido café já em equilíbrio térmico com a garrafa térmica.
b) considerando que não houve troca de calor do sistema com o ar, estime a capacidade térmica da cafeteira que recebeu o café passado pelo coador.
**Dado:** densidade da água = 1 g/mL.

**39.** (Fuvest-SP) Dois recipientes de material termicamente isolante contêm cada um 10 g de água a 0 °C. Deseja-se aquecer até uma mesma temperatura os conteúdos dos dois recipientes, mas sem misturá-los. Para isso, é usado um bloco de 100 g de uma liga metálica inicialmente à temperatura de 90 °C. O bloco é imerso durante certo tempo em um dos recipientes e depois transferido para o outro, nele permanecendo até ser atingido o equilíbrio térmico. O calor específico da água é dez vezes maior que o da liga metálica. Qual a temperatura do bloco metálico, por ocasião da transferência de um recipiente para o outro?

**40.** Para avaliar a temperatura de 300 g de água, usou-se um termômetro de 100 g de massa e calor específico sensível igual a 0,15 cal/g °C. Inicialmente, esse termômetro indicava, à temperatura ambiente, 12 °C. Após algum tempo, colocado em contato térmico com a água, o termômetro passa a indicar 72 °C. Supondo não ter havido perdas de calor, determine a temperatura inicial da água.
**Dado:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C

**41. E.R.** Um calorímetro de equivalente em água 10 g, à temperatura ambiente (20 °C), foi utilizado para misturar 200 g de um líquido de calor específico 0,79 cal/g °C, a 35 °C, com um bloco de metal de massa 300 g, a 150 °C. Sabendo que a temperatura final atingida foi de 40 °C, determine o calor específico do metal.

**Resolução:**
Supondo o sistema termicamente isolado, podemos escrever que:

$$Q_{metal} + Q_{líquido} + Q_{calorímetro} = 0$$

$$(m\,c\,\Delta\theta)_{metal} + (m\,c\,\Delta\theta)_{líquido} + (m\,c\,\Delta\theta)_{calorímetro} = 0$$

$$300c_m\,(40 - 150) + 200 \cdot 0{,}79\,(40 - 35) +$$

$$+ [m\,c\,(40 - 20)]_{calorímetro} = 0$$

Como vimos:

$$(m\,c)_{calorímetro} = E\,c_{água}$$

Sendo:

$$c_{água} = 1 \text{ cal/g °C}$$

$$E = 10 \text{ g (equivalente em água)}$$

temos:

$$(m\,c)_{calorímetro} = 10\text{ g} \cdot 1\,\frac{\text{cal}}{\text{g °C}} = 10\,\frac{\text{cal}}{\text{°C}}$$

Assim:

$$-300c_m \cdot 110 + 790 + 10 \cdot 20 = 0$$

$$c_m = \frac{790 + 200}{300 \cdot 110}$$

$$\boxed{c_m = 0{,}03 \text{ cal/g °C}}$$

**42.** Qual é o equivalente em água de um bloco de alumínio de massa 500 g? Sabe-se que o calor específico do alumínio vale 0,22 cal/g °C e o da água vale 1,0 cal/g °C.

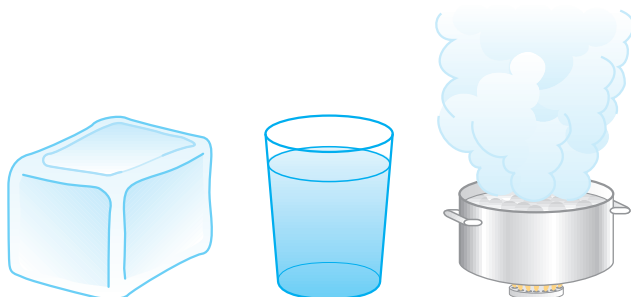
**43.** Um corpo é colocado em contato com uma fonte térmica que lhe fornece 2,0 kcal de calor. A temperatura do corpo era igual à do ambiente (20 °C) e, ao receber a energia térmica, atingiu a temperatura de 120 °C. Se o calor específico da água é igual a 1,0 cal/g °C, qual é o equivalente em água do referido corpo?

**44.** Em um recipiente de capacidade térmica desprezível, encontramos um líquido a 20 °C. Misturando 600 g de água a 80 °C com esse líquido, obtemos uma temperatura de equilíbrio térmico igual a 60 °C. Qual o equivalente em água desse líquido?

**45.** Um pedaço de cobre de 20 g a 60 °C é colocado dentro de um calorímetro que contém 10 g de água a 10 °C. Se a temperatura final do sistema (calorímetro + água + cobre) é 15 °C, qual é o equivalente em água do calorímetro?
**Dados:** calor específico do cobre = 0,42 J/g °C;
calor específico da água = 4,2 J/g °C.

## Bloco 3

### 7. As mudanças de estado físico

Dependendo do estado de agregação de suas partículas, uma substância pode ser encontrada em três estados físicos fundamentais: sólido, líquido e gasoso.

Representação da água nos três estados físicos: sólido, líquido e gasoso.

No **estado sólido**, as partículas de uma substância não têm grande liberdade de movimentação e não vão além de vibrações em torno de posições definidas. Assim, os sólidos possuem volume e forma bem definidos.

Thinkstock/Getty Images

As geleiras e os *icebergs*, encontrados em regiões muito frias (próximas dos polos), são exemplos da água no estado sólido.

No **estado líquido**, há maior liberdade de agitação das partículas de uma substância do que no estado sólido, mas elas ainda apresentam uma coesão considerável. Assim, os líquidos possuem volume bem definido, porém forma variável, ou seja, a forma é a do recipiente que os contém.

Thinkstock/Getty Images

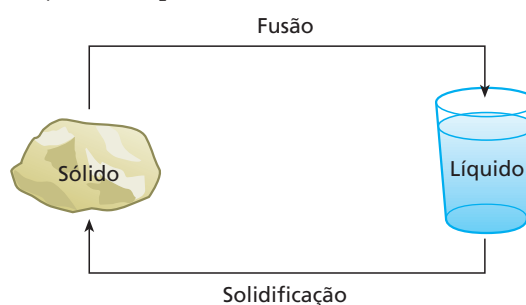
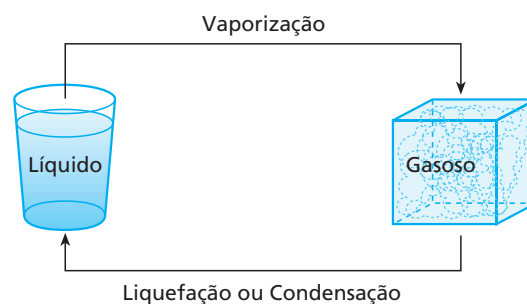
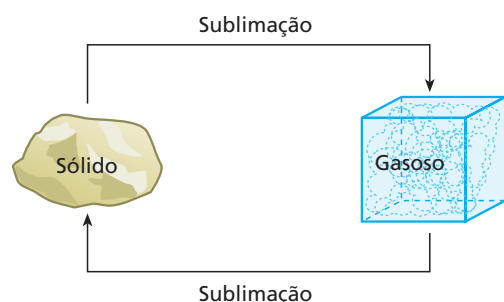
A existência da água no estado líquido, em rios e mares, é um fator fundamental para a sobrevivência do ser humano na Terra.

No **estado gasoso**, as partículas de uma substância estão afastadas umas das outras o suficiente para que as forças de coesão entre elas sejam muito fracas. Por isso, elas se movimentam com liberdade muito maior do que no estado líquido. Substâncias no estado gasoso (vapores e gases) não possuem volume nem forma definidos.

Thinkstock/Getty Images

Em temperaturas elevadas, a água sofre uma evaporação muito rápida, subindo no estado gasoso. Quando a temperatura diminui, esse vapor se precipita em forma de chuva (água no estado líquido).

Quando uma substância, em qualquer um dos estados físicos, recebe ou cede energia térmica, pode sofrer uma alteração na forma de agregação de suas partículas, passando de um estado para outro. Essa passagem corresponde a uma mudança de seu estado físico.

Vejamos as possíveis mudanças de estado:

A **fusão** é a passagem do estado sólido para o líquido. A transformação inversa dessa passagem é a **solidificação**.

A **vaporização** é a passagem do estado líquido para o gasoso. A transformação inversa dessa passagem é a **liquefação** (ou **condensação**).

A **sublimação** é a denominação dada à passagem do estado sólido para o gasoso, sem que determinada substância passe pela fase intermediária, a líquida. A transformação inversa também é denominada **sublimação**.

Entre essas transformações, as que ocorrem por recebimento de calor são denominadas **transformações endotérmicas**. São elas: a fusão, a vaporização e a sublimação (sólido $\rightarrow$ gasoso).

A solidificação, a liquefação e a sublimação (gasoso $\rightarrow$ sólido) são **transformações exotérmicas**, já que ocorrem por perda de calor.

É importante observar que a quantidade de calor que cada unidade de massa de uma substância precisa receber para sofrer alteração em sua fase de agregação, mudando seu estado, é igual à que precisa ceder para sofrer a transformação inversa, à mesma temperatura.

## 8. O calor latente

Vimos que o calor sensível produz variação de temperatura, enquanto o calor latente causa mudança de estado físico em um corpo.

Assim, podemos afirmar que **calor sensível** é a denominação dada à energia térmica que altera a energia cinética de translação das partículas, estando essa energia cinética diretamente ligada à temperatura do sistema físico.

A denominação **calor latente** é dada à energia térmica que se transforma em energia potencial de agregação. Essa transformação altera o arranjo físico das partículas do sistema e provoca uma mudança de estado – por exemplo, de sólido para líquido (fusão) –, sem, no entanto, alterar a temperatura.

Observemos que **energia térmica** é a energia (cinética) que provoca a agitação das partículas de um corpo mais a energia (potencial) de agregação, que estabelece o estado físico desse corpo.

Para um determinado estado de agregação (líquido, por exemplo), existe um limite para o estado de agitação (temperatura) das partículas de um corpo.

Esse limite corresponde à temperatura de mudança de estado físico, que é função da substância de que é feito o corpo e da pressão exercida sobre ele. A água, por exemplo, sob pressão normal, sofre mudanças de estado físico a 0 °C e a 100 °C. Essas são suas temperaturas de fusão-solidificação e de vaporização-liquefação, respectivamente.

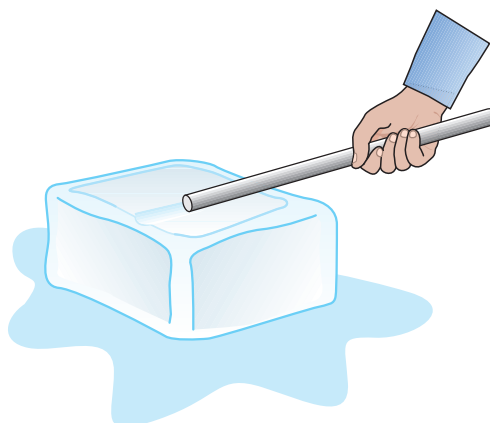
Experimentalmente podemos concluir que a quantidade de calor necessária para provocar uma mudança de estado é diretamente proporcional à massa da porção da substância que sofreu a transformação.

Assim, sendo **m** a massa de um corpo que necessita de uma quantidade **Q** de calor para sofrer uma total mudança de estado, vale a expressão:

$$\frac{Q}{m} = L \Rightarrow \boxed{Q = m\,L}$$

A grandeza **L** é denominada **calor latente**, sendo característica do material de que é feito o corpo, da mudança de estado pela qual ele passa e da temperatura a que ocorre essa mudança. Para a água, por exemplo, o calor latente de fusão-solidificação a 0 °C vale 80 cal/g enquanto o de vaporização-liquefação a 100 °C vale 540 cal/g aproximadamente.

Assim, podemos dizer que:

- o calor latente de fusão-solidificação de uma substância indica a quantidade de calor que cada unidade de massa precisa receber para que ocorra sua fusão ou ceder para que ocorra sua solidificação;
- o calor latente de vaporização-liquefação de uma substância indica a quantidade de calor que cada unidade de massa precisa receber para que ocorra sua vaporização ou ceder para que ocorra sua liquefação.

A denominação sensível ou latente dada ao calor recebido ou cedido por um corpo depende do efeito produzido por ele. A figura representa uma barra de ferro que perde calor sensível (diminui de temperatura) para um bloco de gelo a 0 °C, que derrete. Assim, para o gelo, esse calor recebido é do tipo latente, já que produziu nele uma mudança de estado e não uma variação de temperatura.

## 9. A fusão e a solidificação

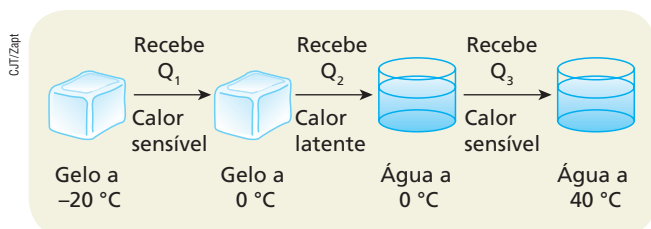
Consideremos um bloco de gelo de massa **m**, inicialmente a –20 °C, sob pressão normal. Quando fornecemos calor a esse gelo, suas partículas absorvem energia, com consequente aumento de temperatura.

Esse processo tem um limite, isto é, existe uma temperatura em que a estrutura molecular da substância não consegue se manter – é a temperatura de fusão.

Ao ser atingida tal temperatura, passa a ocorrer o desmantelamento da estrutura molecular sólida. Para tanto, é usado o calor recebido e a substância torna-se líquida. Esse processo é denominado **fusão**. Se, depois disso, continuarmos a fornecer calor, a temperatura do líquido aumentará.

É importante destacar que a temperatura de fusão de uma substância pura é bem determinada, dependendo apenas da substância e da pressão a que está sujeita.

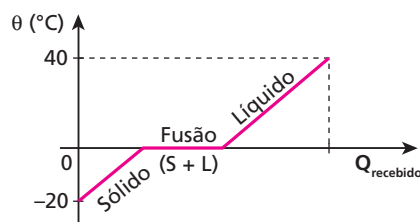
Para evitar complicações desnecessárias, admitiremos, em nosso estudo, que a pressão permanece constante durante todo o processo de mudança de estado físico.

Supondo que o bloco de gelo, citado anteriormente, seja aquecido de –20 °C até 40 °C, vamos analisar por partes esse aquecimento:

Para calcular o total de calor (**Q**) recebido pelo sistema, usamos as fórmulas do calor sensível e do calor latente, já vistas.

Assim, temos:

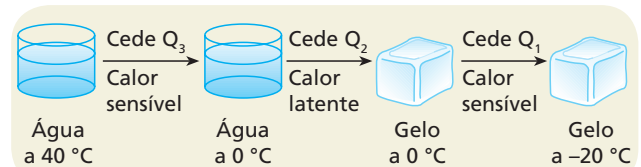
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = (m\ c\ \Delta\theta)_{gelo} + (m\ L_F)_{gelo} + (m\ c\ \Delta\theta)_{água}$$

Esse processo pode ser representado graficamente pela **curva de aquecimento**:

O trecho correspondente ao patamar indica a mudança de estado físico (fusão), pois a energia recebida não produziu variação de temperatura, e sim mudança do estado de agregação das partículas do corpo.

Como você já sabe, o processo inverso da fusão é a **solidificação**.

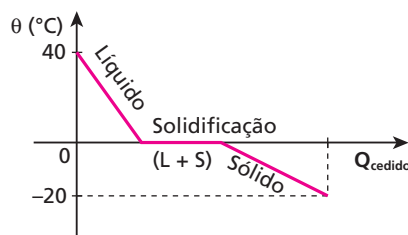
Para entender como se dá essa transformação, vamos retomar o exemplo anterior, considerando que a água (a 40 °C) volte a ser gelo (a –20 °C). Para que isso ocorra, é necessário que seja retirado calor dessa água. Com isso, a energia cinética de translação de suas partículas vai diminuindo, ou seja, sua temperatura vai reduzindo. No entanto, essa redução cessará quando a água atingir 0 °C. A partir daí, se continuarmos a retirar calor, as moléculas se recomporão na estrutura característica do estado sólido, diminuindo a energia potencial de agregação, sem prejuízo da temperatura.

Se, após a recomposição molecular (solidificação), continuarmos a retirar calor da água, a temperatura voltará a diminuir. Esse resfriamento é esquematizado a seguir:

A quantidade total de calor (**Q**) cedida (ou retirada) é dada por:

$$Q = Q_3 + Q_2 + Q_1$$

$$Q = (m\ c\ \Delta\theta)_{água} + (m\ L_S)_{água} + (m\ c\ \Delta\theta)_{gelo}$$

Os módulos de $L_S$ e $L_F$ são iguais, porém convencionaremos $L_F$ positivo (calor recebido) e $L_S$ negativo (calor cedido).

A **curva de resfriamento** é representada a seguir:

Tudo o que foi explicado sobre a fusão-solidificação do gelo vale para a maioria das substâncias.

A tabela a seguir contém os calores latentes de fusão ($L_F$) e as temperaturas de fusão ($\theta_F$), em pressão atmosférica normal, de algumas substâncias.

| Substância | $L_F$ (cal/g) | $\theta_F$ (°C) |
|---|---|---|
| Água ($H_2O$) | 80 | 0 |
| Alumínio ($A\ell$) | 94 | 660 |
| Cobre (Cu) | 41 | 1 083 |
| Ferro (Fe) | 49 | 1 535 |
| Mercúrio (Hg) | 2,8 | –39 |
| Chumbo (Pb) | 5,5 | 327 |
| Zinco (Zn) | 23 | 420 |

Kruss/Glow Images

No copo, observamos a água nos estados sólido e líquido. Ao receber energia térmica do ambiente, o gelo irá sofrer fusão, transformando-se em água líquida.

## Exercícios

nível 1

**46.** A respeito de mudança de estado físico, indique a alternativa incorreta.

a) Se um corpo sólido absorve calor e sua temperatura não varia, isso significa que ele está sofrendo mudança de estado físico.

b) Durante uma fusão, sob pressão constante, todo calor absorvido é utilizado para alterar o arranjo molecular da substância.

c) Quando um sólido recebe calor, ou o estado de agitação de suas partículas aumenta ou ocorre uma reestruturação no seu arranjo molecular, os fatores que determinam o que acontece são: a temperatura do sólido e a pressão a que ele está sujeito.

d) A temperatura em que ocorre determinada fusão depende da substância e da pressão a que o corpo está sujeito.

e) Um bloco de gelo nunca pode sofrer fusão a uma temperatura diferente de 0 °C.

**47.** Quanto calor devemos fornecer a um bloco de gelo de 300 g de massa, a 0 °C, sob pressão normal, para fundi-lo totalmente?

**Dado:** calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g

**48. E.R.** Quanto de calor necessitam receber 100 g de gelo para serem aquecidos de –30 °C a 10 °C? A pressão atmosférica é constante e normal, e são dados:

calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C.

**Resolução:**

Sabemos que o gelo sofre fusão a 0 °C; portanto, devemos considerar o aquecimento do bloco de gelo por etapas.

$Q_1$ = quantidade de calor que o gelo recebeu para atingir 0 °C (calor sensível).

$Q_2$ = quantidade de calor que o gelo recebeu para se fundir (calor latente).

$Q_3$ = quantidade de calor que a água, proveniente da fusão do gelo, recebeu para atingir 10 °C (calor sensível).

Assim: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$$Q = (m\ c\ \Delta\theta)_{gelo} + (m\ L_F)_{gelo} + (m\ c\ \Delta\theta)_{água}$$

Substituindo os valores numéricos fornecidos, temos:

$$Q = 100 \cdot 0{,}50\ [0 - (-30)] + 100 \cdot 80 + 100 \cdot 1{,}0\ (10 - 0)$$

$$Q = 100 \cdot 0{,}50 \cdot 30 + 100 \cdot 80 + 100 \cdot 10$$

$$Q = 1\,500 + 8\,000 + 1\,000$$

$$\boxed{Q = 10\,500 \text{ cal}}$$

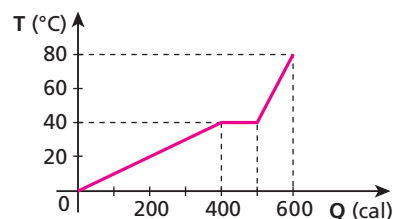
**49.** Deseja-se transformar 100 g de gelo a –20 °C em água a 30 °C. Sabe-se que o calor específico do gelo vale 0,50 cal/g °C e o da água, 1,0 cal/g °C e que o calor latente de fusão do gelo vale 80 cal/g. Quanto calor, em quilocalorias, devemos fornecer a esse gelo?

**50.** Uma pedra de gelo de 20 g de massa, inicialmente a –10 °C, recebeu 2 700 cal. Determine a temperatura atingida, sabendo que essa energia foi totalmente aproveitada pelo sistema.

**Dados:** calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

**51.** Você tem 100 g de água à temperatura ambiente (25 °C). Quanto de calor deve-se retirar dessa água para obter-se um bloco de gelo de 100 g a 0 °C?

**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

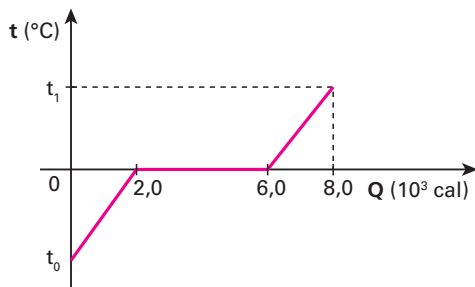
**52.** (UFG-GO) Um corpo de massa 50 g, inicialmente no estado sólido, recebe calor de acordo com a representação gráfica a seguir, passando para o estado líquido:

No gráfico, **Q** representa a quantidade de calor recebida pelo corpo e **T**, sua temperatura na escala Celsius.

a) O que ocorre no intervalo entre 400 cal e 500 cal? Explique.

b) Determine os calores específicos e o calor latente nas fases representadas no gráfico.

## Exercícios

nível 2

**53.** (UFPI) O gráfico a seguir mostra a curva de aquecimento de certa massa de gelo.

Determine a temperatura inicial do gelo ($t_0$) e a temperatura final da água ($t_1$).

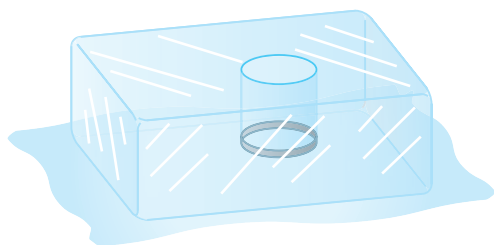
**Dados:** calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

**54.** Uma fonte de potência constante e igual a 400 cal/min fornece calor a um bloco de gelo com massa de 200 g, inicialmente à temperatura de –20 °C. Sabendo que o sistema é aquecido a 50 °C, calcule o tempo gasto para o aquecimento, desprezando quaisquer perdas de energia.

**Dados:** calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C.

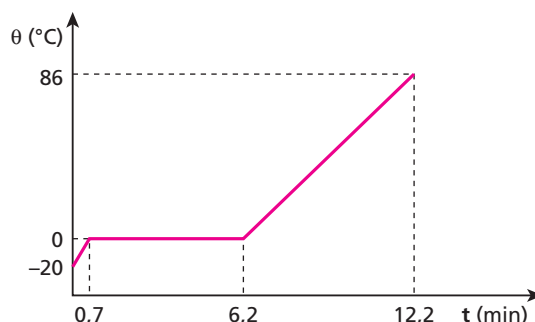
**55.** (Mack-SP) Sabendo que uma caixa de fósforos possui em média 40 palitos e que cada um desses palitos, após sua queima total, libera cerca de 85 calorias, para podermos fundir totalmente um cubo de gelo de 40 gramas, inicialmente a –10 °C, sob pressão normal, quantas caixas de fósforos devemos utilizar, no mínimo?

**Dados:** calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C.

**56.** (PUC-SP) Um anel metálico de massa 150 g, inicialmente à temperatura de 160 °C, foi colocado em uma cavidade feita na parte superior de um grande bloco de gelo em fusão, como mostrado na figura.

Após o equilíbrio térmico ser atingido, verificou-se que 30 $cm^3$ de gelo se fundiram. Considerando o sistema (gelo-anel) termicamente isolado, o calor específico do metal que constitui o anel, em cal/g °C, é:

a) 0,050.
b) 0,092.
c) 0, 096.
d) 0,10.
e) 1,0.

**Dados:** calor latente de fusão do gelo: 80 cal/g;
densidade do gelo: 0,92 g/$cm^3$.

**57.** (Unesp-SP) Uma quantidade de 1,5 kg de certa substância encontra-se inicialmente na fase sólida, à temperatura de –20 °C. Em um processo à pressão constante de 1,0 atm, ela é levada à fase líquida a 86 °C. A potência necessária nessa transformação foi de 1,5 kJ/s. O gráfico mostra a temperatura de cada etapa em função do tempo.

Calcule:

a) o calor latente de fusão $L_F$;
b) o calor necessário para elevar a temperatura de 1,5 kg dessa substância de 0 °C a 86 °C, no estado líquido.

**58.** (Vunesp-SP) Um processo térmico disponibiliza para o interior de um calorímetro 20 kcal de energia. No calorímetro, encontra-se um bloco de gelo de massa 400 g, inicialmente à temperatura de –10 °C.

**Dados:** $L_{\text{fusão do gelo}}$ = 80 cal/°C;
$c_{\text{gelo}}$ = 0,5 cal/(g · °C);
$c_{\text{água}}$ = 1 cal/(g · °C);
$c_{\text{água}}$ = 1 g/mL.

Quando atingir o equilíbrio térmico, supondo-se a capacidade térmica do calorímetro desprezível, pode-se esperar que em seu interior se encontre:

a) gelo, à temperatura abaixo de 0 °C.
b) apenas gelo, à temperatura de 0 °C.
c) gelo e água, à temperatura de 0 °C.
d) apenas água, à temperatura de 0 °C.
e) água, à temperatura acima de 0 °C.

**59. E.R.** Em um calorímetro ideal, misturam-se 200 g de gelo a –40 °C com 100 g de água a uma temperatura θ.

**Dados:** calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C.

Determine:

a) a temperatura θ, para que no equilíbrio térmico coexistam massas iguais de gelo e de água;
b) a temperatura da água quando o gelo atinge 0 °C, considerando as condições do item **a**.

**Resolução:**

a) Se a mistura de gelo e água é feita em um calorímetro ideal, podemos escrever que:

$$Q_{\text{cedido (água)}} + Q_{\text{recebido (gelo)}} = 0$$

Como, no final, deve-se ter coexistência de gelo e de água, o equilíbrio térmico deve ocorrer à temperatura de 0 °C.
Portanto, desenvolvendo a equação, temos:

$$(m\,c\,\Delta\theta)_{água} + (m\,c\,\Delta\theta)_{gelo} + (m\,L_F)_{gelo\ fundido} = 0$$

Observe que para termos massas iguais de água e de gelo, no final, é necessário que 50 g de gelo sofram fusão, ficando 150 g de água e 150 g de gelo:

$$100 \cdot 1(0 - \theta) + 200 \cdot 0{,}50\,[0 - (-40)] + 50 \cdot 80 = 0$$

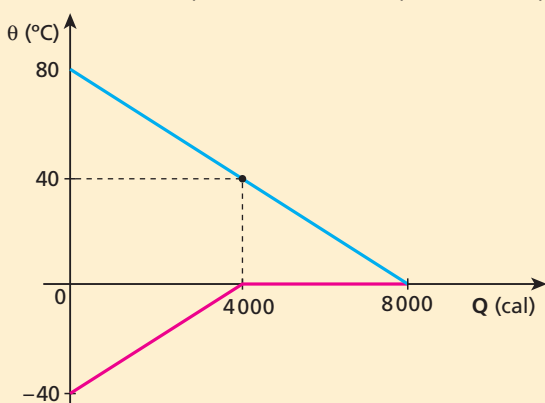
$$-100\theta + 4000 + 4000 = 0$$

$$100\theta = 8000 \Rightarrow \boxed{\theta = 80\ °C}$$

b) Observemos, pela resolução do item **a**, que o gelo precisou receber 4 000 cal para atingir 0 °C e mais 4000 cal para sofrer fusão em 50 g.
Portanto, a água perdeu apenas 4 000 cal até que o gelo atingisse 0 °C.

$$Q = m\,c\,\Delta\theta$$

$$4000 = 100 \cdot 1(80 - \theta_a) \Rightarrow \boxed{\theta_a = 40\ °C}$$

**Nota:**
- Graficamente, a resposta desse exercício pode ser dada por:

**60.** Em um recipiente de paredes adiabáticas, há 60 g de gelo fundente (0 °C). Colocando-se 100 g de água no interior desse recipiente, metade do gelo se funde. Qual é a temperatura inicial da água?
**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

**61.** Em um calorímetro ideal, misturam-se 200 g de gelo a 0 °C com 200 g de água a 40 °C.
**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.
Determine:
a) a temperatura final de equilíbrio térmico da mistura;
b) a massa de gelo que se funde.

**62.** (Mack-SP)
Calor específico da água líquida = 1 cal/(g °C)
Densidade da água líquida = 1,0 g/cm$^3$
Calor específico da água sólida (gelo) = 0,50 cal/(g °C)
Calor latente de fusão da água = 80 cal/g
Capacidade térmica do recipiente = 50 cal/°C

Durante a realização de certo experimento, um pesquisador necessitou de água líquida a 0 °C. Para obtê-la, pegou um recipiente contendo 400 cm$^3$ de água, que estava no interior de um refrigerador, à temperatura de 5 °C. Em seguida, dispondo de "pedrinhas" de gelo (água sólida) a –20 °C, com 5,0 g de massa cada uma, misturou algumas delas à água do recipiente e atingiu o seu objetivo. Desprezando-se as possíveis trocas de calor com o meio ambiente e considerando os dados da tabela acima, conclui-se que o número mínimo de "pedrinhas de gelo" misturadas à água do recipiente foi:
a) 4 b) 5 c) 15 d) 36 e) 45

**63. E.R.** No interior de um calorímetro ideal, são colocados 40 g de água a 40 °C e um bloco de gelo de massa 10 g, à temperatura de –20 °C. Qual a temperatura final de equilíbrio térmico?
**Dados:** calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C.

**Resolução:**

Nas questões que envolvam uma mistura de água com gelo, podemos utilizar um roteiro para facilitar a resolução. Para isso, vamos estabelecer a temperatura de 0 °C como referência, isto é, vamos levar o sistema (água + gelo) para 0 °C e, em seguida, saímos dessa temperatura para o resultado final.
É importante lembrar que calor cedido (que sai do sistema) é negativo, e calor recebido (que entra no sistema) é positivo.
Atenção para o roteiro:

1) Resfriar a água até 0 °C

$Q_1 = m\,c\,\Delta\theta = 40 \cdot 1{,}0 \cdot (0 - 40)$ cal $\quad Q_1 = -1600$ cal
O valor de $Q_1$ indica o calor que a água fornece para chegar a 0 °C.

2) Aquecer o gelo até 0 °C

$Q_2 = m\,c\,\Delta\theta = 10 \cdot 0{,}50 \cdot [0 - (-20)]$ cal $\quad Q_2 = +100$ cal
O valor de $Q_2$ indica o calor que o gelo recebe para chegar a 0 °C.
Observe que a soma $Q_1 + Q_2$ é igual a –1 500 cal. Isso quer dizer que a água e o gelo estão à temperatura de 0 °C e ainda estão sobrando 1500 cal.
Lembre-se de que o sistema está em um calorímetro ideal e, assim, não pode ceder calor para o exterior nem receber calor dele.

3) Derreter o gelo (ou solidificar a água)

$Q_3 = m\,L_F = 10 \cdot 80$ cal $\quad Q_3 = +800$ cal
A soma $Q_1 + Q_2 + Q_3$ é igual a –700 cal (observe que o sinal negativo indica calor cedido, retirado do sistema). Então, ainda sobram 700 cal para retornar.

4) Aquecer toda a água usando a energia que sobrou

Se tivesse faltado calor, isto é, se a soma de $Q_1 + Q_2 + Q_3$ fosse um valor positivo, em vez de aquecer a água deveríamos esfriar todo o gelo. Nesse caso, no item 3, a água teria sido solidificada, liberando calor.

$$Q_4 = m\,c\,\Delta\theta$$

**Atenção:** o valor de $Q_4$ é a soma de $Q_1 + Q_2 + Q_3$ com o sinal trocado, pois o calor foi cedido (negativo) e agora está "voltando", sendo calor recebido (positivo).

$$+700 = (40 + 10) \cdot 1{,}0 \cdot (\theta_f - 0)$$

$$\boxed{\theta_f = 14\ °C}$$

**64.** Em um calorímetro ideal são colocados 200 g de gelo fundente (0 °C) com 200 g de água, também a 0 °C. Após algum tempo, podemos afirmar que:
a) no equilíbrio térmico, vamos ter apenas água a 0 °C.
b) o gelo, sempre que entra em contato com a água, sofre fusão;
c) no final vamos ter apenas gelo a 0 °C.
d) as massas de água e gelo não se alteram, pois ambos estando a 0 °C não haverá troca de calor entre eles.
e) quando o calor sai da água, provoca sua solidificação; esse calor, no gelo, provoca fusão.

**65.** No interior de um vaso de Dewar de capacidade térmica desprezível, são colocados 500 g de água a 78,4 °C com 100 g de gelo fundente (0 °C). No equilíbrio térmico, qual será a temperatura do sistema?
**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

**66.** Em um calorímetro ideal, são colocados 100 g de água a 60 °C e 200 g de gelo fundente. Se as trocas de calor ocorrem apenas entre o gelo e a água, no final ainda vamos ter gelo? Em caso afirmativo, que massa de gelo ainda restará?
**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

**67.** (Vunesp-SP) *Sabe-se que, no Alasca, as larvas de mosquito passam normalmente o inverno congeladas no gelo de poças de água e que aguentam repetidos degelos e congelamentos.*
*Verificou-se que o líquido no interior da larva do mosquito transformava-se em sólido a −15 °C.*
(Adaptado de Knut Schmidt-Nielsen. **Fisiologia animal**. São Paulo: Edgard Blücher e Universidade de São Paulo, 1972. p. 47)
Um bloco de gelo, de massa 20 g e à temperatura de −15 °C é colocado em um calorímetro, de capacidade térmica desprezível, contendo 50 g de água a 40 °C.
**São dados:**
calor específico sensível do gelo = 0,50 cal/g°C
calor específico sensível da água = 1,0 cal/g°C
calor específico latente de fusão do gelo = 80 cal/g
Após atingido o equilíbrio térmico, haverá no calorímetro água
a) a 3,6 °C
b) a 12,5 °C
c) a 24 °C
d) com 10 g de gelo, a 0 °C
e) com 5 g de gelo, a 0 °C

**68.** Em um recipiente adiabático, de capacidade térmica desprezível, são colocados 400 g de água a 10 °C e 200 g de gelo a –15 °C. Se após algum tempo, estabelecido o equilíbrio térmico, introduzirmos nesse recipiente um termômetro ideal, que temperatura ele irá registrar?
**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

**69.** Quando são misturados 40 g de água a 10 °C e 360 g de gelo a –30 °C, qual é a temperatura final de equilíbrio térmico? Suponha que o gelo e a água não troquem calor com o recipiente nem com o meio externo.
**Dados:** calor específico do gelo = 0,50 cal/g °C;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C.

# Bloco 4

## 10. A vaporização e a liquefação

Em nosso dia a dia, é comum observarmos fenômenos que envolvam liquefação ou vaporização, principalmente da água.

Lembremo-nos de que:

**Liquefação** ou **condensação** é a passagem de uma substância do estado gasoso para o estado líquido. Esse processo é **exotérmico**, isto é, ocorre com liberação de calor.

Como exemplos desse tipo de fenômeno, podemos citar os azulejos molhados de um banheiro depois que tomamos um banho quente; uma garrafa de refrigerante, que fica molhada em sua superfície externa após ter sido retirada da geladeira; a "fumaça" que se forma perto de nossa boca quando falamos em um dia muito frio; os vidros embaçados de um automóvel quando estão fechados em um dia de chuva.

Lembremo-nos ainda de que:

**Vaporização** é a passagem de uma substância do estado líquido para o estado gasoso. Esse processo é **endotérmico**, isto é, ocorre com recebimento de calor.

Como exemplos desse fenômeno, podemos lembrar da água fervendo em uma chaleira, quando vamos preparar um café; do álcool, que, se for colocado em uma superfície, lentamente vai "desaparecendo"; do éter em um recipiente de vidro destampado, que se volatiliza rapidamente.

Os dois principais processos de vaporização são a **ebulição** e a **evaporação**.

### Ebulição

Quando fornecemos calor a uma substância que se encontra no estado líquido, aumentamos a energia de agitação de suas partículas, isto é, elevamos sua temperatura. Entretanto, dependendo da substância e da pressão a que está sujeita, existe um limite de aumento de temperatura, além do qual a estrutura molecular do líquido sofre mudanças. A partir dessa temperatura-limite, a energia recebida pelo líquido é usada para a mudança na estrutura molecular, e o líquido é transformado em vapor. A esse fenômeno chamamos de **ebulição**.

A maior parte da massa líquida participa desse processo, ocorrendo rápida produção de vapores em muitos pontos desse líquido. Esses vapores e gases existentes no interior do líquido se expandem e, ao escaparem pela superfície, proporcionam a agitação violenta que é observada.



TF2-P1T3_045a083_5P.indd 61 17/08/12 18:28

É importante destacar que existe uma temperatura determinada para a ebulição de um líquido. Essa temperatura depende apenas da natureza do líquido e da pressão a que ele está sujeito.

Resumindo, podemos afirmar que a ebulição de um líquido ocorre quando a sua pressão de vapor iguala-se à pressão externa, a aplicada em sua superfície. A partir dessa situação os vapores conseguem escapar do interior do líquido, fato que caracteriza a ebulição. Portanto, quando mudamos a pressão externa, para ocorrer a ebulição, a pressão de vapor do líquido deve ser alterada, isso é obtido por meio de uma variação na temperatura do líquido. Assim, um mesmo líquido pode entrar em ebulição em diferentes temperaturas, desde que a pressão externa seja mudada.

É de verificação experimental que a pressão atmosférica varia de local para local, diminuindo quando a altitude aumenta. Por isso, a temperatura de ebulição de uma substância, que depende da pressão, também varia de local para local, aumentando conforme aumenta a pressão. Esse fato ocorre porque, sob pressões maiores, o escape dos vapores torna-se mais difícil.

A água, por exemplo, entra em ebulição em Santos (SP) ao nível do mar, a 100 °C, mas, no pico do Monte Everest (altitude = 8 882 m), ela ferve a 71 °C; em Brasília (DF) (altitude = 1152 m), a 96 °C; e, ao nível do Mar Morto (altitude = –395 m), a 101 °C.

Como o astronauta está praticamente no vácuo, a pressão existente é insuficiente para conter as partículas do líquido, que entra em um estado de ebulição violenta.

Da observação desse fato, o ser humano inventou a panela de pressão, que, por causa do aumento de pressão, faz a água ferver a uma temperatura mais elevada do que se estivesse em um recipiente destampado, permitindo assim o cozimento mais rápido dos alimentos.

## Por que a panela de pressão cozinha mais rápido os alimentos?

A panela de pressão cozinha muito mais rápido os alimentos porque a água, confinada no interior da panela, fica sujeita a uma pressão maior do que a pressão atmosférica, entrando em ebulição a temperaturas superiores a 100 °C. Estando a uma temperatura maior, o alimento cozinha mais depressa.

O inventor dessa panela foi o físico francês Denis Papin (1647-c. 1712), que, em 1679, ao ser empossado como membro da Sociedade Real de Ciências da Inglaterra, preparou um jantar com uma panela diferente, fechada, para impressionar seus futuros colegas. Papin sabia do perigo de aquecer água em um recipiente fechado, pois a força exercida pelo vapor aquecido poderia “explodir” o recipiente. Por isso, ele criou uma válvula que permitia o escape de parte desse vapor, evitando que a pressão passasse de certo valor-limite. Evidentemente, esse sistema era rústico, mas serviu de modelo para as panelas que utilizamos atualmente.

Nas modernas panelas de pressão, a válvula permite a saída de vapor de água quando a pressão interna de vapor atinge valores próximos de 2,0 atm. Essa pressão interna é mantida quase constante, e a água entra em ebulição por volta de 120 °C. Isso traz economia no tempo de cozimento dos alimentos.

A fusão dos sólidos de estrutura cristalina e a ebulição dos líquidos em geral obedecem a três leis básicas:

**1ª Lei**

Para uma determinada pressão, cada substância pura possui uma temperatura de fusão e outra de ebulição.

Sob pressão normal, por exemplo, a água sofre fusão a 0 °C e entra em ebulição a 100 °C, enquanto o álcool se solidifica a −117,3 °C e entra em ebulição a 78,5 °C.

**2ª Lei**

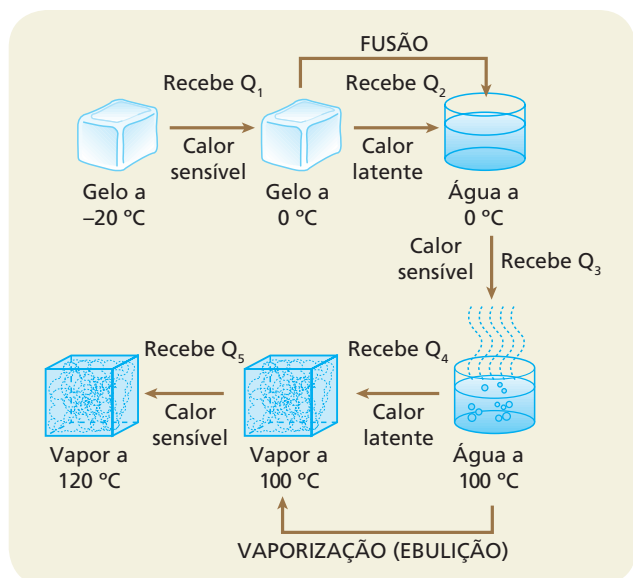
Para uma mesma substância pura, as temperaturas de fusão e de ebulição variam com a pressão.

A água ao nível do mar (altitude zero), por exemplo, entra em ebulição a 100 °C e, em São Paulo (altitude = 731 metros), a aproximadamente 98 °C.

**3ª Lei**

Se durante a fusão ou a ebulição de uma substância pura a pressão permanecer constante, sua temperatura também permanecerá constante.

Salvo instrução em contrário, consideraremos que durante a mudança de estado de uma substância pura a pressão permanece constante e igual à pressão atmosférica normal.

Para melhor entendermos as etapas do aquecimento de uma substância pura qualquer, vamos considerar um bloco de gelo de massa **m** sendo aquecido de −20 °C a 120 °C, sob pressão normal.

Evidentemente, ao atingir a temperatura de 120 °C, não teremos mais gelo, e sim vapor de água.

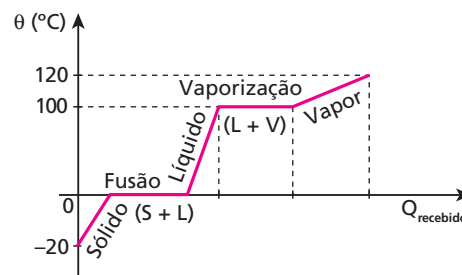
Sendo $L_F$ o calor latente de fusão; $L_v$ o calor latente de vaporização; $c_g$ o calor específico do gelo; $c_a$ o calor específico da água e o $c_v$ o calor específico do vapor, podemos escrever:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$

Em que:

$$Q = (m\,c\,\Delta\theta)_{gelo} + (m\,L_F)_{gelo} +$$

$$+ (m\,c\,\Delta\theta)_{água} + (m\,L_v)_{água} + (m\,c\,\Delta\theta)_{vapor}$$

Graficamente, o evento está representado na figura a seguir.

## Evaporação

A **evaporação**, ao contrário da ebulição, não depende de uma temperatura determinada para acontecer. É um processo lento, que ocorre apenas na superfície livre de um líquido.

Nesse processo, as partículas que escapam são aquelas que têm energia cinética maior que a da maioria, energia suficiente para se livrarem das demais moléculas do líquido. Por causa disso, a energia média das partículas remanescentes e a temperatura do líquido diminuem.

A rapidez com que ocorre a evaporação de um líquido depende de cinco fatores:

### 1º) Natureza do líquido

Os líquidos mais voláteis evaporam mais rapidamente. O éter, por exemplo, nas mesmas condições, evapora mais rápido que a água.

### 2º) Temperatura

O aumento da temperatura favorece a evaporação. Apesar de a evaporação não depender da temperatura para acontecer (a água, por exemplo, evapora tanto a 5 °C como a 30 °C ou a 80 °C), podemos observar que a 80 °C a água evapora mais depressa do que a 30 °C, e mais ainda do que a 5 °C.

### 3º) Área da superfície livre

Já que a evaporação ocorre apenas na superfície livre do líquido, quanto maior for essa superfície livre, mais rápida será a evaporação.

### 4º) Pressão na superfície livre

Um aumento de pressão na superfície livre dificulta o escape das partículas do líquido, diminuindo a rapidez da evaporação. Sob uma pressão menor, é maior a evaporação.

### 5º) Pressão de vapor do líquido

A quantidade de vapor do próprio líquido já existente nas proximidades de sua superfície livre influi

na rapidez da evaporação, fato que abordaremos no item a seguir.

Fabio Colombini

Em regiões quentes, onde existe água em amplas superfícies livres, a precipitação pluviométrica também é grande. A evaporação da água é mais rápida, formando nuvens que se precipitam em forma de chuva. É por isso que nesses locais a vegetação é mais abundante.

### Perigo na estrada

Thinkstock/Getty Images

O nevoeiro proporciona um efeito magnífico nesta fotografia da ponte Golden Gate, localizada em São Francisco, Estados Unidos.

A visibilidade nas estradas pode ser prejudicada por nevoeiros, que impedem a visão dos carros e caminhões que trafegam à nossa frente. Esse fato já provocou alguns dos mais graves acidentes automobilísticos, com perdas de muitas vidas. Esses nevoeiros podem aparecer em vários locais do Brasil, dependendo das condições climáticas. No entanto, algumas regiões de serra, principalmente no Sudeste e no Sul, onde encontramos temperaturas mais baixas, a frequência é maior.

Alamy/Other Images

Nesta fotografia, podemos observar como um nevoeiro pode prejudicar a visibilidade em uma estrada.

Como são formados esses nevoeiros? Nós sabemos que, durante o dia, os raios solares são absorvidos pela terra e pela água existente, aquecendo-as. Parte dessa água passa para o estado gasoso e sobe. Nos dias normais esse vapor transforma-se em nuvens a uma distância razoável do solo, não prejudicando o trânsito de veículos. No entanto, no alto das serras, em certas épocas do ano, o ar pode estar gelado, proporcionando a condensação de pequenas gotas de água, que, por serem muito leves, permanecem em suspensão, refletindo a luz que nelas incide; é o nevoeiro baixo, ao nível do chão. Portanto, são essas gotículas de água misturadas com o ar as responsáveis pela formação do nevoeiro.

As autoridades recomendam, nesses casos, que você:

- reduza a velocidade do veículo;
- ligue os faróis baixos;
- se não estiver enxergando bem, pare o carro, de preferência em um posto de serviços ou policiamento;
- se precisar parar no acostamento, ligue o pisca-alerta, coloque o triângulo e, se possível, saia do carro, afastando-se da estrada.

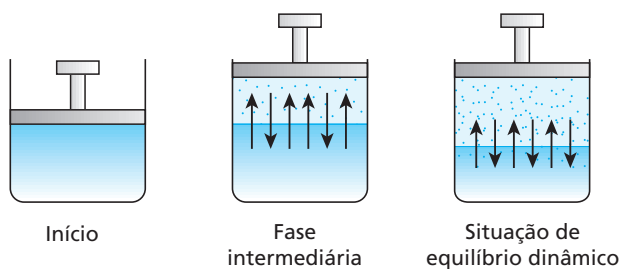
## 11. Pressão de vapor

Considere um recipiente cilíndrico, transparente e dotado de um êmbolo. Vamos supor que a temperatura do sistema seja constante.

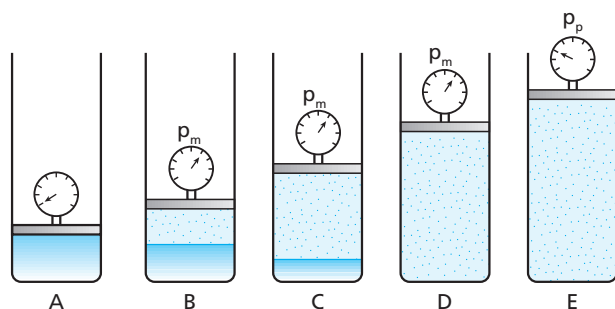
Imaginemos que haja, dentro desse recipiente, um líquido bastante volátil, o éter, por exemplo. Inicialmente, o êmbolo está em contato direto com a superfície livre do líquido.

Quando levantamos o êmbolo, a região de vácuo que se forma entre ele e o líquido começa a ser ocupada por partículas desse líquido, que vaporiza. Algumas dessas partículas, no entanto, acabam sendo recapturadas pelo líquido. No início, o número de partículas que saem é maior que o das que voltam. A partir de um determinado instante, en-

tretanto, o aumento da concentração de vapor vai provocar um equilíbrio dinâmico, quando o número de partículas que voltam para o líquido torna-se igual ao das que saem, em cada unidade de tempo.

Atingida a situação de equilíbrio, o ambiente gasoso fica saturado desse vapor, denominado **vapor saturante**, e sua pressão para de aumentar, sendo chamada de **pressão máxima de vapor** ($p_m$).

Se levantarmos um pouco mais o êmbolo, observaremos que o equilíbrio vapor-líquido será rompido. Voltará a acontecer vaporização, uma vez que a quantidade de líquido torna a diminuir. Isso se dá até que novamente se estabeleça o equilíbrio dinâmico entre o vapor e o líquido, e a pressão, que temporariamente diminuiu, volte ao seu valor máximo.

É evidente que, se o tubo for suficientemente longo, quando levantarmos o êmbolo, a situação descrita se repetirá até que a última gota de líquido evapore. A partir daí, a elevação do êmbolo provocará uma queda da pressão, e ela não voltará mais ao valor máximo, já que não existe mais líquido para vaporizar. O vapor, nessas condições, é denominado **vapor não saturante**.

Resumindo e esquematizando o experimento descrito com o éter, a uma temperatura θ constante, temos:

A – Situação inicial.

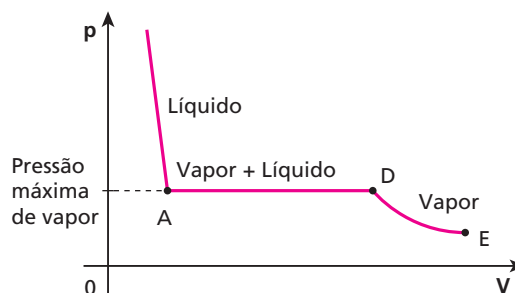
B – Situação de equilíbrio entre vapor e líquido. O vapor é saturante e a pressão é a pressão máxima de vapor ($p_m$).

C – Situação idêntica à anterior (observe que a quantidade de líquido diminuiu).

D – Supondo que esta seja a situação em que a última gota de líquido vaporiza, temos pressão máxima de vapor e vapor saturante seco, uma vez que não existe mais a fase líquida.

E – Situação a partir da qual a pressão do vapor passa a diminuir quase que na razão inversa do volume. Temos aí vapor não saturante. A pressão é menor que a máxima, sendo denominada pressão parcial de vapor ($p_p$).

No gráfico abaixo, representamos a variação da pressão (**p**) do vapor, em função do respectivo volume (**V**).

O valor da pressão máxima de vapor depende de dois fatores: da substância e da temperatura em que foi realizado o experimento. Essa pressão máxima de vapor se eleva com a temperatura.

**Notas:**

- Observe que a rapidez de evaporação anula-se quando o ambiente gasoso torna-se saturado pelo vapor do líquido. Contudo, essa rapidez é tanto maior quanto menor é a pressão do vapor já existente.
- A ebulição ocorre à temperatura em que a pressão máxima de vapor do líquido iguala-se à pressão ambiente. A pressão máxima do vapor de água, por exemplo, é igual a 760 mm Hg a 100 °C. Por isso, em pressão atmosférica normal (760 mm Hg), a água entra em ebulição a 100 °C. Já no pico do Monte Everest, por exemplo, onde a pressão atmosférica vale aproximadamente 240 mm Hg (devido à altitude), a água entra em ebulição a 71 °C, temperatura em que sua pressão máxima de vapor também é de 240 mm Hg.

Note, então, que um líquido entra em ebulição sempre que a pressão externa exercida em sua superfície torna-se igual à sua pressão máxima de vapor.

Se, a partir da situação **E**, em que temos vapor não saturante, resolvermos comprimir o vapor, descendo o êmbolo, notaremos que a pressão aumentará, quase que na razão inversa do volume. Entretanto, isso será observado somente até a situação **D**, quando a pressão atingirá seu valor máximo. A partir daí, por mais que o vapor seja comprimido, sua pressão não mais aumentará, mantendo-se igual à máxima ($p_m$). Ocorrerá liquefação, até que, na situação **A**, todo o vapor terá se transformado em líquido. Se continuarmos a compressão, a variação de volume do líquido será insignificante, uma vez que os líquidos são praticamente incompressíveis.

# Leitura

## A chuva e a umidade relativa do ar

A chuva é uma precipitação atmosférica constituída de gotas de água, que podem limpar o ar poluído, refrescar um dia muito quente ou mesmo promover o desenvolvimento de plantas, como as flores que embelezam o mundo ou aquelas com as quais nós e outros animais nos alimentamos.

Quando em excesso, a chuva pode provocar inundações, capazes de destruir o que foi construído pelo ser humano e causar a morte de diversos seres vivos.

Afinal, como ocorre esse fenômeno físico chamado chuva?

Na superfície da Terra, existe uma grande quantidade de água nos mares, rios e lagos. Na evaporação, o vapor é misturado ao ar existente na região. A concentração desse vapor define o estado higrométrico ou umidade da atmosfera.

A **umidade relativa do ar** (**U**) é a razão entre a massa de vapor de água (**m**) existente em certo volume de ar e a massa de vapor de água (**M**) que provocaria a saturação desse volume de ar, na mesma temperatura. O valor da grandeza **U** também pode ser determinado por meio da razão entre a pressão exercida pelo vapor existente no ar e a pressão (ou tensão) máxima possível de vapor, na temperatura considerada. Essa pressão máxima de vapor é bem definida e pode ser encontrada em uma tabela, como a que está abaixo:

| Temperatura (°C) | Pressão máxima de vapor de água (mm Hg) |
|---|---|
| 0 | 4,58 |
| 5 | 6,54 |
| 10 | 9,21 |
| 15 | 12,79 |
| 20 | 17,54 |
| 25 | 23,77 |
| 30 | 31,84 |
| 40 | 55,36 |
| 50 | 92,60 |
| 60 | 149,51 |
| 70 | 223,85 |
| 80 | 355,34 |
| 90 | 525,94 |
| 100 | 760,00 |

Masterfile/Other Images - Brasil

Criança divertindo-se com as gotas da chuva.

Observemos que o máximo valor de **U** é a unidade. Isso ocorre quando o ar está saturado de vapor de água e m = M. Se U = 0,30, por exemplo, devemos entender que o vapor de água existente naquele volume de ar corresponde a 30% do vapor que ocasionaria sua saturação.

Ao ocorrer a saturação de certo volume de ar, o vapor de água excedente se condensa e se precipita em forma de neblina ou de pequenas gotas de água, a chuva. A quantidade de água que o ar é capaz de absorver, antes da saturação, depende da temperatura, aumentando progressivamente com ela.

É interessante observar que o ser humano sente-se melhor em local de baixa umidade, mesmo em temperaturas elevadas. Em um ambiente onde o ar é mais seco (baixa umidade), a sudorese é muito menor e a evaporação do suor é mais rápida, causando um maior resfriamento da pele. Nessas condições, a pessoa pode suportar temperaturas superiores a 37 °C. Já em um ambiente de grande umidade, a sudorese é maior e o suor demora a evaporar, ocasionando bastante desconforto. Nessas condições, uma temperatura de 25 °C pode parecer sufocante para as pessoas. O conforto, portanto, depende tanto da temperatura quanto da umidade relativa do ar.

Gerson Gerloff/Pulsar Imagens

Casas inundadas pelo excesso de chuva.

## Exercícios

nível 1

**70.** Analise as afirmativas dadas a seguir:

(01) A temperatura de ebulição da água é sempre 100 °C, independentemente de outras condições.

(02) No interior de uma panela de pressão fechada, a água entra em ebulição a uma temperatura maior que 100 °C.

(04) No Rio de Janeiro (altitude zero), a água entra em ebulição a 100 °C em uma panela sem tampa; em São Paulo (altitude 731 m), a mesma água ferveria a uma temperatura maior que 100 °C.

(08) O aumento de pressão na superfície da água dificulta a evaporação, mas não altera sua temperatura de ebulição.

(16) Na evaporação de um líquido, são as partículas de maior nível de energia que saem pela superfície livre, provocando uma diminuição de temperatura.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

**71.** (Cefet-MG) As temperaturas de ebulição da água nas cidades **A** e **B** são, respectivamente, 96 °C e 100 °C. É correto afirmar que:

a) a altitude de **B** é maior que a de **A**.
b) as duas cidades estão ao nível do mar.
c) a cidade **A** está acima do nível do mar.
d) a pressão atmosférica em **A** é maior que em **B**.
e) as duas cidades possuem a mesma pressão atmosférica.

**72.** (Cefet-SC) Considere os trechos abaixo, uma pergunta de uma leitora ao químico Robert Wolke e a resposta deste:

**Pergunta:** "Meu marido, minha filha e eu vamos voltar a La Paz, Bolívia, para adotar outro bebê. Por causa da altitude elevada, a água fervente pode levar horas para cozinhar as coisas. Há alguma regra geral a respeito de quanto tempo leva para cozinhar alguma coisa a altitudes diversas? E ferver as mamadeiras a essa altitude mata os micróbios?

**Resposta:** "A altitude de La Paz vai de 3 250 a 4 mil metros acima do nível do mar..." Então, a 4 mil metros, a água vai ferver a 86 °C. Temperaturas acima de 74 °C são consideradas suficientes para matar a maior parte dos micróbios..."

(In WOLKE, R.L. *O que Einstein disse a seu cozinheiro:* a ciência na cozinha. Rio de Janeiro: J Zahar, 2002.)

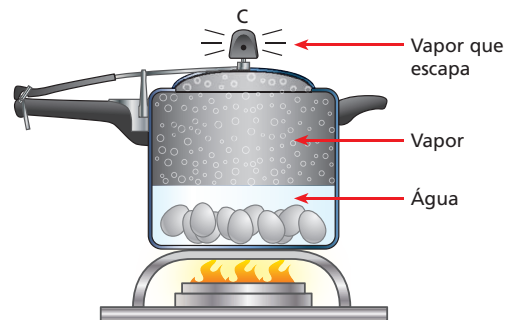
Com base nas informações contidas no texto e considerando que, ao nível do mar, a água pura entra em ebulição a uma temperatura de 100 °C, pode-se concluir que, a cada 300 metros acima da referência do mar, a temperatura de ebulição da água diminui em média, aproximadamente:

a) 0,05 °C
b) 1,05 °C
c) 0,06 °C
d) 1,16 °C
e) 0,02 °C

**73.** Na coluna da esquerda temos alguns locais com suas respectivas altitudes; na da direita, temperaturas de ebulição da água, nesses locais, porém fora de ordem. Associe as duas colunas e identifique a alternativa correta.

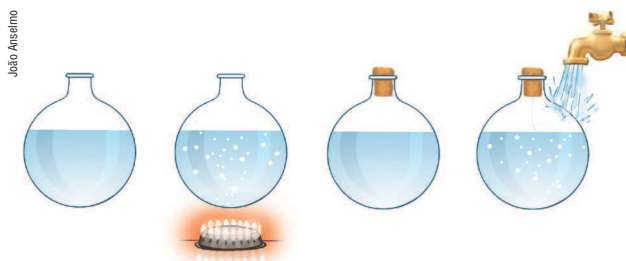
| | |
|---|---|
| (A) Quito (2 851 m) | (I) 101 °C |
| (B) Monte Everest (8 882 m) | (II) 90 °C |
| (C) Mar Morto (−395 m) | (III) 71 °C |
| (D) Brasília (1 152 m) | (IV) 96 °C |

a) AI; BII; CIII; DIV.
b) AII; BIII; CI; DIV.
c) AIII; BII; CI; DIV.
d) AII; BIII; CIV; DI.
e) AIV; BIII; CI; DII.

**74.** As chamadas "panelas de pressão" são quase totalmente fechadas, a não ser por uma pequena abertura, sobre a qual encaixamos um pequeno corpo **C** (ver figura) que faz com que a pressão interna seja maior que a pressão atmosférica. Quando colocamos a panela sobre a chama, inicialmente ocorre a evaporação da água, fazendo com que, aos poucos, vá aumentando a pressão do vapor e, consequentemente, a pressão interna, que pode chegar até a 2 atm.

Nessas condições de pressão, começa a ebulição a uma temperatura que é

a) igual a 100 °C.
b) maior que 100 °C.
c) 80 °C.
d) menor que 100 °C.
e) dependente da temperatura da panela.

**75.** Durante uma aula experimental, o professor de Física mostrou uma situação, envolvendo a ebulição de água, que intrigou seus alunos. Pegou um recipiente de vidro refratário, que pode ser aquecido e resfriado sem que se quebre, e de boca estreita, que pode ser bem fechado com uma rolha. Introduziu água em seu interior, ocupando pouco mais de 70% do seu volume interno. Fazendo manuseio de forma adequada, deixando aberto o recipiente, passou a aquecer a água na chama de um pequeno fogão. Quando a água entrou em ebulição, o sistema foi retirado da fonte térmica e bem fechado por uma rolha. Os alunos observam que a água parou de ferver. Em seguida, o professor abriu a torneira da pia e colocou o recipiente fechado em contato com a água fria. Para a surpresa dos alunos, a água existente no interior da vasilha voltou a entrar em ebulição.

João Anselmo

O professor esperou algum tempo para que os alunos conversassem, tentando explicar o ocorrido, e cobrou de três deles uma explicação. A seguir, encontramos as respostas dadas pelos alunos **A**, **B** e **C**.

Aluno **A**: Quando a água ferveu, o vapor liberado expulsou todo o ar do interior do recipiente que foi hermeticamente fechado. Na ausência de ar, os líquidos fervem facilmente.

Aluno **B**: Na realidade a água não ferveu. No resfriamento sofrido,

bolhas de ar quente que estavam no interior do líquido escaparam, provocando uma falsa ebulição.
Aluno **C**: No resfriamento do sistema, a pressão de vapor no seu interior diminui mais rapidamente do que a temperatura da água. Com pressão menor na sua superfície, a água voltou a ferver.
Considerando a letra **V** para uma afirmativa verdadeira e **F** para uma falsa, assinale o conjunto correto de letras, na sequência de **A** para **C**.
a) FFF b) FVF c) VFV d) FFV e) VVF

**76.** (Ufes) Os cozinheiros sabem que um bom pudim deve ser cozido em *banho-maria*: a forma contendo o pudim é mergulhada em um recipiente no qual se mantém água fervendo. A razão física para esse procedimento é que:
a) o cozimento se dá à pressão controlada.
b) o cozimento se dá à temperatura controlada.
c) a água é um bom isolante térmico.
d) o peso aparente do pudim é menor, devido ao empuxo (princípio de Arquimedes).
e) a expansão volumétrica do pudim é controlada.

**77.** Em um calorímetro ideal, encontramos 30 g de água a 20 °C, sob pressão normal. Calcule a quantidade de calor que esse sistema deve receber até que toda a água se transforme em vapor.
**Dados:** calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de vaporização da água = 540 cal/g.

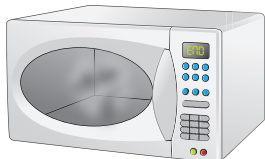
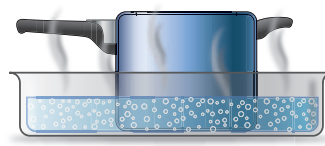
**78.** Um quilograma de gelo a –50 °C é aquecido, transformando-se em vapor a 100 °C.
São conhecidos: calor específico do gelo = 0,5 cal/g °C; calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g; calor específico da água = = 1 cal/g °C; calor latente de vaporização da água = 540 cal/g.
As diversas fases do processo são: aquecimento e fusão do gelo; aquecimento e vaporização da água.
Atribuindo o algarismo 1 ao processo que requer o maior número de calorias, o algarismo 2 ao que vem em segundo lugar e assim por diante, de cima para baixo, forma-se o número:
a) 1234.
b) 4231.
c) 2413.
d) 4321.
e) 1324.

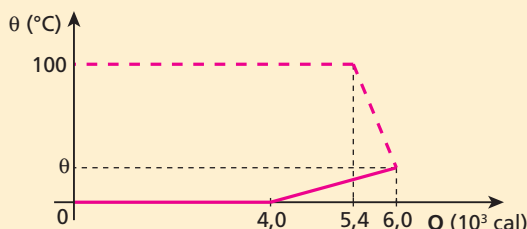
**79.** Quando alguém vai tomar um café muito quente, costuma assoprar a superfície do líquido. Com isso, o café esfria mais depressa, porque:
a) o ar expelido pela pessoa é mais frio que o café e retira calor do sistema.
b) o ar expelido pela pessoa evita que o calor saia pela superfície livre, forçando-o a sair pelas faces da xícara.
c) o ar expelido retira o vapor de água existente na superfície do café, reduzindo a pressão de vapor e, desse modo, favorecendo a evaporação.
d) o ar expelido combina quimicamente com o vapor de água, retirando energia térmica do café.
e) é um costume que vem do século XVII, da Corte dos reis da França, quando os nobres descobriram o café.

**80.** (UFF-RJ) Ao usar um ferro de passar roupa, uma pessoa, em geral, umedece a ponta do dedo em água antes de encostá-lo rapidamente na base aquecida do ferro, para testar se ela já está suficientemente quente. Ela procede dessa maneira, com a certeza de que não queimará a ponta de seu dedo. Isso acontece porque, em relação aos demais líquidos, a água tem:
a) um baixo calor específico.
b) um comportamento anômalo na sua dilatação.
c) uma densidade que varia muito ao se evaporar.
d) uma elevada temperatura de ebulição.
e) um elevado calor latente de vaporização.

**81.** (UFV-MG) Colocando água gelada no interior de um copo de vidro seco, observa-se, com o passar do tempo, a formação de gotículas de água na parede externa do copo. Isso se deve ao fato de que:
a) a água gelada atravessa a parede do copo.
b) as gotas d'água sobem pela parede interna do copo alcançando a parede externa, onde se depositam.
c) a água fria cria microfissuras na parede do copo de vidro, pelas quais a água passa para fora.
d) o vapor-d'água presente na atmosfera se condensa.
e) o copo é de vidro.

## Exercícios — nível 2

**82.** (PUC-SP) Um cubo de gelo de massa 100 g e temperatura inicial −10 °C é colocado no interior de um micro-ondas. Após 5 minutos de funcionamento, restava apenas vapor-d'água.
Considerando que toda a energia foi totalmente absorvida pela massa de gelo (desconsidere qualquer tipo de perda) e que o fornecimento de energia foi constante, determine a potência utilizada, em W.
São dados:
Pressão local = 1 atm
Calor específico do gelo = 0,5 cal · $g^{-1}$ · $°C^{-1}$
Calor específico da água líquida = 1,0 cal · $g^{-1}$ · $°C^{-1}$
Calor latente de fusão da água = 80 cal · $g^{-1}$
Calor latente de vaporização da água = 540 cal · $g^{-1}$
1 cal = 4,2 J
a) 1 008
b) 896
c) 1 015
d) 903
e) 1 512

**83.** (Vunesp-SP) Para recuperação dos movimentos da mão após o tratamento de traumas, utiliza-se o calor da parafina derretida, mergulhando o membro lesionado rapidamente nessa substância derretida, obtendo-se dessa ação uma fina luva de parafina. Para não ter que ficar indo e voltando da fisioterapia, já que morava no litoral, uma pessoa improvisou um parafineiro, reutilizando o corpo de uma antiga panela de pressão. A panela colocada em uma forma com água fervente fazia a parafina em seu interior se manter à temperatura constante de 60 °C.
Dados:
$L_{ebulição}$ = 540 cal/g
$c_{parafina}$ = 0,6 cal/(g · °C)

a) Suponha que a forma contendo 2 000 g de água já à temperatura de 100 °C seja colocada sobre a boca acesa de um fogão, sem que a panela contendo parafina estivesse em seu interior. Admitindo-se que toda energia térmica proveniente da boca do fogão seja transferida para a água e que seja desprezível qualquer troca de calor da água com a forma ou da água com o ar, sabendo-se que a cada minuto o calor fornecido é capaz de transformar em vapor de água a 100 °C o equivalente a 1% da água contida inicialmente na forma, determine o fluxo médio do calor da boca do fogão, em cal/s.
b) Terminada a sessão de fisioterapia, apagou-se o fogo. Sabendo-se que a parafina utilizada torna-se sólida à temperatura de 40 °C, calcule a quantidade de calor que a parafina deverá perder para o meio que a circunda, para que ela atinja a temperatura necessária para iniciar sua solidificação, admitindo-se que ainda haja no interior da panela a quantidade de 1 000 g de parafina.

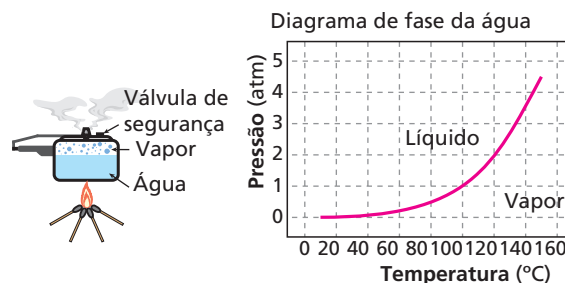
**84. E.R.** Em um calorímetro ideal, colocam-se as massas $m_v$ de vapor de água a 100 °C e $m_g$ de gelo a 0 °C, sob pressão normal. O gráfico mostra como variaram as temperaturas dessas massas em função das quantidades de calor trocadas:

Sendo o calor latente de fusão do gelo 80 cal/g, o de vaporização da água 540 cal/g e o calor específico de água 1 cal/g °C, determine:
a) a massa $m_v$ de vapor de água;
b) a massa $m_g$ de gelo;
c) a temperatura θ de equilíbrio térmico.

**Resolução:**
No gráfico, o patamar superior representa a liquefação do vapor de água, enquanto o patamar inferior representa a fusão do gelo. Sendo assim:
a) $Q = m_v L_v \Rightarrow 5{,}4 \cdot 10^3 = m_v \cdot 540 \Rightarrow \boxed{m_v = 10 \text{ g}}$
b) $Q = m_g L_F \Rightarrow 4{,}0 \cdot 10^3 = m_g \cdot 80 \Rightarrow \boxed{m_g = 50 \text{ g}}$
c) Na observação do gráfico, notamos que a água proveniente do derretimento do gelo recebeu $2{,}0 \cdot 10^3$ cal para atingir a temperatura θ. Daí, temos:
$$Q = m\,c\,\Delta\theta$$
$$2{,}0 \cdot 10^3 = 50 \cdot 1\,(\theta - 0) \Rightarrow \boxed{\theta = 40\ °\text{C}}$$

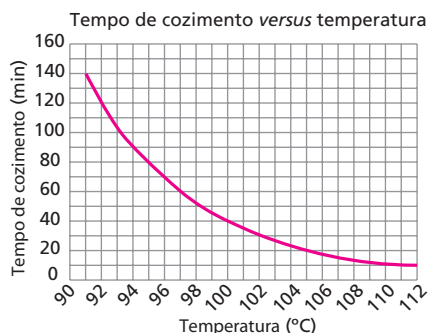
**85.** Considere 1,0 kg de gelo a 0 °C e uma massa **x** de vapor de água a 100 °C, colocados em um recipiente de capacidade térmica desprezível. A temperatura final de equilíbrio térmico é 0 °C, e o sistema está totalmente no estado líquido. Qual o valor de **x** em quilogramas?
**Dados:** calor específico latente de vaporização da água = 540 cal/g;
calor específico latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico sensível da água = 1,0 cal/g °C.

**86.** (Udesc-SC) O aquecimento global está provocando mudanças significativas no planeta. Só para se ter uma ideia, no estado norte-americano do Alasca, vilarejos estão afundando, devido ao derretimento da camada congelada do subsolo. Isso provoca desequilíbrio ecológico, contribui para o aumento da quantidade de insetos, do número de incêndios florestais e gera a escassez do gelo – esses são alguns dos sinais mais óbvios e assustadores de que o Alasca está ficando mais quente.
Para simular esta situação imagine um recipiente isolado contendo um bloco de 2 kg de gelo em equilíbrio térmico (T = 0 °C) com 1 kg de água em estado líquido; nesse mesmo recipiente, você adiciona 100 g de vapor de água a uma temperatura de 100 °C. Após adicionado o vapor, o sistema atinge novamente o equilíbrio permanecendo gelo mais água em estado líquido (sem trocas de calor com o meio externo).
**Dados:**
Calor específico sensível da água = 4 200 J/kg · K;
Calor específico latente de fusão da água = $333 \cdot 10^3$ J/kg;
Calor específico latente de vaporização da água = $2\,256 \cdot 10^3$ J/kg.
Determine a quantidade de gelo derretido.

**87.** (UEL-PR) Um calorímetro de capacidade térmica 50 cal/°C contém 50 g de gelo e 200 g de água em equilíbrio térmico, sob pressão normal. Se introduzirmos 50 g de vapor de água a 100 °C no calorímetro, qual será a temperatura final de equilíbrio térmico?
**Dados:** calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C;
calor latente de vaporização da água = 540 cal/g.

**88.** (Unimep-SP) A panela de pressão permite que os alimentos sejam cozidos em água muito mais rapidamente do que em panelas comuns. A seguir, a figura mostra esquematicamente uma panela de pressão e o diagrama de fase da água. Qual das afirmações não é verdadeira?

a) A vantagem do uso da panela de pressão é a rapidez para o cozimento devido à quantidade adicional de calor que é transferida para a panela.
b) Quando a pressão no interior da panela atinge 2 atm, a água entra em ebulição a 120 °C.
c) Para 4 atm no interior da panela, a água ferve a uma temperatura acima de 140 °C.
d) Em Santos, em uma panela comum, a água ferve aproximadamente a 100 °C.
e) Em uma panela comum, em um local a grande altitude, a água entra em ebulição abaixo de 100 °C.

**89.** (Enem) Se, por economia, abaixarmos o fogo sob uma panela de pressão logo que se inicia a saída de vapor pela válvula, de forma simplesmente a manter a fervura, o tempo de cozimento:
a) será maior porque a panela "esfria".
b) será menor, pois diminui a perda de água.
c) será maior, pois a pressão diminui.
d) será maior, pois a evaporação diminui.
e) não será alterado, pois a temperatura não varia.

**90.** O gráfico a seguir fornece o tempo de cozimento, em água fervente, de uma massa **m** de feijão em função da temperatura.

Sabe-se que a temperatura de ebulição da água, em uma panela sem tampa, é função da pressão atmosférica local. Na tabela a seguir, encontramos a temperatura de ebulição da água em diferentes pressões. Ao nível do mar (altitude zero), a pressão atmosférica vale 76 cm Hg e ela diminui 1,0 cm Hg para cada 100 metros que aumentamos a altitude.

| Temperatura de ebulição da água em função da pressão | |
|---|---|
| **Pressão em cm Hg** | **Temperatura em °C** |
| 60 | 94 |
| 64 | 95 |
| 68 | 97 |
| 72 | 98 |
| 76 | 100 |
| 80 | 102 |
| 84 | 103 |
| 88 | 105 |
| 92 | 106 |
| 96 | 108 |
| 100 | 109 |
| 104 | 110 |
| 108 | 111 |

Analise as afirmações.

I. Ao nível do mar, essa massa **m** de feijão irá demorar 40 minutos para o seu cozimento.

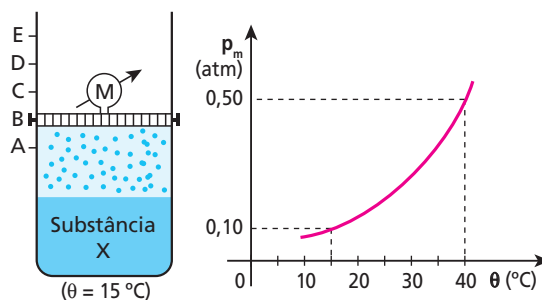
II. O Mar Morto encontra-se aproximadamente 400 metros abaixo do nível dos mares (altitude –400 m). Nesse local, o mesmo feijão demoraria 30 minutos para o seu cozimento.

III. O tempo de cozimento desse feijão seria de 1,0 hora em um local de altitude aproximadamente igual a 1,0 km.

IV. Se esse feijão estivesse no interior de uma panela de pressão fechada, cuja válvula mantém a pressão interna a 1,42 atm (1,0 atm equivale a 76 cm Hg), independentemente do local, o tempo de cozimento seria de aproximadamente 10 minutos.

É (são) verdadeira(s):

a) somente I.
b) somente I e III.
c) somente I, II e IV.
d) somente II, III e IV.
e) I, II, III e IV.

**91.** Na figura a seguir, o êmbolo está travado no ponto **B**. O recipiente contém uma substância **X** e sabe-se que sua pressão máxima de vapor varia de acordo com o gráfico:

Analise as proposições seguintes:

I. Se o manômetro **M** indicar 0,08 atm de pressão, o sistema não atingiu seu equilíbrio dinâmico, e o vapor é não saturante.

II. Quando o sistema atingir o equilíbrio dinâmico líquido-vapor, o manômetro acusará 0,10 atm.

III. Elevando-se o êmbolo lentamente, observar-se-á que a pressão se manterá constante enquanto existir líquido. Se, terminando o líquido, o êmbolo continuar a subir, a pressão não se manterá constante e o vapor passará a ser não saturante seco.

IV. Com o êmbolo travado em **B** e aquecendo-se o sistema a 40 °C, o manômetro indicará 0,50 atm se existir líquido.

Quais são as proposições verdadeiras (**V**) e quais são as falsas (**F**)?

# Bloco 5

## 12. A sublimação

Sólidos cristalinos podem liberar vapor de modo bastante lento em diversas temperaturas. É o caso, por exemplo, de cristais de naftalina sob condições normais de pressão e temperatura. Esse processo é semelhante ao da evaporação de um líquido.

Se, porém, a pressão máxima de vapor do cristal iguala-se à pressão externa, essa liberação de vapor passa a ser bastante rápida. Esse processo é, de certo modo, análogo à ebulição de um líquido.

Os dois processos citados são tipos de **sublimação**. Daqui por diante, porém, quando falarmos em sublimação, estaremos nos referindo sempre ao segundo processo citado, isto é, ao caso em que a pressão máxima de vapor iguala-se à pressão externa.

É importante lembrar que a sublimação é a passagem do estado físico sólido para o gasoso ou vice-versa, sem que a substância passe pela fase líquida.

## Que "fumaça" é essa?

Essa "fumaça" é o resultado da sublimação do dióxido de carbono ($CO_2$), que, no estado sólido, é chamado de **gelo-seco**. O $CO_2$ passa para o estado sólido ao ser comprimido e resfriado a −80 °C. Nas condições de pressão normal, partículas da superfície desse sólido se soltam, passando para o estado gasoso (sublimação).

O efeito observado no espetáculo de dança da fotografia é obtido colocando-se pedaços de gelo-seco em um recipiente que contém água. Partículas gasosas de $CO_2$ desprendem-se na sublimação e levam pequenas gotas de água. Essas gotas é que criam o efeito de "fumaça".

O gelo-seco também é utilizado em carrinhos de sorvete, já que sua temperatura é menor do que a do gelo comum e não molha as embalagens, pois não passa para o estado líquido na temperatura em que vivemos.

## 13. Ponto crítico e ponto triplo

### Ponto crítico

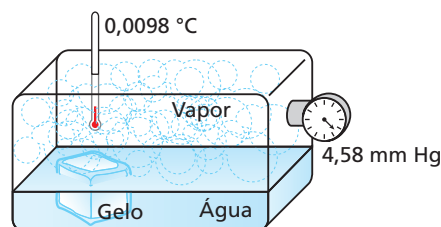
O estado gasoso é constituído de vapores e gases. Qual a diferença entre um vapor e um gás?

Uma substância no estado gasoso é denominada **gás** quando, à temperatura constante, é impossível levá-la ao estado líquido, por maior que seja a pressão exercida sobre ela. O **vapor**, ao contrário, é a substância no estado gasoso que, à temperatura constante, pode sofrer liquefação por aumento de pressão.

A situação-limite entre vapor e gás é definida por uma temperatura denominada **temperatura crítica**, que, em conjunto com um valor de pressão (pressão crítica), determina o **ponto crítico**.

É importante fixar que acima da temperatura crítica a substância é denominada gás, não podendo ser liquefeita por simples compressão isotérmica. Para a água, por exemplo, a pressão crítica corresponde a 218 atm e a temperatura crítica, a 374 °C.

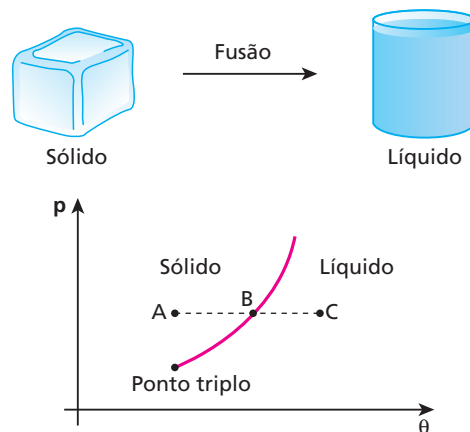
### Ponto triplo

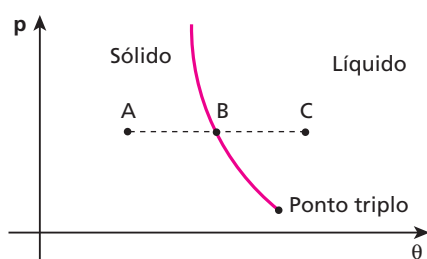
O **ponto triplo** de uma substância é caracterizado por um valor de pressão e outro de temperatura sob os quais essa substância pode coexistir em equilíbrio nos estados físicos sólido, líquido e gasoso (vapor) simultaneamente.

Para a água, o ponto triplo é definido pela temperatura de 0,0098 °C e pressão de vapor igual a 4,58 mm Hg. Nessa situação física, podem coexistir o **gelo**, a **água** e o **vapor de água**, sem que ocorra mudança nas proporções relativas de qualquer um deles.

## 14. Curvas de fusão, vaporização e sublimação

### Curva de fusão

**Curva de fusão** de um sólido cristalino é a representação gráfica da pressão ambiente (**p**) em função da temperatura de fusão (**θ**) do sólido. Há dois casos a considerar:

- Para a grande maioria das substâncias, o volume **aumenta** com a fusão. Consequentemente, quanto maior é a pressão sobre o sólido, mais difícil é a sua fusão. Em outras palavras, quanto maior a pressão, maior é a temperatura que o sólido precisa atingir para fundir-se. É o que mostra a curva de fusão a seguir.

A – Estado sólido
B – Equilíbrio das fases sólida e líquida
C – Estado líquido

- Para algumas substâncias (exceções à regra geral), como a água, o bismuto, o ferro e o antimônio, o volume **diminui** com a fusão. Isso acontece porque as ligações químicas características do estado sólido determinam a existência de grandes vazios intermoleculares nesse estado. Com o desmoronamento da estrutura por ocasião da fusão, esses vazios são ocupados pelas próprias moléculas e, consequentemente, o volume diminui.
  Evidentemente, a solidificação dessas substâncias implica aumento de volume. É o que ocorre com a água presente no interior das células vegetais por ocasião das geadas: a água solidifica-se, aumentando seu volume e rompendo as membranas das células.
  Para essas substâncias excepcionais, como a água, a fusão é facilitada pelo aumento de pressão, isto é, quanto maior a pressão, menor a temperatura que o sólido precisa atingir para fundir-se.
  É o que representa a curva de fusão abaixo.

A – Estado sólido
B – Equilíbrio das fases sólida e líquida
C – Estado líquido

Cada ponto da curva de fusão faz a correspondência entre uma temperatura de fusão (solidificação) e uma pressão. Assim, em cada um desses pontos, as fases sólida e líquida podem apresentar-se em equilíbrio: obtemos mais líquido quando fornecemos mais calor ao sistema e mais sólido quanto mais retiramos calor do sistema.

Fabio Colombini

Na solidificação, a água (uma das exceções à regra geral) tem seu volume aumentado. Na fotografia, a garrafa de vidro quebra-se quando a água existente em seu interior se solidifica.

## Experimento de Tyndall (Regelo)

Como vimos, um aumento de pressão provoca uma diminuição na temperatura de fusão do gelo.

Baseado nesse fato, o físico britânico John Tyndall (1820-1893) elaborou um experimento que recebeu seu nome. Ele apoiou as extremidades de uma barra de gelo a uma temperatura pouco inferior a 0 °C e colocou sobre ela, na parte central, um fio metálico, em cujas extremidades havia corpos de pesos convenientes.

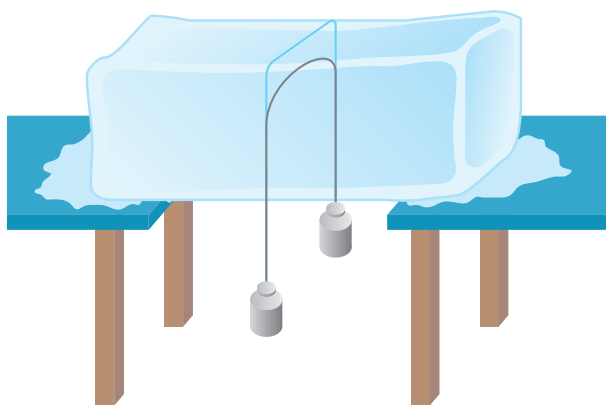



Ilustração do experimento de Tyndall.

Após algum tempo, o fio atravessou a barra sem que ela fosse dividida.

A explicação do fenômeno é o regelo.

Dá-se o nome de **regelo** ao fenômeno que consiste na ressolidificação da água por diminuição da pressão.

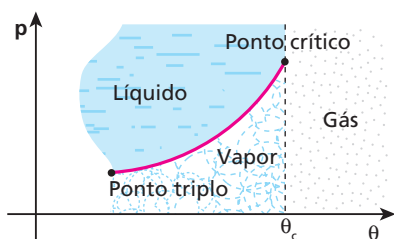
No experimento de Tyndall, o aumento de pressão provocado pelo fio diminui a temperatura de fusão do gelo, fazendo com que ele se funda. Para isso, a parte que sofre fusão retira calor das partículas que estão ao lado e que, no entanto, não tiveram acréscimo de pressão. Após a passagem do fio, o aumento de pressão é suprimido e a água no estado líquido devolve o calor "emprestado", voltando ao estado sólido, o que constitui o regelo.

## Curva de vaporização

**Curva de vaporização** é a representação gráfica da pressão ambiente (**p**) em função da temperatura de ebulição (**θ**) do líquido.

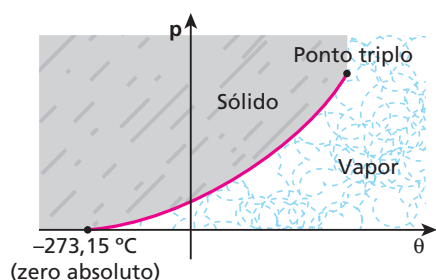
Quanto maior a pressão sobre um líquido, maior a temperatura necessária para que ele entre em ebulição. É o que mostra a curva de vaporização a seguir.



TF2-P1T3_045a083_5P.indd 72 17/08/12 18:29

Cada ponto da curva de vaporização representa uma situação de possível equilíbrio entre o líquido e seu vapor. Se mais calor é fornecido, forma-se mais vapor; se o calor é retirado, forma-se mais líquido.

### Curva de sublimação

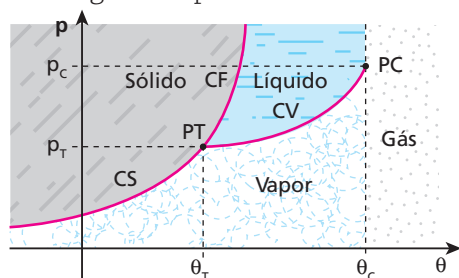
**Curva de sublimação** é a representação gráfica da pressão ambiente (**p**) em função da temperatura de sublimação (**θ**) do sólido.

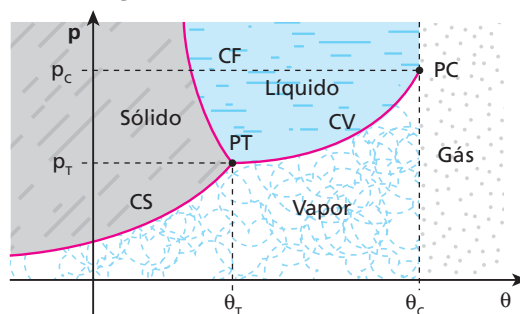
Quanto maior é a pressão sobre um sólido, maior a temperatura em que ocorre a sublimação. É o que mostra a curva de sublimação abaixo.

Cada ponto da curva representa uma situação de possível equilíbrio entre o sólido e seu vapor.

Observe que a curva de sublimação estende-se até próximo do zero absoluto, temperatura em que se admite nula a pressão máxima de vapor do sólido.

## 15. Diagramas de estado

Denomina-se **diagrama de estado** de uma substância o gráfico que representa suas curvas de fusão, vaporização e sublimação.

Para a maioria das substâncias, o diagrama de estado é do seguinte tipo:

CF: curva de fusão
CV: curva de vaporização
CS: curva de sublimação
PT: ponto triplo
PC: ponto crítico

Para as exceções, como a água, o diagrama de estado tem o seguinte aspecto:

Observe que a diferença entre os diagramas encontra-se na curva da fusão-solidificação, quando podemos ter exceções à regra geral.

Veja dois exemplos de diagramas de estado:

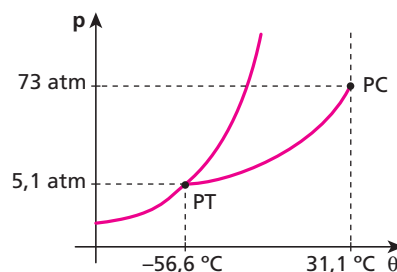



Diagrama de estado do dióxido de carbono ($CO_2$).

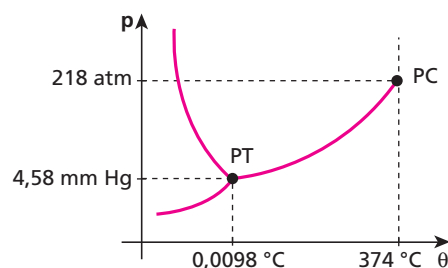



Diagrama de estado da água ($H_2O$).

### Sobrefusão

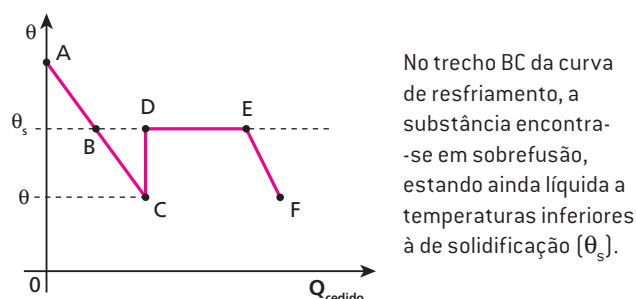
No resfriamento de um líquido, eventualmente podem ser atingidas temperaturas abaixo da que corresponde à de solidificação da substância, e ainda assim a substância se manter líquida.

> Na **sobrefusão** (ou **superfusão**), uma substância encontra-se no estado líquido abaixo da sua temperatura de solidificação.

A sobrefusão é um estado de equilíbrio metaestável (capaz de perder a estabilidade por meio de pequenas perturbações), ou seja, em que existe aparentemente equilíbrio, mas há uma passagem muito lenta para outro estado. Uma simples agitação, ou

mesmo a introdução de uma pequena porção sólida, perturba o fenômeno e provoca uma brusca solidificação parcial ou total do líquido. A temperatura eleva-se até o ponto de solidificação. Essa elevação de temperatura é provocada pelo calor liberado pela parte do líquido que se solidifica (a solidificação é uma transformação exotérmica).

Veja o gráfico que representa um resfriamento com sobrefusão:

No trecho BC da curva de resfriamento, a substância encontra-se em sobrefusão, estando ainda líquida a temperaturas inferiores à de solidificação ($θ_s$).

Consideremos uma massa **M** de um líquido em sobrefusão a uma temperatura **θ** ($θ < θ_s$). Ao agitarmos o recipiente, uma parte **m** da massa total do líquido solidifica-se, liberando uma quantidade de calor suficiente para o aquecimento de todo o sistema, que volta à temperatura de solidificação ($θ_s$).

A relação que descreve o fenômeno é:

$$m\,L_s = M\,c_{líq}\,(θ_s - θ)$$

## Superebulição

Nos procedimentos comuns de aquecimento de uma porção de água sobre a chama de um fogão ou em um forno a gás (ou elétrico), sob pressão normal, a ebulição acontece na temperatura de 100 °C. Mas se isso ocorre em um forno de micro-ondas, existe a possibilidade de a água atingir uma temperatura maior do que 100 °C sem ebulição.

Quando aquecemos água sobre a chama de um fogão, notamos que primeiro é aquecida aquela em contato com as paredes do recipiente, provocando as correntes de convecção, isto é, uma movimentação ascendente e descendente das partículas do líquido. Em um forno de micro-ondas sem prato giratório, esse aquecimento se dá de maneira quase igual, tanto para as partículas das superfícies como para as do interior do líquido, de maneira que não produza as correntes de convecção. Dessa forma, temperaturas maiores do que a de ebulição podem ser atingidas sem alterações no estado metaestável (de precária estabilidade) do arranjo molecular da água. Porém qualquer agitação do recipiente pode quebrar essa estabilidade, produzindo uma ebulição violenta.

Experimentalmente observa-se que, para atingirmos esse estado de superaquecimento (quando o líquido se encontra a uma temperatura maior do que a sua temperatura de ebulição), é preciso utilizar um forno de micro-ondas sem o prato giratório (para não agitar o líquido), no interior de um recipiente não metálico (de preferência, vidro refratário). Utilizando água destilada, pode-se conseguir o estado líquido a até 108 °C, aproximadamente. Quando o líquido está superaquecido, uma leve agitação do recipiente pode provocar uma ebulição violenta, quase uma explosão. Como a transição do líquido para o vapor requer uma grande quantidade de calor, assim que a ebulição deixa de ocorrer, a temperatura do líquido que restou fica menor do que sua temperatura de ebulição na pressão existente. Em outras palavras, a uma atmosfera, a água restante estaria a uma temperatura menor do que 100 °C.

Esse fenômeno do superaquecimento pode ocorrer com qualquer líquido; por isso, quando aquecemos água ou leite no micro-ondas, devemos ter muito cuidado ao retirarmos o recipiente do forno, pois, se o líquido estiver superaquecido, uma ebulição violenta pode lançar gotas com temperaturas maiores do que 100 °C em nossas mãos, produzindo graves queimaduras.

Sérgio Dotta Jr./The Next

Nesta fotografia observamos água destilada superaquecida. A temperatura registrada no termômetro foi obtida aquecendo-se a água em um forno de micro-ondas sem o prato giratório.

## Faça você mesmo

Reúna o seguinte material: uma barra de gelo; um fio de aço de diâmetro pequeno e comprimento em torno de 1 m; e dois corpos iguais e pesados, que possam ser presos às extremidades do fio.

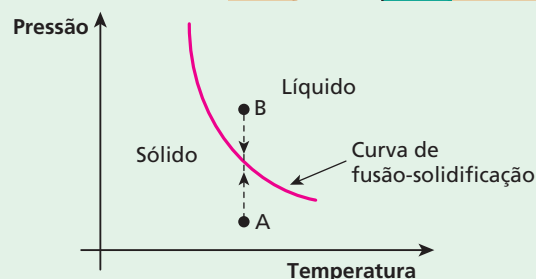
> ▶ ATENÇÃO!
> Use luvas de proteção ao manusear o gelo e o fio de aço.

Apoie a barra de gelo como mostra o desenho, colocando o fio sobre ela de modo que os corpos pesados fiquem pendentes.

Você poderá observar o fio descendo e atravessando o bloco de gelo. Haverá, entretanto, uma "cicatrização" rápida no "corte" deixado pelo fio, que poderá ser retirado por baixo da barra sem que ela seja dividida em duas partes.

Para que você entenda o que ocorreu, recordemos a curva de fusão no diagrama de estado da água ao lado.

O fio exerce sobre o gelo um acréscimo de pressão, o que provoca fusão na região de contato. A água líquida não resiste ao avanço do fio, que desce. A água que se sobrepõe ao fio, ao deixar de receber o acréscimo de pressão, volta ao estado sólido, caracterizando o fenômeno conhecido por **regelo**.

No diagrama, observamos que o acréscimo de pressão faz com que o gelo saia do ponto **A**, sofra fusão e atinja o ponto **B**. O decréscimo de pressão faz com que a água saia do ponto **B**, sofra solidificação (regelo) e atinja o ponto **A**.

## Leitura

### A água

A água é a principal responsável pela existência da vida em nosso planeta. Acredita-se que há 3,5 bilhões de anos tenham surgido, na água, os primeiros compostos orgânicos que originariam os seres vivos: as bactérias. O desenvolvimento da vida sempre esteve ligado à água, que é o elemento predominante na constituição de animais e vegetais. Nos humanos, ela é responsável por quase 75% de sua massa.

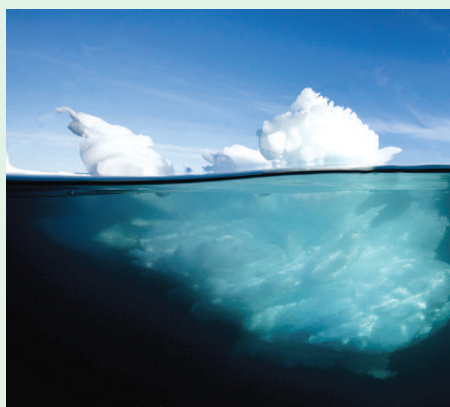
Encontramos na Terra cerca de $1,4 \cdot 10^9$ km$^3$ de água nos diferentes estados físicos. Praticamente 97% é salgada (em oceanos e mares) e apenas 3% da água essencial à vida é doce. E, desses 3%, menos de um centésimo está acessível no estado líquido distribuído na superfície do planeta; o restante é gelo nos polos, água subterrânea de difícil acesso ou vapor de água na atmosfera. Então, somente essa pequena porção de água doce encontrada em rios e lagos é que mantém a vida terrestre. Por isso o uso desordenado de produtos químicos, que polui de maneira irreversível a água, pode comprometer o futuro da vida na Terra.

Thinkstock/Getty Images

Em uma gota de água podemos encontrar um universo inteiro de conhecimento.

No estudo das características da água, notamos que seu calor específico sensível (1,0 cal/g °C) é bastante alto, fazendo sua presença, em grandes quantidades, um fator de estabilidade da temperatura. Para esfriar a água, libera-se energia térmica; para esquentá-la, absorve-se energia térmica. Por esse motivo, em regiões litorâneas ou onde exista um grande lago, as amplitudes térmicas (variações de temperatura) são pequenas e a vegetação e a fauna costumam ser bastante extensas e diversificadas. Como a água cobre quase $\frac{2}{3}$ da superfície de nosso planeta, o clima global é bastante influenciado por sua presença.

O vapor de água na atmosfera terrestre ajuda o efeito estufa benéfico, aumentando a retenção da energia térmica emitida pela Terra, não deixando a temperatura diminuir muito à noite. Durante o dia, esse vapor reflete e retém parte da energia solar, evitando que a superfície do planeta se aqueça em demasia.

Na solidificação, a água aumenta de volume enquanto a maioria das substâncias diminui. Isso faz a densidade do gelo ser menor do que a da água, o que leva o gelo a flutuar nela. Em regiões de invernos rigorosos, a solidificação de lagos e rios ocorre apenas na superfície, existindo água a uma temperatura maior que 0 °C (zero grau Celsius) em seu fundo. Como o gelo é um bom isolante térmico, a vida, assim, é preservada. E após o degelo, na primavera, a vida animal e vegetal no interior desses lagos e rios volta a se desenvolver normalmente.

O seu calor específico latente de vaporização (540 cal/g) também é um importante fator de regulagem do clima. Na evaporação da água, calor é absorvido para a mudança de estado, isto é, em locais com grandes áreas ocupadas por água, como uma represa, a temperatura é mais amena. A evaporação da água retira energia térmica do meio ambiente.

Paul Souders/AlaskaStock/Diomedia

O gelo (água em estado sólido) flutua na água em estado líquido. Na fotografia, observamos um *iceberg* com aproximadamente nove décimos de seu volume imersos em água.

## Exercícios nível 1

**92.** Leia as afirmativas a seguir.

(01) A sublimação de uma substância corresponde à sua passagem do estado sólido para o estado líquido.
(02) A temperatura de sublimação de uma substância cresce com o aumento de pressão.
(04) Gelo-seco é a denominação comercial do dióxido de carbono ($CO_2$ sólido). Quando este é deixado sobre uma mesa, vai "desaparecendo". A explicação é que ele está sublimando.
(08) A passagem de uma substância do estado sólido para o gasoso, ou vice-versa, sem que se transforme em líquido, é denominada sublimação.

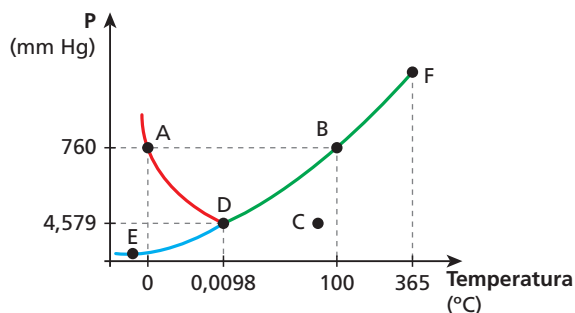
Dê como resposta a soma dos valores associados às afirmativas corretas.

**93.** A temperatura do ponto triplo corresponde:

a) ao conjunto do zero absoluto, da temperatura de fusão e da temperatura de ebulição de uma substância.
b) à temperatura em que uma substância pode ter suas fases líquida, de vapor e de gás coexistindo em equilíbrio.
c) à temperatura crítica de uma substância.
d) à coexistência, em equilíbrio, das fases sólida, líquida e de vapor de uma mesma substância.
e) Nenhuma das afirmações anteriores está correta.

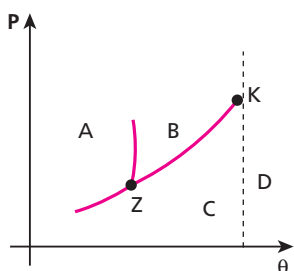
**94.** Para liquefazer um gás, deve-se:

a) comprimi-lo isotermicamente a uma temperatura acima da crítica.
b) apenas levá-lo a uma temperatura abaixo da crítica.
c) simplesmente comprimi-lo, qualquer que seja sua temperatura.
d) diminuir sua temperatura abaixo da crítica e, se necessário, comprimi-lo.
e) É impossível liquefazer um gás.

**95.** Experimentos realizados com água levaram à construção do diagrama de estado representado na figura a seguir, que não foi feita em escala correta.

Nesse gráfico podemos observar as curvas da **fusão-solidificação** (linha divisória entre os estados sólido e líquido), da **vaporização-liquefação** (linha divisória entre os estados líquido e vapor) e da **sublimação-ressublimação** (linha divisória entre os estados sólido e vapor). Encontramos ainda o **ponto triplo** (ponto de equilíbrio dos estados sólido, líquido e gasoso) e a **temperatura crítica** (acima da qual o vapor torna-se gás).

Podemos afirmar que:

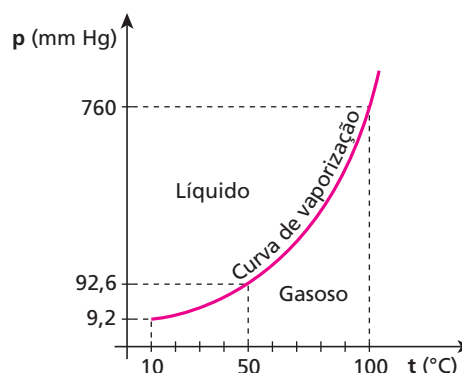
a) No ponto **A** encontramos a água nos estados líquido e gasoso.
b) No ponto **B** encontramos a água nos estados sólido e gasoso.
c) No ponto **C** encontramos a água no estado líquido.
d) No ponto **D** a água encontra-se apenas no estado gasoso.
e) No ponto **E** encontramos gelo e água no estado de vapor.

**96.** O diagrama de estado de uma substância é esquematizado abaixo:

Agora, leia as afirmativas:

(01) Na região **A**, a substância encontra-se no estado sólido.
(02) Na região **B**, a substância encontra-se no estado líquido.
(04) Nas regiões **C** e **D**, a substância encontra-se no estado de vapor.
(08) **K** é o ponto triplo e **Z**, o ponto crítico dessa substância.
(16) Na região **D**, a substância não pode ser liquefeita por mera compressão isotérmica.
(32) A curva que liga os pontos **Z** e **K** chama-se curva da sublimação, pois separa as regiões de líquido e vapor.

Dê como resposta a soma dos valores associados às afirmativas corretas.

**97.** (Vunesp-FMJ-SP) A tabela e o gráfico apresentam valores da temperatura de ebulição da água sob diferentes pressões.

| p (mm Hg) | t (°C) |
|---|---|
| 6,5 | 5 |
| 9,2 | 10 |
| 92,6 | 50 |
| 760 | 100 |
| 11 650 | 200 |
| 132 700 | 350 |

a) Explique se é possível ter água em estado líquido à termperatura acima de 100 °C.
b) Explique de que forma a pressão atmosférica local interfere no ponto de ebulição da água.

## Exercícios nível 2

**98.**

Ivan D'Albuquerque / Isuzu Imagens

*"A cachoeira do **escorrega**, observada na foto, está localizada na região de Visconde de Mauá, alto da Serra da Mantiqueira, na divisa com o Parque Nacional de Itatiaia, entre os estados de Minas Gerais e Rio de Janeiro. Nessa região, cuja altitude é de 1 200 metros, encontramos diversos rios, cachoeiras e piscinas naturais de águas límpidas e cristalinas. Perfeito para combater o estresse do dia a dia da cidade grande."*

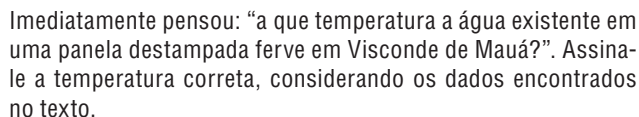
Após ler o anúncio, um vestibulando passou a sonhar com um passeio por esse lindo local. Fechou os olhos e sentiu a brisa em seu rosto enquanto deslizava pela pedra molhada. No entanto, a necessidade de estudar trouxe-o de volta à realidade. Olhou em seu livro e encontrou um exercício que trazia o seguinte texto, acompanhado de uma tabela.

***Sabe-se que a temperatura de ebulição da água, em uma panela sem tampa, é função da pressão atmosfera local. Na tabela a seguir, encontramos a temperatura de ebulição da água em diferentes pressões. Ao nível do mar (altitude zero), a pressão atmosférica vale 76 cm Hg e ela diminui 1,0 cm Hg para cada 100 metros que aumentamos a altitude.

**Temperatura de ebulição da água em função da pressão**

| Pressão em cm Hg | 60 | 64 | 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 88 | 92 | 96 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura em °C | 94 | 95 | 97 | 98 | 100 | 102 | 103 | 105 | 106 | 108 | 109 |

Imediatamente pensou: “a que temperatura a água existente em uma panela destampada ferve em Visconde de Mauá?”. Assinale a temperatura correta, considerando os dados encontrados no texto.

a) 102 °C
b) 100 °C
c) 98 °C
d) 97 °C
e) 95 °C

**99.** (Enem) Sob pressão normal (ao nível do mar), a água entra em ebulição à temperatura de 100 °C. Tendo por base essa informação, um garoto residente em uma cidade litorânea fez a seguinte experiência:

• Colocou uma caneca metálica contendo água no fogareiro do fogão de sua casa.
• Quando a água começou a ferver, encostou cuidadosamente a extremidade mais estreita de uma seringa de injeção, desprovida de agulha, na superfície do líquido e, erguendo o êmbolo da seringa, aspirou certa quantidade de água para seu interior, tapando-a em seguida.
• Verificando após alguns instantes que a água da seringa havia parado de ferver, ele ergueu o êmbolo da seringa, constatando, intrigado, que a água voltou a ferver após um pequeno deslocamento do êmbolo.

Considerando o procedimento anterior, a água volta a ferver porque esse deslocamento:

a) permite a entrada de calor do ambiente externo para o interior da seringa.
b) provoca, por atrito, um aquecimento da água contida na seringa.
c) produz um aumento de volume que aumentra o ponto de ebulição da água.
d) proporciona uma queda de pressão no interior da seringa que diminui o ponto de ebulição da água.
e) possibilita uma diminuição da densidade da água que facilita sua ebulição.

**100.** (Cefet-SP) A temperatura **T** na qual a água ferve (em °C) varia com a altitude **A** (em metros) acima do nível do mar aproximadamente segundo a função $A = 1\,000\,(100 - T) + 580(100 - T)^2$, para certos limites de **T**. Nas condições dessa função, a água ferve a meio grau abaixo da temperatura em que ferve ao nível do mar quando a altitude, em metros, for igual a:

a) 484
b) 595
c) 645
d) 725
e) 790

**101.** Deixam-se cair algumas gotas de água sobre uma chapa muito quente. As gotas “chiam” e deslizam sobre a chapa porque o líquido é imediatamente aquecido, formando-se uma camada de:

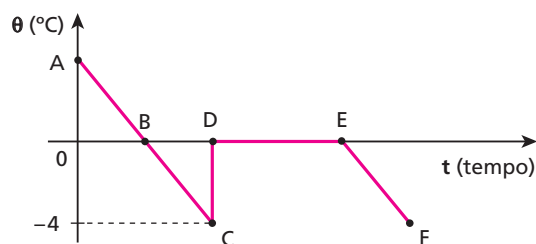
a) líquido entre a chapa e o vapor.
b) vapor entre a chapa e o ar.
c) água entre a gota e o fogo.
d) vapor entre o fogo e a chapa.
e) vapor entre cada gota e a chapa.

**102.** As grandes geleiras que se formam no alto das montanhas deslizam porque:

a) o gelo é muito liso, ocorrendo pequeno atrito entre o bloco de gelo e o chão.
b) a componente tangencial do peso é a única força atuante sobre as geleiras.
c) o vento as desgruda do chão.
d) o aumento de pressão na parte inferior das geleiras, devido ao seu peso, funde o gelo, soltando-as do chão.

**103.** O que acontece quando se agita um recipiente contendo água em sobrefusão?

a) Necessariamente, toda a água solidifica-se, acarretando uma queda na temperatura do recipiente.
b) Parte da água solidifica-se, acarretando uma queda na temperatura do recipiente.
c) A água solidifica-se total ou parcialmente acarretando um aumento na temperatura do recipiente.
d) Necessariamente, toda a água solidifica-se, acarretando um aumento na temperatura do recipiente.
e) Nada do que foi dito ocorre.

**104.** O gráfico a seguir mostra a curva de resfriamento de 100 g de água, em um processo lento e sem agitação.

Sendo o calor latente de fusão do gelo igual a 80 cal/g e o calor específico da água 1,0 cal/g °C, qual a massa de água que se solidifica no trecho **CD**?

**105.** A que temperatura encontram-se 100 g de água em sobrefusão, se a solidificação brusca de um quinto dessa água eleva a temperatura do sistema ao ponto de solidificação?

**Dados:** calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
calor específico da água = 1,0 cal/g °C.

## Descubra mais

**1.** Pesquise e descubra o que é o **ponto de orvalho**.

**2.** Um dos maiores temores dos agricultores de certas regiões do Brasil é a **geada**, fenômeno meteorológico que pode destruir plantações. Explique como e quando ocorre a **geada**.

**3.** Em dias muito quentes, é comum observarmos cães grandes e peludos com a boca aberta, a língua de fora e arfando rapidamente. Pesquise e tente explicar por que os cães arfam.

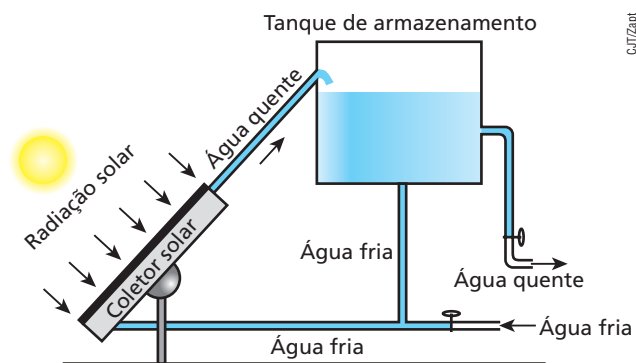
## Exercícios

nível 3

**106.** (Unicamp-SP) As pontes de hidrogênio entre moléculas de água são mais fracas que a ligação covalente entre o átomo de oxigênio e os átomos de hidrogênio. No entanto, o número de ligações de hidrogênio é tão grande (bilhões de moléculas em uma única gota de água) que estas exercem grande influência sobre as propriedades da água, como, por exemplo, os altos valores do calor específico, do calor de vaporização e de solidificação da água. Os altos valores do calor específico e do calor de vaporização da água são fundamentais no processo de regulação de temperatura do corpo humano. O corpo humano dissipa energia, sob atividade normal por meio do metabolismo, equivalente a uma lâmpada de 100 W. Se em uma pessoa de massa 60 kg todos os mecanismos de regulação de temperatura parassem de funcionar, haveria um aumento de temperatura de seu corpo. Supondo que todo o corpo é feito de água, em quanto tempo, aproximadamente, essa pessoa teria a temperatura de seu corpo elevada em 5 °C?

Dado: calor específico da água $\cong 4{,}2 \cdot 10^3$ J/kg · °C.

a) 1,5 h  b) 2,0 h  c) 3,5 h  d) 4,0 h  e) 5,5 h

**107.** (Faap-SP) Em um **coletor solar**, uma folha metálica de cor negra absorve a radiação solar, que se transforma em calor, utilizado no aquecimento da água contida no **tanque de armazenamento**.

Em um certo local, a intensidade média da radiação solar incidente é de 500 $\frac{J}{s \cdot m^2}$ (ou seja, 500 J de energia solar atingem 1 m² da superfície da Terra a cada segundo). Deseja-se aquecer 200 litros de água de 10 °C a 50 °C em 8 h. Sabendo-se que esse processo tem rendimento de 40%, a área útil do **coletor solar** deve ter um valor mais próximo de:

a) 20 m².  b) 27 m².  c) 13 m².  d) 6 m².  e) 2 m².

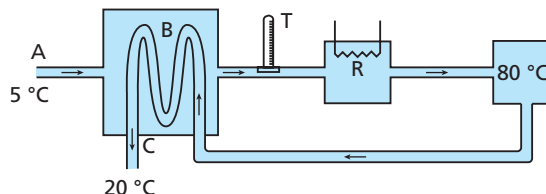
**Dados para a água:** $c = 4 \cdot 10^3 \frac{J}{kg \cdot °C}$;

$d = 1$ kg/L.

**108.** (Fuvest-SP) O processo de pasteurização do leite consiste em aquecê-lo a altas temperaturas, por alguns segundos, e resfriá-lo em seguida. Para isso, o leite percorre um sistema, em **fluxo constante**, passando por três etapas:

I. O leite entra no sistema (através de **A**), a 5 °C, sendo aquecido (no trocador de calor **B**) pelo leite que já foi pasteurizado e está saindo do sistema.

II. Em seguida, completa-se o aquecimento do leite, por meio da resistência **R**, até que ele atinja 80 °C. Com essa temperatura, o leite retorna a **B**.

III. Novamente em **B**, o leite quente é resfriado pelo leite frio que entra por **A**. saindo do sistema (através de **C**), a 20 °C.

Em condições de funcionamento estáveis, e supondo que o sistema seja bem isolado termicamente, pode-se afirmar que a temperatura indicada pelo termômetro **T**, que monitora a temperatura do leite na saída de **B**, é aproximadamente de:

a) 20 °C.  b) 25 °C.  c) 60 °C.  d) 65 °C.  e) 75 °C.

**109.** (Unip-SP) Um bloco de gelo de massa **M** está a uma temperatura inicial **θ**. O bloco de gelo recebe calor de uma fonte térmica de potência constante. Admita que todo o calor fornecido pela fonte é absorvido pelo bloco.

O intervalo de tempo para o gelo atingir a sua temperatura de fusão é igual ao intervalo de tempo que durou sua fusão completa.

Considere os seguintes dados:

I. calor específico sensível do gelo: 0,50 cal/g °C;
II. temperatura de fusão do gelo: 0 °C;
III. calor específico latente de fusão do gelo: 80 cal/g.

O valor de **θ**:

a) não está determinado, porque não foi dada a massa **M** do bloco de gelo.
b) não está determinado, porque não foi dada a potência da fonte térmica que forneceu calor ao bloco de gelo.
c) é −160 °C.
d) é −80 °C.
e) é −40 °C.

**110.** (Uepa-PA) Um jornal resolveu fazer uma brincadeira de 1º de abril e anunciou uma série de notícias falsas de cunho científico. Das manchetes citadas abaixo, indique a única que poderia realmente ter acontecido:

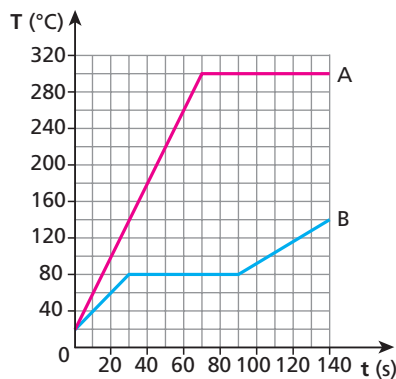
a) Físicos conseguiram resfriar uma massa de hidrogênio até −290 °C.
b) Um fio de cobre de 1 m foi resfriado até seu comprimento cair para 70 cm pela contração térmica.
c) Um litro de água foi aquecido de 20 °C até 40 °C e sua massa aumentou de 1 kg para 1,2 kg.
d) Um barco transportava uma tonelada de gelo. Durante a viagem o gelo derreteu e o barco afundou por causa do aumento da densidade de sua carga.
e) Cientistas conseguiram dobrar a energia média de vibração das moléculas em uma amostra de ferro que estava inicialmente a −100 °C.

**111.** (Fuvest-SP) Um forno solar simples foi construído com uma caixa de isopor, forrada internamente com papel-alumínio e fechada com uma tampa de vidro de 40 cm × 50 cm.

Dentro desse forno, foi colocada uma pequena panela contendo 1 xícara de arroz e 300 mL de água à temperatura ambiente de 25 °C. Suponha que os raios solares incidam perpendicularmente à tampa de vidro e que toda a energia incidente na tampa do forno a atravesse e seja absorvida pela água. Para essas condições, calcule:

a) A potência solar total **P** absorvida pela água.
b) A energia **E** necessária para aquecer o conteúdo da panela até 100 °C.
c) O tempo total **T** necessário para aquecer o conteúdo da panela até 100 °C e evaporar $\frac{1}{3}$ da água nessa temperatura (cozer o arroz).

**Note e adote:**
Potência solar incidente na superfície da Terra: 1 $kW/m^2$
Densidade da água: 1 $g/cm^3$
Calor específico da água: 4 J/(g · °C)
Calor latente de evaporação da água: 2 200 J/g
Desconsidere as capacidades caloríficas do arroz e da panela.

**112.** (Fuvest-SP) As curvas **A** e **B** na figura representam a variação da temperatura (**T**) em função do tempo (**t**) de duas substâncias **A** e **B**, quando 50 g de cada uma são aquecidos separadamente, a partir da temperatura inicial de 20 °C, na fase sólida, recebendo calor em uma taxa constante de 20 cal/s.
Considere agora um experimento em que 50 g de cada uma das substâncias são colocados em contato térmico em um recipiente termicamente isolado, com a substância **A** à temperatura inicial $T_A$ = 280 °C e a substância **B** à temperatura inicial $T_B$ = 20 °C.

a) Determine o valor do calor latente de fusão $L_B$ da substância **B**.
b) Determine a temperatura de equilíbrio do conjunto no final do experimento.
c) Se a temperatura final corresponder à mudança de fase de uma das substâncias, determine a quantidade dessa substância em cada uma das fases.

**113.** (Unifesp-SP) Os líquidos podem transformar-se em vapor por evaporação ou ebulição. Enquanto a evaporação é um fenômeno espontâneo, restrito à superfície do líquido e que pode ocorrer à temperatura e pressão ambientes, a ebulição ocorre em todo o líquido sob condições de pressão e temperatura determinadas para cada líquido. Mas ambas as transformações, para se efetivarem, exigem o consumo da mesma quantidade de calor por unidade de massa transformada.

a) Quando as roupas são estendidas nos varais, ou a água no piso molhado de um ambiente é puxada pelo rodo, tem-se por objetivo apressar a secagem – transformação da água em vapor – dessas roupas ou do piso. Qual a causa comum que se busca favorecer nesses procedimentos? Justifique.
b) Avalia-se que a área da superfície da pele de uma pessoa adulta seja, em média, da ordem de 1,0 $m^2$. Suponha que, ao sair de uma piscina, uma pessoa retenha junto à pele uma camada de água de espessura média 0,50 mm. Qual a quantidade de calor que essa camada de água consome para evaporar? Que relação tem esse cálculo com a sensação de frio que sentimos quando estamos molhados, mesmo em dias quentes? Justifique.

**Dados:** densidade da água = 1 000 $kg/m^3$;
calor latente de vaporização da água = 2 300 kJ/kg.

**114.** (Fuvest-SP)

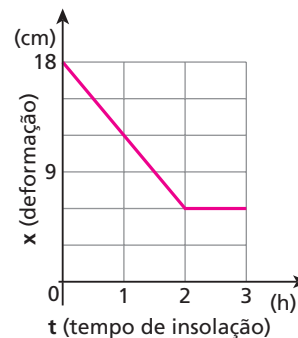
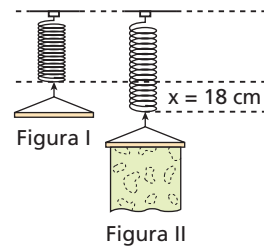



Figura III

A figura I representa um cabide dependurado na extremidade de uma mola de constante elástica k = 50 N/m. Na figura II, tem-se a nova situação de equilíbrio logo após a roupa molhada ser colocada no cabide e ser exposta ao Sol para secar, provocando na mola uma deformação inicial x = 18 cm. O tempo de insolação foi mais do que suficiente para secar a roupa completamente. A variação da deformação da mola (em cm) em função do tempo (em horas) em que a roupa ficou sob a ação dos raios solares está registrada no gráfico da figura III. (g = 10 $m/s^2$)
Considere que cada grama de água para vaporizar absorve 500 cal de energia e determine:

a) o peso da água que evaporou.
b) a potência média de radiação solar absorvida pela roupa supondo ser ela a única responsável pela evaporação da água.

**115.** (FGV-SP) O vaporizador é um aparelho que permite aumentar a umidade do ar em um ambiente. A vaporização ocorre por intermédio de um resistor, que permanece ligado enquanto estiver em contato com a água. Uma vez esgotada essa água, o aparelho se desliga automaticamente. Um desses vaporizadores, contendo 200 mL de água, inicialmente a 20 °C, permaneceu funcionando, ininterruptamente, por 2 h até se desligar. Considerando que toda energia dissipada pelo resistor é transferida para a água, que todo o vapor produzido é lançado para o ambiente e que a vaporização ocorre à temperatura de ebulição, pode-se concluir que a potência do aparelho, medida em W, é, aproximadamente:

**Dados:** calor específico da água = 1 cal/g · °C;
calor latente de vaporização da água = 540 cal/g;
densidade da água = 1 g/mL;
temperatura de vaporização da água = 100 °C;
1 cal = 4 J.

a) 32.
b) 46.
c) 69.
d) 78.
e) 84.



TF2-P1T3_045a083_5P.indd 80 17/08/12 18:29

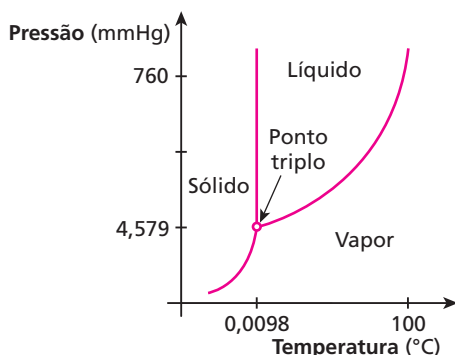
**116.** (Unifesp-SP) Atualmente, o *laser* de $CO_2$ tem sido muito aplicado em microcirurgias, onde o feixe luminoso é utilizado no lugar do bisturi de lâmina. O corte com o *laser* é efetuado porque o feixe provoca um rápido aquecimento e a evaporação do tecido, que é constituído principalmente de água. Considere um corte de 2,0 cm de comprimento, 3,0 mm de profundidade e 0,5 mm de largura, que é aproximadamente o diâmetro do feixe. Sabendo que a massa específica da água é $10^3$ kg/m$^3$, o calor específico é $4,2 \cdot 10^3$ J/kg · K e o calor latente de evaporação é $2,3 \cdot 10^6$ J/kg:

a) estime a quantidade de energia total consumida para fazer essa incisão, considerando que, no processo, a temperatura do tecido se eleva 63 °C e que este é constituído exclusivamente de água.
b) se o corte é efetuado a uma velocidade de 3,0 cm/s, determine a potência do feixe, considerando que toda a energia fornecida foi gasta na incisão.

**117.** (Fuvest-SP) Um roqueiro iniciante improvisa efeito especiais, utilizando gelo-seco ($CO_2$ sólido) adquirido em uma fábrica de sorvetes. Embora o início do *show* seja à meia-noite (24 h), ele o compra às 18 h, mantendo-o em uma "geladeira" de isopor, que absorve calor a uma taxa de aproximadamente 60 W, provocando a sublimação de parte do gelo-seco. Para produzir os efeitos desejados, 2 kg de gelo-seco devem ser jogados em um tonel com água, à temperatura ambiente, provocando a sublimação do $CO_2$ e a produção de uma "névoa". A parte visível da "névoa", na verdade, é constituída por gotículas de água, em suspensão, que são carregadas pelo $CO_2$ gasoso para a atmosfera, à medida que ele passa pela água do tonel. Estime:

a) A massa de gelo-seco, $M_{gelo}$, em kg, que o roqueiro tem de comprar para que, no início do *show*, ainda restem os 2 kg necessários em sua "geladeira".
b) A massa de água, $M_{água}$, em kg, que se transforma em "névoa" com a sublimação de todo o $CO_2$, supondo que o gás, ao deixar a água, esteja em CNTP, incorporando 0,01 g de água por cm$^3$ de gás formado.

**Note e adote:**
Sublimação: passagem do estado sólido para o gasoso
Temperatura de sublimação do gelo-seco = −80 °C
Calor latente de sublimação do gelo-seco = 648 J/g
Para um gás ideal, $PV = nRT$
Volume de 1 mol de um gás em CNTP = 22,4 litros
Massa de 1 mol de $CO_2$ = 44 g
Suponha que o gelo-seco seja adquirido a −80 °C

**118.** (Unifesp-SP) A sonda Phoenix, lançada pela Nasa, detectou em 2008 uma camada de gelo no fundo de uma cratera na superfície de Marte. Nesse planeta, o gelo desaparece nas estações quentes e reaparece nas estações frias, mas a água nunca foi observada na fase líquida. Com auxílio do diagrama de fase da água, analise as três afirmações seguintes.

I. O desaparecimento e o reaparecimento do gelo, sem a presença da fase líquida, sugerem a ocorrência de sublimação.
II. Se o gelo sofre sublimação, a pressão atmosférica local deve ser muito pequena, inferior à pressão do ponto triplo da água.
III. O gelo não sofre fusão porque a temperatura no interior da cratera não ultrapassa a temperatura do ponto triplo da água.

De acordo com o texto e com o diagrama de fases, pode-se afirmar que está correto o contido em

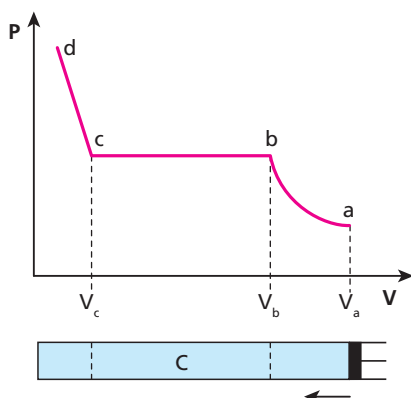
a) I, II e III.
b) II e III, apenas.
c) I e III, apenas.
d) I e II, apenas.
e) I, apenas.

**119.** (Fuvest-SP) Quando água pura é cuidadosamente resfriada, nas condições normais de pressão, pode permanecer no estado líquido até temperaturas inferiores a 0 °C, em um estado instável de "superfusão".
Se o sistema é perturbado, por exemplo, por vibração, parte da água se transforma em gelo e o sistema se aquece até estabilizar em 0 °C. O calor latente de fusão do gelo é igual a 80 cal/g.
Considerando um recipiente termicamente isolado e de capacidade térmica desprezível, contendo 1 L de água a −5,6 °C, à pressão normal, determine:

a) a quantidade, em gramas, de gelo formada, quando o sistema é perturbado e atinge uma situação de equilíbrio a 0 °C.
b) a temperatura final de equilíbrio do sistema e a quantidade de gelo existente (considerando o sistema inicial no estado de "superfusão" a −5,6 °C), ao colocar-se no recipiente um bloco metálico de capacidade térmica igual a 400 cal/°C, à temperatura de 91 °C.

**120.** (Unifesp-SP) Sobrefusão é o fenômeno em que um líquido permanece nesse estado a uma temperatura inferior à de solidificação, para a correspondente pressão. Esse fenômeno pode ocorrer quando um líquido cede calor lentamente, sem que sofra agitação. Agitado, parte do líquido solidifica, liberando calor para o restante, até que o equilíbrio térmico seja atingido à temperatura de solidificação para a respectiva pressão. Considere uma massa de 100 g de água em sobrefusão à temperatura de –10 °C e pressão de 1 atm, o calor específico da água de 1 cal/g °C e o calor latente de solidificação da água de −80 cal/g. A massa de água que sofrerá solidificação se o líquido for agitado será:

a) 8,7 g.
b) 10,0 g.
c) 12,5 g.
d) 50,0 g.
e) 60,3 g.

**121.** (Ufla-MG) A figura a seguir é usada para mostrar uma experiência de laboratório. No cilindro **C**, provido de êmbolo, coloca-se certa quantidade de vapor ($CO_2$, por exemplo); mantendo-se constante a temperatura, o volume do cilindro é diminuído gradativamente, empurrando-se o êmbolo para a esquerda. O gráfico do cilindro mostra como varia a pressão no cilindro em função do volume. Baseados nessa experiência apresentamos três proposições.

I. A pressão $P_c$ ou $P_b$ corresponde à maior pressão que o vapor pode oferecer, a determinada temperatura, antes de começar a condensação.
II. De $V_b$ a $V_c$ (patamar) coexistem, no cilindro, uma mistura de líquido e vapor.
III. Quando o êmbolo atinge o volume $V_c$, todo vapor se condensou e, a partir daí, uma pequena diminuição de volume acarreta um grande aumento da pressão.

Indique a alternativa correta.

a) Apenas a proposição I é correta.
b) Apenas as proposições I e II são corretas.
c) Apenas as proposições I e III são corretas.
d) Apenas as proposições II e III são corretas.
e) As proposições I, II e III são corretas.

## Para raciocinar um pouco mais

**122.** (UFC-CE) **N** recipientes, $n_1$, $n_2$, $n_3$ ..., $n_N$, contêm, respectivamente, massas **m** a uma temperatura **T**, $\frac{m}{2}$ a uma temperatura $\frac{T}{2}$, $\frac{m}{4}$ a uma temperatura $\frac{T}{4}$, ..., $\frac{m}{2^{N-1}}$ a uma temperatura $\frac{T}{2^{N-1}}$, de um mesmo líquido. Os líquidos dos **N** recipientes são misturados, sem que haja perda de calor, atingindo uma temperatura final de equilíbrio $\mathbf{T_f}$.

a) Determine $\mathbf{T_f}$, em função do número de recipientes **N**.
b) Determine $\mathbf{T_f}$, se o número de recipientes for infinito.

**123.** (ITA-SP) Calcule a área útil das placas de energia solar de um sistema de aquecimento de água, para uma residência com quatro moradores, visando manter um acréscimo médio de 30,0 °C em relação à temperatura ambiente. Considere que cada pessoa gasta 30,0 litros de água quente por dia e que, na latitude geográfica da residência, a conversão média mensal de energia é de 60,0 kWh/mês por metro quadrado de superfície coletora. Considere ainda que o reservatório de água quente com capacidade para 200 litros apresente uma perda de energia de 0,30 kWh por mês para cada litro. É dado o calor específico da água c = 4,19 J/g °C.

**124.** A unidade de medida de calor no sistema inglês é a **Btu** (*British Thermal Unit*) e a unidade de medida de calor que utilizamos com frequência no Brasil é a **caloria** (cal). Sabe-se que 1 cal é a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 g de água pura de 14,5 °C até 15,5 °C e que 1 Btu é a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 ℓb (uma libra) da mesma água de 39 °F até 40 °F. Sabendo-se que $1\ g = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ ℓb, qual a relação entre as unidades caloria e Btu?

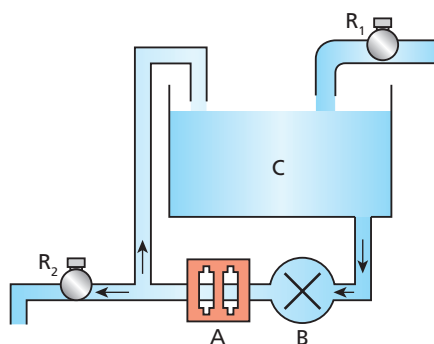
**125.** Um jovem apaixonado entrou em uma joalheria e escolheu um anel para presentear sua namorada. O joalheiro garantiu que no anel, de 10 gramas, 90% eram ouro e 10% eram cobre. Para ter certeza, o estudante levou o anel até o laboratório de Física da sua escola e realizou um experimento de calorimetria, a fim de determinar a massa real de ouro. O anel foi aquecido em uma estufa até atingir a temperatura de 522 °C e, em seguida, foi colocado no interior de um calorímetro com água. O sistema calorímetro–água tem capacidade térmica equivalente à de 100 gramas de água e está à temperatura de 20 °C. A temperatura final de equilíbrio térmico foi de 22 °C.

Sabe-se que:

I. o calor específico da água vale 1,00 cal/g °C; o do ouro, 0,030 cal/g °C; e o do cobre, 0,090 cal/g °C.
II. o calor específico de uma liga metálica é igual à média ponderada dos calores específicos dos metais integrantes da liga, sendo as respectivas massas os pesos da média.

Dessa forma, o estudante determinou que a massa real de ouro no anel era, aproximadamente, igual a:

a) 5,0 gramas;
b) 7,5 gramas;
c) 8,3 gramas;
d) 9,0 gramas;
e) 9,8 gramas.

**126.** (Fuvest-SP) Uma caixa-d'água **C**, com capacidade de 100 litros, é alimentada, através do registro $\mathbf{R_1}$, com água fria a 15 °C, tendo uma vazão regulada para manter sempre constante o nível de água na caixa. Uma bomba **B** retira 3 L/min de água da caixa e os faz passar por um aquecedor elétrico **A** (inicialmente desligado). Ao ligar-se o aquecedor, a água é fornecida, à razão de 2 L/min, através do registro $\mathbf{R_2}$ para uso externo, enquanto o restante da água aquecida retorna à caixa para não desperdiçar energia. No momento em que o aquecedor, que fornece uma potência constante, começa a funcionar, a água, que entra nele a 15 °C, sai a 25 °C. A partir desse momento, a temperatura da água na caixa passa então a aumentar, estabilizando-se depois de algumas horas.

**Dado:** calor específico da água = $4 \cdot 10^3\ \frac{J}{kg \cdot °C}$

Desprezando perdas térmicas, determine, após o sistema passar a ter temperaturas estáveis na caixa e na saída para o usuário externo:

a) a quantidade de calor **Q**, em J (joules), fornecida a cada minuto pelo aquecedor.

b) a temperatura final $T_2$, em °C (graus Celsius), da água que sai pelo registro $R_2$ para uso externo.
c) a temperatura final $T_C$, em °C (graus Celsius), da água na caixa.

**127.** (ITA-SP) Sob pressão de 1 atm, adiciona-se água pura em um cilindro provido de termômetro, de manômetro e de pistão móvel que se desloca sem atrito. No instante inicial ($t_0$), à temperatura de 25 °C, todo o espaço interno do cilindro é ocupado por água pura. A partir do instante ($t_1$), mantendo a temperatura constante (25 °C), o pistão é deslocado e o manômetro indica uma nova pressão. A partir do instante ($t_2$), todo o conjunto é resfriado muito lentamente a −10 °C, mantendo-se-o em repouso por 3 horas. No instante ($t_3$), o cilindro é agitado, observando-se uma queda brusca da pressão. Faça um esboço do diagrama de fases da água e assinale, neste esboço, a(s) fase(s) (co)existente(s) no cilindro nos instantes $t_0$, $t_1$, $t_2$ e $t_3$.

**128.** A **umidade relativa** do ar fornece o grau de concentração de vapor de água em um ambiente. Quando essa concentração atinge 100% (que corresponde ao vapor saturado) começam a surgir gotas d'água que podem se precipitar em forma de chuva. Para calcular a **umidade relativa** em um meio deve-se dividir a concentração de vapor de água existente no ambiente pela concentração máxima de vapor de água que poderia ocorrer nesse meio, nessa temperatura.
A seguir encontramos uma tabela que fornece a pressão máxima de vapor de água (em mm Hg) e a concentração máxima de vapor de água (em g/m³), medidos nas temperaturas indicadas.

| θ (°C) | $p_{máx}$ (mm Hg) | Concentração máxima (g/m³) |
|---|---|---|
| 0 | 4,6 | 4,9 |
| 1 | 4,9 | 5,2 |
| 2 | 5,3 | 5,6 |
| 5 | 6,5 | 6,8 |
| 10 | 9,2 | 9,4 |
| 20 | 17,6 | 17,5 |
| 30 | 31,9 | 30,4 |

Usando essas informações, determine a **umidade relativa** do ar no interior de uma sala de 5,0 metros de comprimento, 4,0 metros de largura e 3,0 metros de altura que contém 441 gramas de vapor de água misturados com o ar,na temperatura de 20 °C.
a) 23%
b) 35%
c) 42%
d) 58%
e) 71%

**129.** Observe as informações:
I. A umidade relativa do ar corresponde à razão entre a pressão parcial de vapor existente no local e a pressão de vapor saturado na temperatura local.
II. O ser humano sente-se confortável quando a umidade relativa do ar está por volta de 50%. Uma umidade maior que 50% reduz a evaporação do suor da pele, provocando desconforto. Uma umidade menor que 50% tem um efeito secante na pele e na mucosa.
III. A tabela a seguir mostra a pressão máxima de vapor de água em função da temperatura.

| θ (°C) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| P (mm Hg) | 4,58 | 6,54 | 9,21 | 12,8 | 17,5 |
| θ (°C) | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| P (mm Hg) | 23,8 | 31,8 | 55,3 | 92,5 | 149 |

Uma pessoa encontra-se em um ambiente onde a temperatura é de 25 °C e a pressão de vapor de água é de 16,2 mm Hg. Pode-se afirmar que:
a) nesse local está chovendo.
b) a umidade relativa do ar, nesse ambiente, é menor que 50%.
c) a umidade relativa do ar, nesse ambiente, é igual a 89%.
d) essa pessoa pode estar sentindo sua pele ressecada.
e) a umidade relativa do ar, nesse ambiente, é aproximadamente igual a 68%.

**130.** (ITA-SP) Um termômetro em uma sala de 8,0 × 5,0 × 4,0 m indica 22 °C e um higrômetro indica que a umidade relativa é de 40%. Qual é a massa de vapor de água na sala, se sabemos que a essa temperatura o ar saturado contém 19,33 g de água por metro cúbico?

**131.** Uma arma dispara um projétil de chumbo de massa 20,0 g, que se move de encontro a um grande bloco de gelo fundente. No impacto, o projétil tem sua velocidade reduzida de 100 m/s para 0 e entra em equilíbrio térmico com o gelo. Não havendo dissipação de energia, ocorre a fusão de 2,25 g de gelo. Sendo o calor específico sensível do chumbo igual a 0,031 cal/g °C e o calor específico latente de fusão do gelo igual a 80 cal/g, qual era a temperatura do projétil no momento do impacto?
**Dado:** 1 cal = 4 J.

**132.** Sabe-se que a energia contida em um fóton é estabelecida pela relação:

$$E = hf$$

Onde **h** é a constante de Planck e **f** a frequência da radiação.
A equação fundamental da Ondulatória é:

$$V = \lambda f$$

onde **λ** é comprimento de onda da radiação.
Resolva a questão dada a seguir.
Um volume de 0,5 mL de água é aquecido por radiação de comprimento de onda igual a $1,0 \cdot 10^4$ Å, absorvendo $4,2 \cdot 10^{18}$ fótons por segundo. Considerando que toda a energia de cada fóton é absorvida pela água, determinar o intervalo de tempo necessário para que esse volume sofra a elevação de 1,0 K em sua temperatura.
**Dados:**
densidade da água = $1,0 \cdot 10^3$ kg/m³
calor específico sensível da água = $4,2 \cdot 10^3$ J/kg · K
constante de Planck = $6,63 \cdot 10^{-34}$ Js
velocidade da luz no vácuo = $3,0 \cdot 10^8$ m/s

# Tópico 4

# Gases perfeitos

## Bloco 1

Thinkstock/Getty Images

Quando se pensa em um gás, o primeiro exemplo que costuma vir à cabeça de quase todo mundo é o ar que respiramos. Esse ar, que forma a atmosfera terrestre, é uma mistura de vários gases, na qual predominam o nitrogênio (78%) e o oxigênio (21%). Em razão dos campos gravitacional e magnético de nosso planeta, esses gases são atraídos e formam uma fina cobertura, com praticamente 99% da atmosfera contida em uma faixa que vai da superfície terrestre a pouco mais de 30 km de altitude. Essa camada gasosa é essencial à vida por conter o oxigênio e filtrar grande parte das radiações nocivas aos seres, como a ultravioleta. O oxigênio é consumido pela respiração de alguns seres vivos, os quais expelem um subproduto desse processo, o gás carbônico. Este, por sua vez, é absorvido por plantas, que, pela fotossíntese, o transformam em oxigênio.

O peso da atmosfera produz uma pressão sobre a superfície da Terra evitando que a água líquida de oceanos, mares, rios e lagos se transforme rapidamente em vapor.

Os gases sempre fizeram parte de nosso dia a dia. Assim, a partir do século XVII, vários cientistas, ao iniciarem estudos sobre as propriedades dos gases, notaram que deveriam fazer uma simplificação, já que não havia uma uniformidade no comportamento de todos os gases. Daí o surgimento do modelo teórico que foi denominado **gás perfeito** ou **gás ideal**. Faremos, a seguir, um estudo desse modelo que será muito útil mais adiante.

### 1. Modelo macroscópico de gás perfeito

No tópico 3, fizemos a distinção entre vapor e gás, que constituem o estado gasoso. Lembremos que gás é a situação física de uma substância que se encontra a uma temperatura maior que a sua temperatura crítica.

Os diferentes gases reais (hidrogênio, oxigênio, nitrogênio, hélio etc.), devido às suas características moleculares, em geral apresentam comportamentos diferentes. Quando são colocados sob baixas pressões e altas temperaturas, entretanto, passam a se comportar, macroscopicamente, de maneira semelhante.

Assim, para iniciar o estudo dos gases, é conveniente adotarmos um modelo teórico, simples, sem existência prática, de comportamento apenas aproximado ao comportamento dos gases reais. Essa aproximação será tanto melhor quanto menor for a pressão e maior for a temperatura. A esse modelo chamamos de **gás perfeito**.

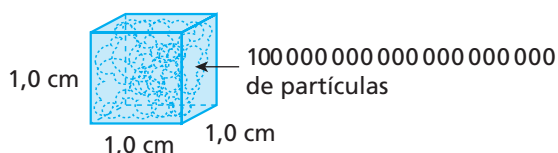
As regras do comportamento dos gases perfeitos foram estabelecidas por Robert Boyle, Jacques Charles, Louis Joseph Gay-Lussac e Paul Emile Clapeyron entre os séculos XVII e XIX, como veremos adiante.

Diremos, então, que um gás se enquadra no modelo teórico de gás perfeito se obedece às leis de Boyle, Charles e Gay-Lussac — que veremos oportunamente com detalhes. Tais leis estabelecem as regras do comportamento "externo" do gás perfeito, levando-se em conta as grandezas físicas a ele associadas — temperatura, volume e pressão —, denominadas **variáveis de estado** do gás.

## 2. As variáveis de estado de um gás perfeito

Sempre que considerarmos determinada massa de um gás, estaremos estabelecendo uma quantidade **N** de partículas desse gás. Esse número **N**, entretanto, é sempre muito grande, da ordem de $10^{20}$ partículas por centímetro cúbico.

No local onde você se encontra, há aproximadamente, em cada centímetro cúbico, $10^{20}$ moléculas dos componentes do ar (oxigênio, hidrogênio, nitrogênio etc.).

Por ser mais cômodo, costuma-se quantificar uma porção de gás por meio do seu **número de mols** (**n**).

Um mol de um gás constitui-se de um número de moléculas desse gás, dado pelo **número de Avogadro** ($A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol). O número de mols é obtido dividindo-se a massa do gás (**m**) pela sua massa molar ou molécula-grama (**M**), ambos na mesma unidade.

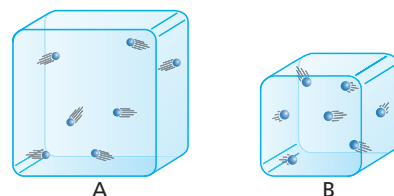
$$n = \frac{\text{massa do gás}}{\text{mol}} = \frac{m}{M}$$

Vimos que, para determinada massa de gás perfeito, as variáveis de estado são as grandezas físicas temperatura (**T**), volume (**V**) e pressão (**p**).

- A **temperatura** é a grandeza física que está relacionada à energia cinética de translação das partículas do gás, como veremos oportunamente.

Como usaremos para temperatura a escala absoluta Kelvin, o símbolo adotado será **T**.

Lembremos que: $T(K) = \theta_C(°C) + 273$

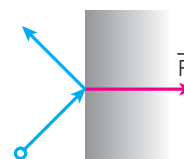
- Sendo os gases extremamente expansíveis, suas moléculas ocupam todo o espaço disponível no recipiente que os contém. Assim, o **volume** do gás corresponde à capacidade do recipiente.

Duas porções iguais (mesmo número de partículas) de um mesmo gás perfeito, colocadas em dois recipientes de capacidades diferentes, ocupam volumes diferentes ($V_A > V_B$).

As unidades de **volume** que encontraremos com maior frequência são o metro cúbico ($m^3$) e o litro (L).

**Atenção:** $1\ L = 1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3$
$1\ m^3 = 10^3\ L$

- A pressão é uma grandeza escalar, definida como a razão entre a intensidade da força resultante, aplicada perpendicularmente a uma superfície e à área dessa superfície.

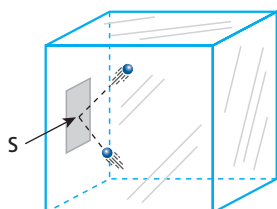
A pressão numa superfície de área **A**, quando nela aplicamos uma força resultante normal (perpendicular) de módulo **F**, é definida pela relação:

$$p = \frac{F}{A}$$

Observe que cada partícula de gás exerce uma pequena força na superfície. Deve-se considerar apenas as componentes perpendiculares à superfície onde estão ocorrendo as colisões.

As unidades mais usadas para pressão são o pascal (Pa), a atmosfera técnica métrica (atm), a atmosfera normal (At) e o milímetro de mercúrio (mm Hg), valendo as equivalências:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$
$$1 \text{ At} = 760 \text{ mm Hg} \cong 10^5 \text{ Pa}$$
$$1 \text{ atm} = 1 \text{ kgf/cm}^2 \cong 10^5 \text{ Pa}$$

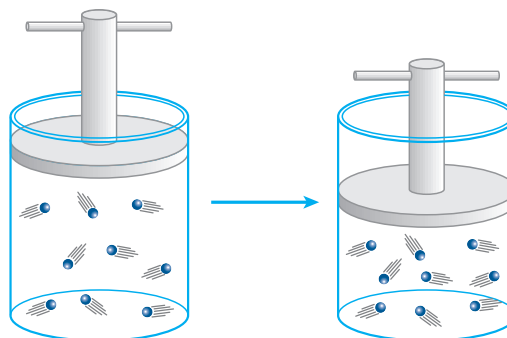
A pressão média que o gás exerce nas paredes internas do recipiente é devida aos choques de suas moléculas com essas paredes. Por ocasião desses choques, as moléculas aplicam força nas paredes.

Considere uma superfície **S** de área unitária contida em uma das paredes do recipiente.

A cada instante, a força total aplicada em **S** pelas **N** moléculas que sobre ela estão incidindo determina a pressão média exercida pelo gás. É previsível que essa pressão não deva variar, se forem mantidas as condições do gás, pois teremos, a cada instante, o mesmo número **N** de moléculas chocando-se contra **S** e exercendo a mesma força total. Se, porém, introduzirmos mais gás no recipiente ou diminuirmos o seu volume, sem variarmos a temperatura, o número **N** de choques em **S** a cada instante aumentará. Com isso, a pressão média exercida pelo gás também aumentará, apesar de não se ter alterado a violência de cada choque.

Experimentos mostram, porém, que, se aquecermos o gás a volume constante, a pressão média também aumentará. Isso evidencia que a temperatura do gás está relacionada com a energia cinética de translação de suas moléculas. Nesse experimento, a pressão média aumenta porque tanto o número **N** de moléculas que se chocam contra **S** como a força exercida ali pelas moléculas aumentam.

Destaquemos que:

- a pressão média exercida por um gás está relacionada a dois fatores: a quantidade de moléculas que colidem por unidade de área e a força exercida em cada choque;
- a temperatura está relacionada de fato com a energia cinética de translação das moléculas do gás.

Aí estão as grandezas físicas temperatura, volume e pressão de um gás perfeito, suas variáveis de estado, que em conjunto definem o comportamento macroscópico do gás. Para determinada massa, a variação de pelo menos duas dessas variáveis de estado caracteriza uma **transformação** sofrida pelo gás.

No exemplo ilustrado acima, mesmo que a temperatura não se altere, a diminuição de volume produz um aumento de pressão. Esse fato caracteriza uma **transformação** sofrida pelo gás.

A. Demotes/PHOTONONSTOP/Diomedia

O ar existente no interior de um balão é aquecido e se expande, tornando-se menos denso que o ar externo. Esse fato faz com que o balão seja empurrado para cima, ganhando altitude.

## 3. Lei de Boyle

Robert Boyle (1627-1691), físico e químico irlandês, foi o responsável pela lei que rege as transformações sofridas por determinada massa de gás perfeito quando sua temperatura se mantém constante (transformação isotérmica).

The Bridgeman Art Library/Grupo Keystone

Retrato de Robert Boyle.

É de fácil compreensão que uma redução de volume de um gás aumentará a concentração de partículas, aumentando o número de colisões nas paredes do recipiente, provocando um aumento na pressão do gás. Em contrapartida, o aumento do volume irá "espalhar" mais as partículas, diminuindo a concentração de choques nas paredes do recipiente, diminuindo assim a pressão do gás.

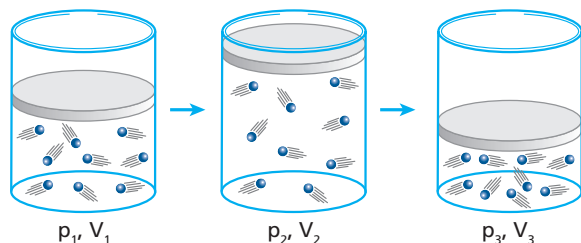
Para o modelo de gás perfeito vale o enunciado a seguir.

Quando determinada massa de um gás perfeito sofre uma **transformação isotérmica**, sua pressão varia de maneira inversamente proporcional ao volume por ele ocupado.

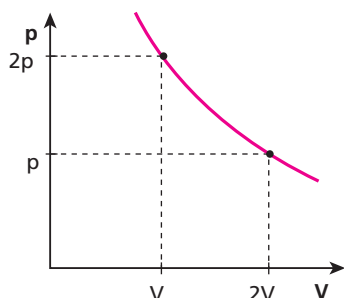
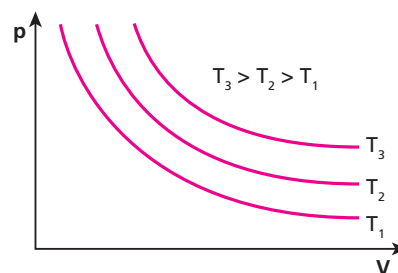
Essa lei pode ser expressa matematicamente por:

$$p\,V = K_1$$

em que **p** é a pressão, **V** o volume e $\mathbf{K_1}$ uma constante que depende da massa, da temperatura e da natureza do gás.

Isso significa, por exemplo, que, à temperatura constante, para dobrarmos o valor da pressão devemos reduzir o valor do volume à metade.

Nessas transformações, a massa e a temperatura do gás perfeito mantêm-se constantes. Dessa forma, a **Lei de Boyle** garante a validade da relação:

$$p_1\,V_1 = p_2\,V_2 = p_3\,V_3$$

Num diagrama pressão (**p**) × volume (**V**), a representação gráfica da Lei de Boyle é um **ramo de hipérbole**.

Para cada valor da temperatura absoluta do gás obtemos uma hipérbole diferente. Quanto maior a temperatura, mais afastada da origem dos eixos encontra-se a hipérbole.

## 4. Lei de Charles e Gay-Lussac

Retrato de Gay-Lussac.

A lei que rege a **transformação isobárica**, em que determinada massa de gás perfeito se mantém sob pressão constante, foi estabelecida pelo físico e químico francês Louis Joseph Gay-Lussac (1778-1850). Antes, entretanto, Jacques A. C. Charles (1746-1823), físico francês, já havia apresentado trabalhos a respeito. Por isso, a lei que rege as transformações isobáricas é denominada **Lei de Charles e Gay-Lussac**.

No início deste tópico vimos que a pressão média exercida por um gás depende de dois fatores: da quantidade de partículas que colidem com a unidade de área da superfície interna do recipiente e da força exercida em cada colisão. Assim, se aumentamos o volume de um gás, suas partículas ficam mais espalhadas, diminuindo o número de colisões com a unidade de área. Para compensarmos isso, devemos aumentar a intensidade das colisões, isto é, aumentar a temperatura do gás para manter a pressão constante. Se diminuirmos o volume do gás, as partículas ficarão mais concentradas, aumentando a frequência de colisões nas unidades de área. Para a manutenção da pressão devemos diminuir a intensidade das colisões, isto é, diminuir a temperatura do gás.

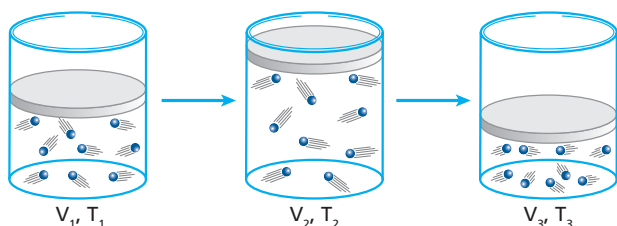
Assim, a Lei de Charles e Gay-Lussac pode ser enunciada da seguinte forma:

Quando determinada massa de gás perfeito passa por uma **transformação isobárica**, seu volume deve variar, mantendo-se diretamente proporcional à temperatura absoluta desse gás.

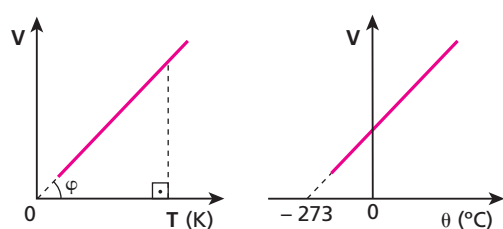
Essa lei pode ser expressa matematicamente por:

$$V = K_2\,T$$

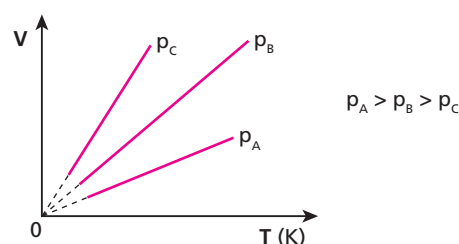
em que **V** é o volume ocupado pelo gás, **T** sua temperatura absoluta e $\mathbf{K_2}$ uma constante que depende da massa, da pressão e da natureza do gás, sendo inversamente proporcional ao valor da pressão, que permanece constante.

Dessa forma, para mantermos constante a pressão de um gás perfeito, ao dobrarmos o valor de sua temperatura absoluta, devemos dobrar a capacidade do recipiente que o contém.

Nessas transformações, a massa e a pressão do gás perfeito mantêm-se constantes. Dessa forma, a **Lei de Charles e Gay-Lussac** garante a validade da relação:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

Num diagrama volume (**V**) × temperatura (**T** ou **θ**), a **Lei de Charles e Gay-Lussac** é representada por um segmento de reta oblíquo aos eixos.

É importante observar que, sendo o gás perfeito um modelo teórico constituído de partículas de volume desprezível, à temperatura correspondente ao zero absoluto, o volume desse gás praticamente se anula.

Para três pressões $\mathbf{p_A}$, $\mathbf{p_B}$ e $\mathbf{p_C}$ diferentes, sendo $p_A > p_B > p_C$, uma mesma massa de um mesmo gás perfeito apresenta três valores diferentes para $\mathbf{K_2}$, de forma que $K_{2A} < K_{2B} < K_{2C}$. Observe que $\mathbf{K_2}$ é inversamente proporcional à pressão, sendo que, para a maior pressão, temos o menor valor de $\mathbf{K_2}$ e, portanto, o menor ângulo de declividade **φ**.

Assim, temos:

## 5. Lei de Charles

Recebe a denominação de **Lei de Charles** a lei que rege as transformações a volume constante de determinada massa de gás. As transformações a volume constante são chamadas de **isovolumétricas**, **isométricas** ou **isocóricas**.

The Bridgeman Art Library/Grupo Keystone

O físico francês Jacques Alexandre Cesar Charles (1746-1823) foi o primeiro a ter a ideia de usar hidrogênio para encher balões aerostáticos.

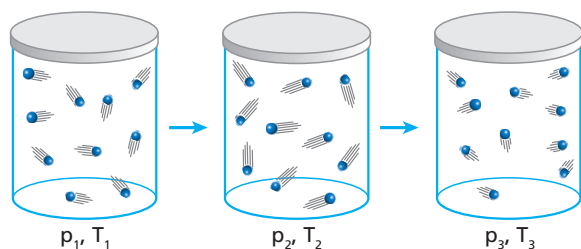
A partir do estudo que fizemos da pressão média exercida por um gás, podemos inferir que, mantendo-se o volume constante, ao aumentarmos a temperatura absoluta, aumentaremos a força média das colisões na unidade de área e a frequência de colisões, já que as partículas estarão mais rápidas. Assim, a pressão do gás aumentará. Por outro lado, se diminuirmos a temperatura absoluta, a intensidade e a frequência das colisões diminuirão, diminuindo a pressão desse gás.

Para nosso modelo de gás perfeito, a **Lei de Charles** pode ser enunciada da seguinte forma:

> Quando determinada massa de gás perfeito sofre uma **transformação isométrica**, sua pressão mantém-se diretamente proporcional à sua temperatura absoluta.

Essa lei pode ser expressa matematicamente por:

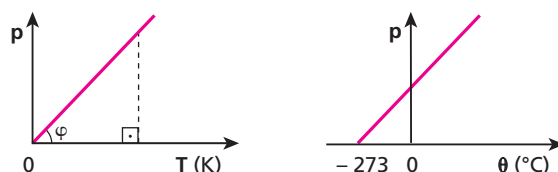
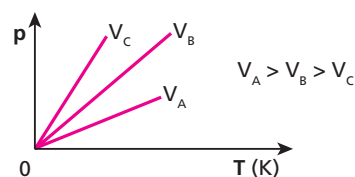
$$p = K_3\,T$$

em que **p** é a pressão do gás, **T** a sua temperatura absoluta e $\mathbf{K_3}$ uma constante que depende da massa, do volume e da natureza do gás, sendo inversamente proporcional ao valor do volume, que permanece constante.

Nessas transformações, a massa e o volume do gás perfeito mantêm-se constantes. Dessa forma, a **Lei de Charles** garante a validade da relação:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$$

Assim, mantendo-se o volume constante, ao aumentarmos a temperatura absoluta de um gás perfeito, aumentaremos a violência de cada choque das partículas nas paredes do recipiente, elevando a pressão na mesma proporção da temperatura absoluta.

Admitindo que no zero absoluto cessa o movimento de translação das moléculas do gás, podemos concluir que a essa temperatura as partículas não mais se chocam com as paredes do recipiente, anulando-se a pressão.

Num diagrama pressão (**p**) × temperatura (**T** ou **θ**), a **Lei de Charles** é representada por um segmento de reta oblíquo aos eixos.

Para três volumes $\mathbf{V_A}$, $\mathbf{V_B}$ e $\mathbf{V_C}$ diferentes, sendo $V_A > V_B > V_C$, uma mesma massa de um mesmo gás perfeito apresenta três valores diferentes para $\mathbf{K_3}$, de forma que $K_{3A} < K_{3B} < K_{3C}$. Observe que $\mathbf{K_3}$ é inversamente proporcional ao volume, sendo que, para o maior volume, temos o menor valor de $\mathbf{K_3}$ e, portanto, o menor ângulo **φ**.

## Faça você mesmo

Para este experimento, você precisará de uma garrafa de plástico com gargalo estreito, vinagre, bicarbonato de sódio, um funil de papel (ou uma folha de papel) e um balão de borracha.

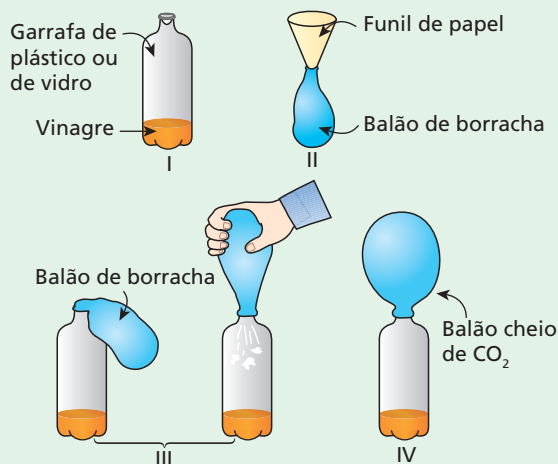
I. Coloque vinagre no interior da garrafa até aproximadamente um quinto da sua capacidade.

II. Usando um funil feito com uma folha de papel, coloque o bicarbonato de sódio no interior do balão de borracha.

III. Em seguida, prenda o bico do balão no gargalo da garrafa e levante-o, de modo que o bicarbonato de sódio caia no interior da garrafa já com o vinagre.

IV. A reação causada pela mistura de bicarbonato de sódio com vinagre libera uma grande quantidade de dióxido de carbono ($CO_2$) gasoso, que irá provocar a expansão do balão de borracha.

Esse experimento mostra que a pressão exercida pelo gás deve-se aos choques das partículas desse gás contra as faces internas do balão, que se expande e toma a forma esférica.

No final deste experimento, a boca do balão cheio de $CO_2$ é fechada e o balão é colocado no interior de um *freezer*. Após alguns minutos, observe o balão. O que aconteceu? Você saberia explicar?

## Exercícios

nível 1

**1.** Um gás encontra-se contido sob a pressão de $5{,}0 \cdot 10^3$ N/m$^2$ no interior de um recipiente cúbico cujas faces possuem uma área de $2{,}0$ m$^2$. Qual é o módulo da força média exercida pelo gás sobre cada face do recipiente?

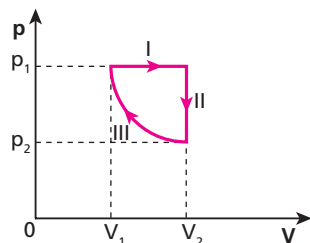
**2.** Determinada massa de gás perfeito sofre as transformações indicadas a seguir:

I. Compressão à temperatura constante.
II. Expansão à pressão constante.
III. Aquecimento a volume constante.

Nessa ordem, as transformações podem ser chamadas também de:

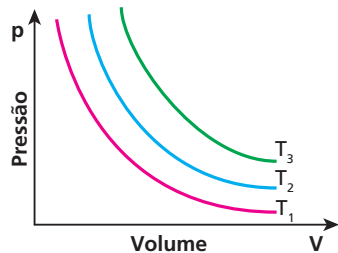
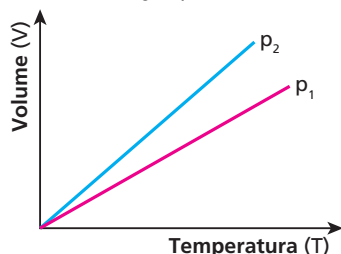
a) isobárica, adiabática e isocórica.
b) isométrica, isotérmica e isobárica.
c) isotérmica, isobárica e adiabática.
d) isométrica, isocórica e isotérmica.
e) isotérmica, isobárica e isométrica.

**3.** (Uneb-BA) Uma amostra de gás ideal sofre as transformações I, II e III, identificadas no gráfico pressão *versus* volume apresentado ao lado.

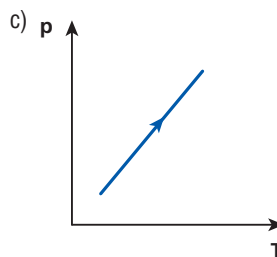
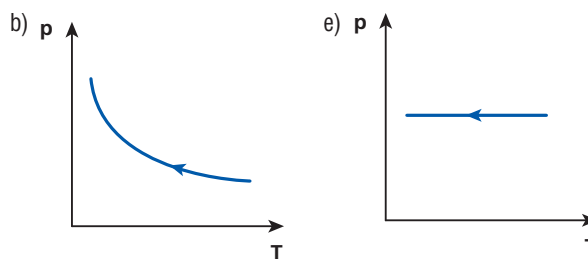
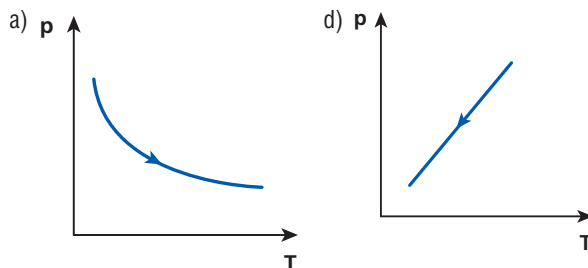
Sabe-se que a transformação III é adiabática.

As transformações I e II são, respectivamente:

01) isobárica e isotérmica.
02) isobárica e isométrica.
03) isométrica e isotérmica.
04) isométrica e isobárica.
05) isotérmica e isobárica.

**4.** O diagrama representa três isotermas $T_1$, $T_2$ e $T_3$, referentes a uma mesma amostra de gás perfeito. A respeito dos valores das temperaturas absolutas $T_1$, $T_2$ e $T_3$, pode-se afirmar que:

a) $T_1 = T_2 = T_3$.
b) $T_1 < T_2 < T_3$.
c) $T_1 > T_2 > T_3$.
d) $T_1 = T_2 < T_3$.
e) $T_2 > T_1 < T_3$.

**5.** O diagrama mostra duas transformações isobáricas sofridas por uma mesma amostra de gás perfeito.

Com base nesses dados, pode-se afirmar que:

a) $p_2 > p_1$.
b) $p_2 < p_1$.
c) $p_2 = p_1$.
d) $p_2 = 2\,p_1$.
e) Num diagrama volume *versus* temperatura absoluta, não se pode comparar diferentes valores da pressão.

**6.** Um gás ideal confinado em um recipiente fechado de volume constante sofre uma transformação termodinâmica em que a sua pressão diminui. Assinale a seguir o diagrama pressão (**p**) *versus* temperatura absoluta (**T**) compatível com essa transformação.

**7. E.R.** Em um recipiente indeformável, aprisiona-se certa massa de gás perfeito a 27 °C. Medindo a pressão exercida pelo gás, obtemos o valor 90 cm Hg. Se elevarmos a temperatura para 170,6 °F, qual será a nova pressão do gás?

**Resolução:**

Uma vez que o volume permanece constante, podemos aplicar a Lei de Charles, que é expressa da seguinte forma:

$$p = K\,T \Rightarrow \frac{p}{T} = K$$

Assim, temos:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{(I)}$$

São dados:

$$p_1 = 90 \text{ cm Hg}$$
$$T_1 = 27 \text{ °C} = 300 \text{ K}$$

Transformando 170,6 °F em unidades da escala Kelvin, temos:

$$\frac{\theta_F - 32}{9} = \frac{T - 273}{5} \Rightarrow \frac{170{,}6 - 32}{9} = \frac{T_2 - 273}{5}$$

$$15{,}4 = \frac{T_2 - 273}{5} \Rightarrow T_2 = 350\ \text{K}$$

Substituindo os valores conhecidos na relação (I), encontramos:

$$\frac{90}{300} = \frac{p_2}{350} \Rightarrow \boxed{p_2 = 105\ \text{cm Hg}}$$

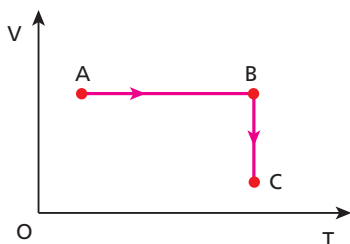
**8.** Na superfície da Terra, um balão apresenta um volume de 50 m³, temperatura de 54 °C e pressão de 80 cm Hg. Ao subir sua temperatura permanece constante e, em determinada altura, seu volume atinge 1 000 m³. Qual é a nova pressão suportada pelo balão, em cm Hg?

**9.** No interior de um cilindro, provido de êmbolo, uma amostra de gás ideal pode sofrer transformações à pressão constante. Determinada massa desse gás foi confinada no interior do recipiente ocupando 0,5 m³ a 10 °C. Aquecendo-se o sistema, observou-se o êmbolo subindo até atingir o volume interno de 1,0 m³. Em graus Celsius, qual é a temperatura do gás no final do experimento?

**10.** (PUC-SP) Determinada massa de gás perfeito sofre uma transformação isométrica. A pressão inicial vale 4,0 atm e a temperatura inicial é de 47 °C. Se a temperatura final é de 127 °C, qual é o valor da pressão final?

**11.** (UFPR) O trecho da BR-277 que liga Curitiba a Paranaguá tem sido muito utilizado pelos ciclistas curitibanos para seus treinos. Considere que um ciclista, antes de sair de Curitiba, calibrou os pneus de sua bicicleta com pressão de 30 libras por polegada ao quadrado (lb/pol²), a uma temperatura inicial de 22 °C. Ao terminar de descer a serra, ele mediu a pressão dos pneus e constatou que ela subiu para 36 libras por polegada ao quadrado. Considerando que não houve variação do volume dos pneus, calcule o valor da temperatura dos pneus dessa bicicleta nesse instante.

## Exercícios — nível 2

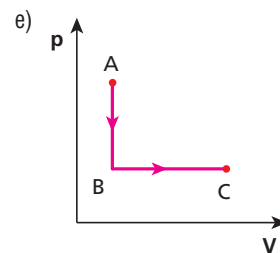
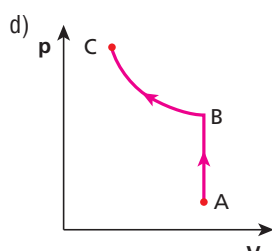
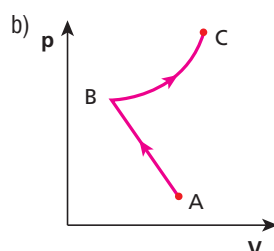
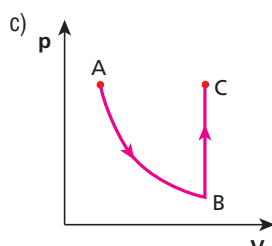
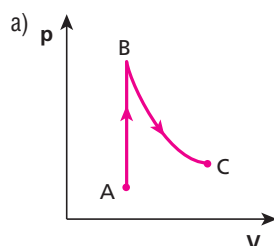
**12.** Um gás perfeito tem como variáveis de estado as grandezas: pressão (**p**), volume (**V**) e temperatura absoluta (**T**). O diagrama volume (**V**) × temperatura absoluta (**T**) representa as transformações AB e BC sofridas por determinada massa de gás perfeito.

Num diagrama pressão (**p**) × volume (**V**), essas transformações poderiam ser representadas por:

a)

b)

c)

d)

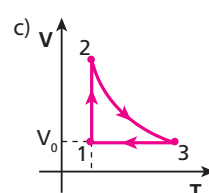
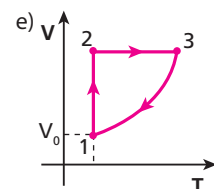
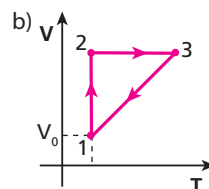
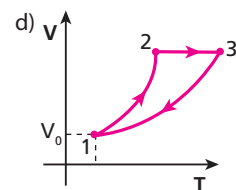
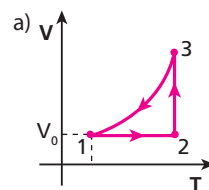
e)

**13.** (UFMA) Um determinado gás perfeito, contido dentro de um recipiente, ocupa inicialmente um volume $V_0$. O gás sofre então uma expansão isotérmica, atingindo o estado 2, a partir do qual passa por um processo de aquecimento isovolumétrico, atingindo o estado 3. Do estado 3, o gás retorna ao estado 1 (inicial) por meio de uma compressão isobárica. Indique qual dos diagramas a seguir representa a sequência dos processos acima:

a)

b)

c) V, 2, $V_0$, 1, 3, T

d)

e)

**14.** (Fuvest-SP) Em algumas situações de resgate, bombeiros utilizam cilindros de ar comprimido para garantir condições normais de respiração em ambientes com gases tóxicos.
Esses cilindros, cujas características estão indicadas na tabela, alimentam máscaras que se acoplam ao nariz.
Quando acionados, os cilindros fornecem para respiração, a cada minuto, cerca de 40 litros de ar, à pressão atmosférica e temperatura ambiente. Neste caso, a duração do ar de um desses cilindros seria de, aproximadamente:

a) 20 minutos.
b) 30 minutos.
c) 45 minutos.
d) 60 minutos.
e) 90 minutos.

| Cilindro para respiração | |
|---|---|
| **Gás** | ar comprimido |
| **Volume** | 9 litros |
| **Pressão interna** | 200 atm |

Pressão atmosférica local = 1 atm
A temperatura durante todo o processo permanece constante.

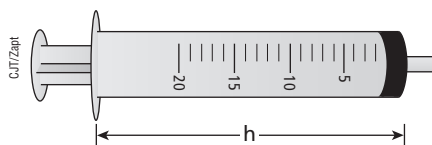
**15.** (Fuvest-SP) Um congelador doméstico (*freezer*) está regulado para manter a temperatura de seu interior a −18 °C. Sendo a temperatura ambiente igual a 27 °C (ou seja, 300 K), o congelador é aberto e, pouco depois, fechado novamente. Suponha que o *freezer* tenha boa vedação e que tenha ficado aberto o tempo necessário para o ar em seu interior ser trocado por ar ambiente. Quando a temperatura do ar no *freezer* voltar a atingir −18 °C, a pressão em seu interior será:

a) cerca de 150% da pressão atmosférica.
b) cerca de 118% da pressão atmosférica.
c) igual à pressão atmosférica.
d) cerca de 85% da pressão atmosférica.
e) cerca de 67% da pressão atmosférica.

**16.** Certa massa de gás ideal, inicialmente nas CNTP (Condições Normais de Temperatura e Pressão: T = 0 °C = 273 K e p = 1,0 atm), sofre uma transformação isobárica e aumenta seu volume em 80%. Em graus Celsius, qual foi a variação de temperatura sofrida por esse gás?

**17.** Certa massa de gás perfeito está em um recipiente de volume constante. No início, a temperatura do gás é de 47 °C e a pressão registrada é equivalente a 100 mm Hg. Qual será a nova pressão do gás se a sua temperatura for alterada para 207 °C?

**18.** Uma garrafa metálica aprisiona ar a uma temperatura de 27 °C, sob pressão de 1,2 atm. Essa garrafa é colocada no interior de um forno e é aquecida até que sua tampa seja ejetada. Supondo que o ar se comporte como um gás perfeito, a dilatação da garrafa seja desprezível e a condição para a tampa ser ejetada é uma pressão igual a 2,8 atm, qual é a temperatura do ar no instante em que ela escapa da garrafa?

**19.** O êmbolo de uma seringa tampada é deslocado para a esquerda de modo que a distância **h** sofre uma redução de 20%. Como essa compressão ocorre a uma temperatura constante, qual o aumento percentual da pressão do ar no interior da seringa?

# Bloco 2

## 6. A Equação de Clapeyron

Foi o físico francês Benoît Paul Émile Clapeyron (1799-1864) quem estabeleceu a equação que relaciona as variáveis de estado de um gás perfeito: pressão (**p**), volume (**V**) e temperatura absoluta (**T**). Equação que nada mais é do que a síntese das leis de Boyle, Charles e Gay-Lussac.

Retrato de Benoît Paul Émile Clapeyron (1799-1864), engenheiro e físico francês que estudou os gases perfeitos e ajudou a desenvolver a Termodinâmica. (Coleção particular.)

MP/Leemage/Other Images

De acordo com a **Lei de Boyle**, a pressão (**p**) e o volume (**V**) de um gás perfeito são inversamente proporcionais. Da **Lei de Charles e Gay-Lussac**, sabemos que o volume (**V**) é diretamente proporcional à temperatura absoluta (**T**) do gás. Da **Lei de Charles**, sabemos que a pressão (**p**) é diretamente proporcional à temperatura absoluta (**T**) do gás.

Não podemos esquecer ainda que, se a pressão de um gás é produzida pelo choque de suas partículas com as paredes do recipiente, a pressão (**p**) é função também do número de partículas, isto é, da massa (**m**) do gás considerado.

Tendo isso em conta, podemos escrever que:

$$p = K\,\frac{m\,T}{V}$$

em que **K** é uma constante que depende apenas da natureza do gás.

Pode-se comprovar que, para diferentes gases, o valor de **K** é inversamente proporcional à massa molar (**M**) de cada gás:

$$K = \frac{R}{M}$$

em que **R** é uma constante de proporcionalidade igual para todos os gases. É por isso que a constante **R** é denominada **constante universal dos gases perfeitos**.

Assim, a relação anterior fica dada por:

$$p = R\,\frac{m}{M}\,\frac{T}{V} \Rightarrow p\,V = \frac{m}{M}\,R\,T$$

Uma vez que o quociente m/M é o número de mols (**n**) do gás, a Equação de Clapeyron para os gases perfeitos toma seu aspecto definitivo:

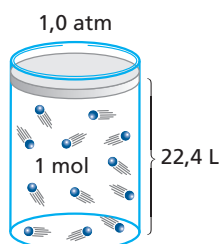
$$p\,V = n\,R\,T$$

## 7. A constante universal dos gases perfeitos (R) e seus valores

Nas denominadas condições normais de temperatura e pressão (CNTp), quando a temperatura é 0 °C e a pressão assume o valor 1,0 atm, 1 mol de qualquer gás ocupa um volume correspondente a 22,4 litros.

Resumindo (nas CNTp):

$p = 1{,}0$ atm

$T = 0\ °C = 273$ K

1 mol de qualquer gás ocupa um volume de 22,4 L. Da **Equação de Clapeyron**, temos:

$$R = \frac{p\,V}{n\,T}$$

Substituindo os dados citados, concluímos:

$$R = \frac{1\text{atm} \cdot 22{,}4\text{L}}{1\ \text{mol} \cdot 273\ \text{K}}$$

$$R = 0{,}082\ \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}}$$

A grandeza **R** é uma constante física; assim, possui unidades que, ao serem mudadas, produzem alteração no valor numérico da constante.

A constante **R**, dependendo das unidades das demais grandezas, pode assumir os valores:

$$R = 0{,}082\ \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}} = 8{,}31\ \frac{\text{joules}}{\text{mol K}} \cong 2\ \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

Thinkstock/Getty Images

Quando uma pessoa assopra o bico de um balão, ela está injetando ar no seu interior (o número de mols **n** está aumentando). As partículas de ar chocam-se com as paredes internas, forçando-as. Devido à elasticidade da borracha, o balão aumenta de volume. Nessa situação, estão sendo alterados o número de mols, a pressão e o volume do gás.

## Leitura

### A atmosfera terrestre e o oxigênio que respiramos

No entorno da superfície da Terra encontramos gases que formam a nossa atmosfera. O nitrogênio é o principal desses gases participando com 78% do total, o oxigênio é o segundo com 21% e o restante 1% é formado por argônio, dióxido de carbono ($CO_2$), neônio, hélio, metano ($CH_4$), criptônio, hidrogênio e xenônio. Todos eles são chamados de gases reais e, rigorosamente, não obedecem às leis de Boyle, Charles e Gay-Lussac e a equação de Clapeyron. No entanto, sob altas temperaturas e baixas pressões, esses gases se comportam de maneira a se aproximar do comportamento dos gases perfeitos. Assim, **teoricamente** podemos supor que o ar atmosférico (que é a mistura dos gases citados) se comporta dentro dos padrões dos gases perfeitos.

O ar que respiramos possui aproximadamente 21% de oxigênio, gás indispensável para a nossa vida. Quando expiramos devolvemos 16% para a nossa atmosfera e ficamos com 5% do oxigênio inspirado. Esse gás, através dos pulmões, irá se juntar ao nosso sangue e fará parte das reações químicas que irão renová-lo. Uma pessoa em atividades normais respira (inspira e expira) aproximadamente 8 litros de ar a cada minuto, 11 500 litros de ar por dia, sendo 5%, quase 600 litros de oxigênio puro, que será absorvido. Claro que, em atividades aeróbicas, seus pulmões "pulsarão" mais rapidamente, recebendo mais ar do que uma pessoa em estado normal.

Thinkstock/Getty Images

A cor azul da atmosfera terrestre é devida ao nitrogênio que nela está presente em grande quantidade. Além de gases, na atmosfera encontramos também vapor de água, responsável pela formação de nuvens.

Quando alguém está internado em um hospital, respirando por aparelhos, receberá o oxigênio por meio de um tubo ligado a um recipiente metálico que contém esse gás sob alta pressão, por volta de 100 atmosferas. Para que o gás não provoque danos ao doente, uma válvula reduz essa pressão para algo em torno de 3 atmosferas. Se o cilindro metálico onde se encontra o oxigênio possui volume de 60 litros e na válvula redutora de pressão o fluxo de gás foi regulado para 5 litros/minuto, mantida constante a temperatura em 27 °C, em quanto tempo a pressão no interior do cilindro será reduzida para 40 atmosferas? Essa questão já caiu em um grande vestibular do país, você consegue obter a resposta? Para a resolução, utilize $R = 8 \cdot 10^{22}$ litros · atm/K. **(Resp.: 4,0 h)**

## 8. Lei Geral dos Gases

Quando determinada massa de gás perfeito (massa constante) sofre uma transformação em que as três variáveis pressão (**p**), volume (**V**) e temperatura absoluta (**T**) se modificam, podemos usar a chamada **Lei Geral dos Gases**.

Essa lei é obtida a partir da **Equação de Clapeyron**. Para tanto, suponhamos que certa massa de gás perfeito encontre-se inicialmente num estado definido por $p_1$, $V_1$ e $T_1$. Sofrendo uma transformação, essa **mesma** massa de gás passa para o estado definido por $p_2$, $V_2$ e $T_2$.

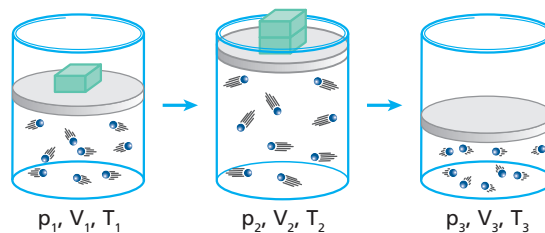
Se aplicarmos a **Equação de Clapeyron** separadamente para essas situações, teremos:

Estado (1): $p_1 V_1 = n R T_1$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = n R \quad \text{(I)}$$

Estado (2): $p_2 V_2 = n R T_2$

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = n R \quad \text{(II)}$$

Igualando (I) e (II), obtemos a seguinte relação, denominada **Lei Geral dos Gases**:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Nas transformações do exemplo, a massa do gás perfeito mantém-se constante, variando apenas as demais grandezas: pressão (**p**), volume (**V**) e temperatura absoluta (**T**). A **Lei Geral dos Gases** garante a validade da relação:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$$

## 9. Mistura física de gases perfeitos

A **mistura física de gases perfeitos** é a reunião de dois ou mais gases ideais, de forma a não ocorrerem reações químicas entre suas partículas, isto é, as interações existentes são estritamente físicas.

Ao calcular as grandezas físicas associadas à mistura, devemos lembrar que, sempre, numa mistura de **e** gases perfeitos, o número de mols da associação é igual à soma do número de mols dos gases componentes.

Assim:

$$n_{mistura} = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_e \quad \text{(I)}$$

Mas da Equação de Clapeyron vem:

$$p\,V = n\,R\,T \Rightarrow n = \frac{p\,V}{R\,T}$$

Daí, calculando o número de mols de cada gás antes da mistura, temos:

$$n_1 = \frac{p_1\,V_1}{R\,T_1}$$

$$n_2 = \frac{p_2\,V_2}{R\,T_2}$$

$$n_3 = \frac{p_3\,V_3}{R\,T_3}$$

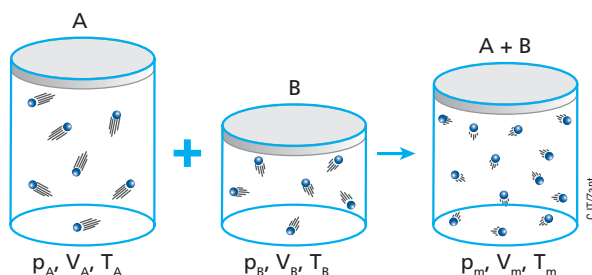
$$\vdots$$

$$n_e = \frac{p_e\,V_e}{R\,T_e}$$

Para a mistura, podemos escrever: $n_m = \dfrac{p_m\,V_m}{R\,T_m}$

Da expressão (I), temos:

$$\frac{p_m\,V_m}{T_m} = \frac{p_1\,V_1}{T_1} + \frac{p_2\,V_2}{T_2} + \ldots + \frac{p_e\,V_e}{T_e}$$

Portanto, numa mistura de gases ideais, a razão $\dfrac{p\,V}{T}$ da mistura é a soma das razões $\dfrac{p\,V}{T}$ de cada um dos gases participantes, antes de fazerem parte da mistura.

Na ilustração, os gases perfeitos **A** e **B** são misturados fisicamente em um terceiro recipiente. A mistura terá um número de mols **n** igual à soma dos números de mols de **A** e **B** ($n = n_A + n_B$). Assim, podemos afirmar que vale a relação:

$$\frac{p_m\,V_m}{T_m} = \frac{p_A\,V_A}{T_A} + \frac{p_B\,V_B}{T_B}$$

## Pneus especiais

Flight Collection / Other Images - Brasil

Em altitudes da ordem de 10 000 m, em que voam os grandes aviões, a temperatura atmosférica é bastante baixa, próxima de −50 °C. Durante o pouso, os pneus desses aviões sofrem uma expressiva elevação de temperatura, de −50 °C (em voo) a +80 °C (na aterrissagem), devido aos atritos que os pneumáticos recebem da pista, parcialmente responsáveis pelo freamento da aeronave. Esse aumento de temperatura faz a pressão do nitrogênio (que infla os pneus) aumentar, exigindo que os pneus de aviões tenham fabricação especial.

## Exercícios nível 1

**20. E.R.** Colocam-se 160 g de oxigênio, a 27 °C, em um recipiente com capacidade de 5,0 L. Considerando-se que o oxigênio comporta-se como um gás perfeito, qual é o valor da pressão exercida por ele?

**Dados:** massa molar do oxigênio = 32 g;

constante universal dos gases perfeitos $R = 0{,}082\ \dfrac{\text{atm L}}{\text{mol K}}$.

**Resolução:**

Aplicando a Equação de Clapeyron para os gases perfeitos, temos:

$$p\,V = n\,R\,T$$

em que n = m/M, **R** é a constante universal dos gases perfeitos e **T** é a temperatura absoluta do gás.

Do enunciado, sabemos que: V = 5,0 L

$$n = \frac{m}{M} = \frac{160}{32} \Rightarrow n = 5{,}0 \text{ mols}$$

$$R = 0{,}082\ \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}}$$

$$T = 27\ °C = 300\ K$$

Portanto:

$$p \cdot 5{,}0 = 5{,}0 \cdot 0{,}082 \cdot 300$$

$$\boxed{p = 24{,}6 \text{ atm}}$$

**21.** Em um recipiente rígido de 41 L de capacidade, são colocados 10 mols de um gás perfeito, à temperatura de 177 °C. Qual o valor da pressão exercida por esse gás nas paredes internas do recipiente?
**Dado:** constante universal dos gases perfeitos R = 0,082 atm · L/mol · K

**22.** (Fuvest-SP) Um botijão de gás de cozinha contém 13 kg de gás liquefeito, à alta pressão. Um mol desse gás tem massa de, aproximadamente, 52 g. Se todo o conteúdo do botijão fosse utilizado para encher um balão, à pressão atmosférica e à temperatura de 300 K, o volume final do balão seria aproximadamente de:
a) $13\ m^3$.
b) $6,2\ m^3$.
c) $3,1\ m^3$.
d) $0,98\ m^3$.
e) $0,27\ m^3$.

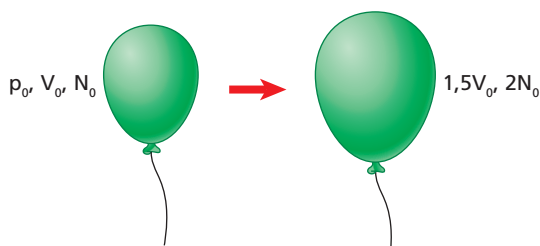
Constante dos gases **R**
R = 8,3 J /(mol · K) ou
R = 0,082 atm · L/(mol · K)
$P_{atmosférica} = 1\ atm \cong 1 \cdot 10^5\ Pa$
(1 Pa = 1 N/m²)
$1\ m^3 = 1\,000\ L$

**23.** A que temperatura (em graus Celsius) devem-se encontrar 5,0 mols de um gás perfeito para que, colocados em um recipiente de volume igual a 20,5 L, exerçam uma pressão de 4,0 atm?
**Dado:** R = 0,082 atm L/mol K.

**24.** Em um recipiente de paredes rígidas e capacidade igual a 10 L, são colocados 8,0 g de hidrogênio à temperatura de –23 °C. Qual a pressão exercida pelo gás, supondo-se que ele se comporte como um gás perfeito?
**Dados:** R = 0,082 atm · L/mol · K;
mol ($H_2$) = 2 g.

**25.** (Fuvest-SP) Um laboratório químico descartou um frasco de éter, sem perceber que, em seu interior, havia ainda um resíduo de 7,4 g de éter, parte no estado líquido, parte no estado gasoso. Esse frasco, de 0,8 L de volume, fechado hermeticamente, foi deixado sob o sol e, após um certo tempo, atingiu a temperatura de equilíbrio T = 37 °C, valor acima da temperatura de ebulição do éter. Se todo o éter no estado líquido tivesse evaporado, a pressão dentro do frasco seria:
a) 0,37 atm.
b) 1,0 atm.
c) 2,5 atm.
d) 3,1 atm.
e) 5,9 atm.

**Note e adote:**
No interior do frasco descartado havia apenas éter.
Massa molar do éter = 74 g
K = °C + 273
R (constante universal dos gases) = 0,082 atm · L/ (mol · K)

**26.** (UFPE) Um balão de festas, de volume $V_0$, contém em seu interior $N_0$ moléculas de um gás considerado ideal (ver figura). Nessa situação, o gás do balão encontra-se sob pressão $p_0$. O balão é, então, enchido ainda mais, tendo o número de moléculas de gás em seu interior dobrado, e o seu volume multiplicado por um fator de 1,5. Considerando que nesse processo a temperatura do gás não se altera, qual a sua pressão final?

a) $\frac{3p_0}{2}$ b) $\frac{5p_0}{3}$ c) $\frac{4p_0}{3}$ d) $\frac{3p_0}{5}$ e) $\frac{2p_0}{3}$

**27. E.R.** Um recipiente provido de êmbolo contém um gás ideal, de tal forma que $V_1 = 2,0$ L, $p_1 = 3,495$ atm e $T_1 = 233$ K. O êmbolo é comprimido, reduzindo o volume em 40%. Quanto devemos aquecer esse gás para que a pressão se torne igual a 7,825 atm? Dê a resposta na escala Fahrenheit.

**Resolução:**
Já que a massa do gás não varia, pode-se usar a Lei Geral dos Gases:

$$\frac{p_1\ V_1}{T_1} = \frac{p_2\ V_2}{T_2}$$

Note que:

$$V_2 = V_1 - 0,4 \cdot V_1 = 0,6 \cdot V_1 \Rightarrow V_2 = 0,6 \cdot 2,0\ (L)$$

$$V_2 = 1,2\ L$$

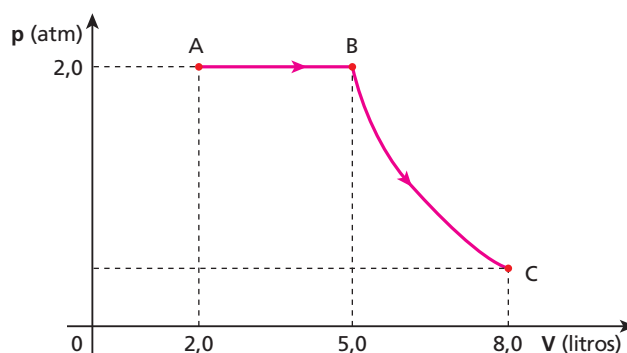
Então:

$$\frac{3,495 \cdot 2,0}{233} = \frac{7,825 \cdot 1,2}{T_2} \Rightarrow T_2 = 313\ K$$

Como a questão pede **quanto** devemos aquecer o gás, temos:
$$\Delta T = T_2 - T_1 \Rightarrow \Delta T = 313 - 233 \Rightarrow \Delta T = 80\ K$$
Entretanto, a resposta deve ser dada em unidades da escala Fahrenheit; assim:

$$\frac{\Delta T_K}{\Delta \theta_F} = \frac{100}{180} \Rightarrow \frac{80}{\Delta \theta_F} = \frac{100}{180}$$

$$\boxed{\Delta \theta_F = 144\ °F}$$

**28.** Uma amostra de gás perfeito sofre as transformações AB (isobárica) e BC (isotérmica) representadas no diagrama pressão *versus* volume:

Sabe-se que a temperatura do gás, na situação representada pelo ponto **B**, vale 27 °C. Qual é a temperatura desse gás nas situações **A** e **C**?

**29.** Certa massa de gás perfeito é colocada, a 27 °C, em um recipiente de 5,0 L de capacidade, exercendo em suas paredes uma pressão equivalente a 2,0 atm. Mantendo-se a massa e transferindo-se o gás para um outro recipiente de 3,0 L de capacidade, quer-se ter esse gás sob pressão de 5,0 atm. Para tanto, a que temperatura deve-se levar o gás?

**30.** No interior de um recipiente de volume variável, são introduzidos **n** mols de um gás perfeito. As tabelas a seguir contêm os valores medidos da pressão (**p**), do volume (**V**) e da temperatura absoluta (**T**) dessa amostra de gás perfeito em duas situações diferentes, denominadas **A** e **B**:

| $p_A$ (atm) | $V_A$ (L) | $T_A$ (K) |
|---|---|---|
| 16,40 | 3,0 | 300 |

| $p_B$ (atm) | $V_B$ (L) | $T_B$ (K) |
|---|---|---|
| 19,22 | 2,5 | |

Usando os dados das tabelas e sabendo que a constante universal dos gases perfeitos vale R = 0,082 atm · L/mol · K, determine os valores de **n** e de $\mathbf{T_B}$.

**31.** Em um frasco de paredes indeformáveis e volume interno igual a 5,0 L, encontramos um gás perfeito à temperatura de –73 °C. Nessas condições, a pressão exercida equivale a 38 cm Hg. Mudando-se esse gás para um reservatório de capacidade igual a 2,0 L, quanto devemos aquecê-lo para que a pressão torne-se igual a 2,0 atm?
**Dado:** 1 atm = 76 cm Hg.

**32.** Após o término das aulas, a família da aluna Maria Eduarda preparou seu automóvel para as merecidas férias. Calibrou os pneus com uma pressão de $210\,\frac{kN}{m^2}$. No momento da calibração a temperatura ambiente e dos pneus era de 27,0 °C. Todos subiram e partiram para a viagem. Chegando ao destino, os pneus apresentaram um aumento de pressão, passando para $240\,\frac{kN}{m^2}$. Considerando o ar como um gás ideal, determine o que se pede a seguir.

a) Qual a temperatura do ar (em Celsius) no interior dos pneus, no final da viagem, se os mesmos expandiram 5%?
b) De acordo com o fabricante, os pneus podem aumentar seu volume um máximo de 8%. Se, no final da viagem, essa situação extrema de volume foi atingida, com a temperatura em aproximadamente 378 K, qual o valor limite da pressão dos pneus (em atm)?

**Note e adote:**

Equação de Clapeyron
$pV = nRT$

$1{,}0\ \text{atm} = 1{,}0 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$

Lei Geral dos Gases
$$\frac{p_0\,V_0}{T_0} = \frac{p_1\,V_1}{T_1}$$

Conversão Kelvin para Celsius
$\theta_C = T(K) - 273$

## Exercícios nível 2

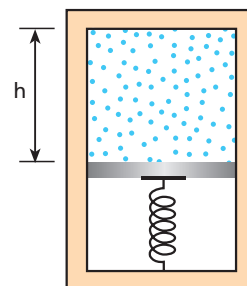
**33.** Em 1738, o físico matemático Daniel Bernoulli publicou *Hidrodinâmica*, a base para a teoria cinética dos gases. Nesse trabalho, Bernoulli posicionou seu argumento, ainda sólido até a atualidade, de que os gases consistem em um grande número de moléculas se movendo em todas as direções, colidindo entre si. Esse impacto causa uma pressão na superfície de contato que podemos sentir, assim como o que sentimos como calor é simplesmente a energia cinética do seu movimento.
A teoria não foi imediatamente aceita, em parte por causa da conservação de energia que não estava bem estabelecida, e, ainda, não era óbvio aos físicos que as colisões entre as moléculas eram perfeitamente elásticas.
Empiricamente, observa-se uma série de relações entre a **temperatura**, a **pressão** e o **volume** que dão lugar à lei dos gases ideais, deduzida pela primeira vez por Émile Clapeyron, em 1834. Utilizando essa equação, determine a pressão no interior de um recipiente cúbico de aresta interna 20 cm, preenchido com 64 g de oxigênio, à temperatura de 327 °C. Utilize R = 0,082 atm · L / mol · K, 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa e 16 para a massa atômica do oxigênio.

a) $1{,}357 \cdot 10^6$ Pa
b) $6{,}78 \cdot 10^5$ Pa
c) $2{,}492 \cdot 10^6$ Pa
d) $6{,}23 \cdot 10^5$ Pa
e) $1{,}246 \cdot 10^6$ Pa

**34.** (PUC-SP) Um certo gás, cuja massa vale 140 g, ocupa um volume de 41 litros, sob pressão de 2,9 atmosferas à temperatura de 17 °C. O número de Avogadro vale $6{,}02 \cdot 10^{23}$ e a constante universal dos gases perfeitos é R = 0,082 atm · L/mol · K. Nessas condições, qual o número de moléculas contidas no gás?

**35.** Considerando-se **p** a pressão, **V** o volume, **T** a temperatura absoluta, **M** a massa de 1 mol e **R** a constante universal dos gases perfeitos, qual a relação que representa a densidade absoluta de um gás perfeito?

a) d = MR/pT.
b) d = pV/RT.
c) d = pM/RT.
d) d = RT/pV.
e) d = p/MRT.

**36.** Um cilindro adiabático vertical foi dividido em duas partes por um êmbolo de 2,50 kg de massa, que está apoiado em uma mola ideal de constante elástica igual a $1{,}04 \cdot 10^5$ N/m. Na parte inferior do cilindro, fez-se vácuo e, na parte superior, foram colocados 5 mols de um gás perfeito. Na situação de equilíbrio, a altura **h** vale 60 cm e a mola está comprimida em 20 cm.
**Dados:** g = 10 m/s$^2$;
R = 8,31 J/mol · K.
Desprezando-se possíveis atritos, qual a temperatura do gás, em graus Celsius?

**37. E.R.** Um cilindro metálico de paredes indeformáveis contém gás ideal a –23 °C. Quando aquecemos lentamente o sistema até 127 °C, uma válvula deixa escapar gás, a fim de manter a pressão interna constante, durante todo o processo. Determine a fração do gás inicial que escapa.

**Resolução:**

Do texto, observamos que o volume e a pressão do gás permanecem constantes. Aplicando a **Equação de Clapeyron**, temos:

$$p\,V = n\,R\,T$$
$$n_1\,R\,T_1 = n_2\,R\,T_2 \Rightarrow n_1\,T_1 = n_2\,T_2 \quad (1)$$

São dados:

$$T_1 = -23\ °C = 250\ K$$
$$T_2 = 127\ °C = 400\ K$$

Substituindo esses valores na expressão (1), encontramos:

$$n_1 \cdot 250 = n_2 \cdot 400$$
$$n_2 = 0{,}625n_1 \text{ ou } n_2 = 62{,}5\%n_1$$

Portanto, o gás que escapa representa 37,5% da massa inicial.

**38.** (Mack-SP) Em um recipiente hermeticamente fechado e que contém 20 g de $CO_2$ foi acoplada uma válvula. Inicialmente, a pressão desse gás é de 6,0 atm e sua temperatura, de 77 °C. Se, através da válvula, permitirmos que 25% do gás escapem, mantendo constante a temperatura, qual será a pressão exercida pelo gás restante?

**39.** (Unirio-RJ) Um cilindro de capacidade igual a 60 L está cheio de oxigênio sob pressão de 9,2 atm, à temperatura de 27 °C. Abre-se a válvula. Qual a massa de gás que escapa? Admite-se que a temperatura permaneça constante e a pressão externa seja normal. Para o oxigênio, M = 32 g; R = 0,082 atm · L/mol · K.

**40.** Ao ler um livro sobre tecnologia do vácuo, um aluno recebeu a informação de que o melhor "vácuo" que se pode obter no interior de um recipiente, na superfície da Terra, é da ordem de $2{,}5 \cdot 10^{-15}$ atm.
Considerando-se que o ar se comporta como um gás perfeito, aproximadamente quantas moléculas iremos encontrar em 1 $mm^3$ do interior desse recipiente, onde se fez o vácuo parcial, à temperatura de 27 °C?
**Dados:** constante universal dos gases
perfeitos = 0,082 atm L/mol K;
1 litro = 1 $(dm)^3$;
número de Avogadro = $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol.
a) zero b) 60 c) 602 d) 1 820 e) $6 \cdot 10^{23}$

**41.** Maria Eduarda, uma aluna do Ensino Médio, resolveu fazer uma pesquisa sobre balonismo. Ao entrar no *site* 360Graus.com.br, ela encontrou um texto cuja reprodução parcial podemos ler a seguir.
"O balonismo existe há mais de 2 000 anos. Sabe-se, no entanto, que a primeira demonstração de um objeto voador foi feita pelo brasileiro Padre Bartholomeu de Gusmão, que, em 1709, com apenas 23 anos, demonstrou ao rei João V de Portugal um balão que subiu cerca de 4 metros, mas se incendiou.
O excesso de otimismo com que o artefato foi apresentado, infelizmente, levou Padre Bartholomeu ao descrédito, e somente em 4 de junho de 1783 ocorreu o verdadeiro nascimento das atividades aéreas com o voo do balão dos irmãos franceses Joseph e Etienne Montgolfier, que chegou a atingir 2 000 metros de altura. Nesse mesmo ano também se realizou o primeiro voo tripulado [...]."

Laert Gouvêa. Disponível em: <http://360graus.terra.com.br/balonismo/default.asp?did=36&action=hist%F3ria>. Acesso em: 6 dez. 2009.

Maria Eduarda ficou intrigada com a altitude de 2 000 metros atingida pelo balão e resolveu pesquisar mais, tentando descobrir a partir de que altura passamos a ter vácuo. Descobriu que não existe o vácuo absoluto, totalmente desprovido de partículas, e que no espaço sideral encontramos cerca de um átomo de hidrogênio a cada centímetro cúbico.
Em termos de pressão atmosférica, a concepção atual de vácuo é de uma região em que a pressão é muito menor do que a da vizinhança. Descobriu ainda que, em laboratórios de tecnologia de vácuo, aqui na superfície da Terra, a menor pressão conseguida foi de $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ atm. Assim, imaginando esse experimento realizado a 27 °C, utilizando o modelo de gás perfeito, nos seus cálculos, quantas moléculas por centímetro cúbico ela encontrou nesse vácuo?

**Dados:** número de Avogadro = $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol;
constante universal dos gases perfeitos
(R) = 8,31 J/mol · K;
1 atm = $1{,}01 \cdot 10^5$ N/$m^2$.

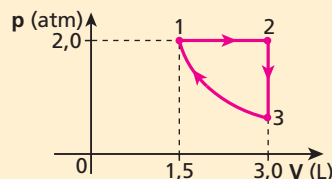
**42.** A densidade do nitrogênio, considerado como gás ideal, nas condições normais de temperatura e pressão, é de 1,25 kg · $m^{-3}$. Qual será a massa de 10 L de nitrogênio à pressão de 700 mmHg e a 40 °C?

**43.** (Faap-SP) Certa massa de oxigênio tem massa específica de 0,07 g/$cm^3$ sob pressão de 700 mm Hg. Determine a pressão desse oxigênio para que sua massa específica aumente para 0,09 g/$cm^3$ à mesma temperatura.

**44.** (UFRJ) Um físico alpinista escalou uma alta montanha e verificou que, no topo, a pressão **p** do ar era igual a $0{,}44p_0$, sendo $\mathbf{p_0}$ a pressão ao nível do mar. Ele notou também que, no topo, a temperatura **T** era igual a $0{,}88T_0$, sendo $\mathbf{T_0}$ a correspondente temperatura ao nível do mar, ambas temperaturas medidas em Kelvin.
Considerando o ar no topo e ao nível do mar como um mesmo gás ideal, calcule a razão $\frac{d}{d_0}$ entre a densidade **d** do ar no topo da montanha e a correspondente densidade $\mathbf{d_0}$ ao nível do mar.

**45. E.R.** Um gás perfeito realiza um ciclo (1, 2, 3, 1) formado por três transformações: (1, 2) isobárica, (2, 3) isovolumétrica e (3, 1) isotérmica. Em 1, suas variáveis de estado são: pressão $p_1$ = 2,0 atm, volume $V_1$ = 1,5 L e temperatura $\theta_1$ = 20 °C. Na transformação isobárica (1, 2), o volume do gás é duplicado. Calcule os valores das variáveis de estado (pressão, volume e temperatura) em cada um dos dois outros estados (2 e 3).

**Resolução:**
O ciclo (1, 2, 3, 1), formado pelas transformações (1, 2) isobárica (pressão constante), (2, 3) isovolumétrica (volume constante) e (3, 1) isotérmica (temperatura constante), é representado no **diagrama de Clapeyron**, como segue:

No estado (1), as variáveis de estado do gás são dadas por:
$p_1$ = 2,0 atm
$V_1$ = 1,5 L
$\theta_1 = 20\ °C \Rightarrow T_1 = 293$ K

No estado (2), após ter sofrido uma transformação isobárica (p = cte.) e ter dobrado o volume, as variáveis de estado do gás ficam:
$p_2$ = 2,0 atm (de 1 para 2 → transformação isobárica)
$V_2$ = 3,0 L (volume dobrou)
$\theta_2$ = ?
Usando a **Lei Geral dos Gases**, uma vez que o número de mols permanece constante, temos:

$$\frac{p_1\,V_1}{T_1} = \frac{p_2\,V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{2{,}0 \cdot 1{,}5}{293} = \frac{2{,}0 \cdot 3{,}0}{T_2}$$

$$T_2 = 586\ \text{K} \Rightarrow \theta_2 = 313\ °C$$

No estado (3), após ter sofrido uma transformação isovolumétrica (V = cte.), o gás tem as seguintes variáveis de estado:
$p_3$ = ?
$V_3$ = 3,0 L (transformação isovolumétrica)
$\theta_3 = \theta_1$ = 20 °C (pois o gás volta ao estado (1) numa transformação isotérmica)
Usando novamente a **Lei Geral dos Gases**, temos:

$$\frac{p_2\,V_2}{T_2} = \frac{p_3\,V_3}{T_3} + \frac{2{,}0 \cdot 3{,}0}{586} = \frac{p_3 \cdot 3{,}0}{293} \Rightarrow p_3 = 1{,}0\ \text{atm}$$

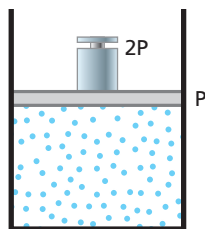
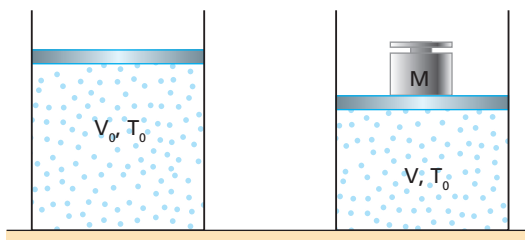
Assim, os valores das variáveis pedidas são:

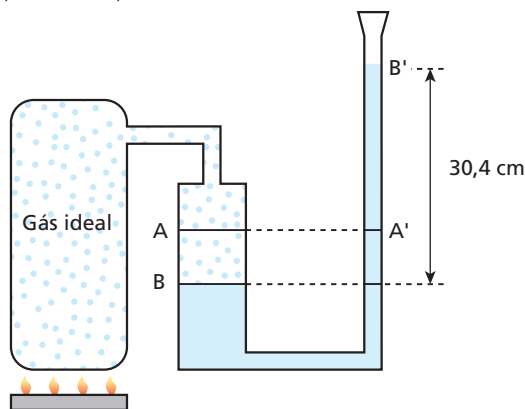
(2) $\begin{cases} p_2 = 2{,}0\ \text{atm} \\ V_2 = 3{,}0\ \text{L} \\ \theta_2 = 313\ °C \end{cases}$ (3) $\begin{cases} p_3 = 1{,}0\ \text{atm} \\ V_3 = 3{,}0\ \text{L} \\ \theta_3 = 20\ °C \end{cases}$

**46.** (Mack-SP) Um gás perfeito, a 27 °C, está aprisionado em um cilindro indilatável por um êmbolo de peso **P**. Coloca-se sobre o êmbolo um peso 2P e aquece-se o gás a 127 °C. Despreze a pressão atmosférica. Sendo **V** o volume inicial do gás, o seu volume final será:

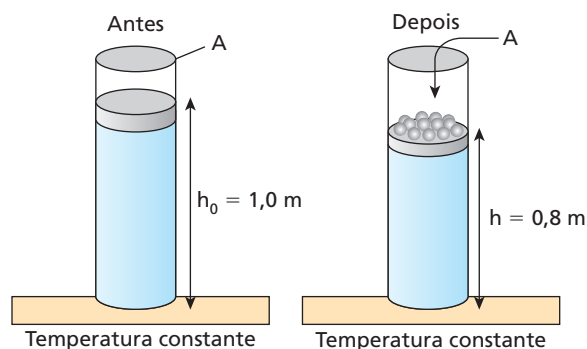
a) $\frac{V}{2}$.
b) $\frac{8V}{9}$.
c) $\frac{4V}{9}$.
d) $\frac{4V}{3}$.
e) $\frac{2V}{3}$.

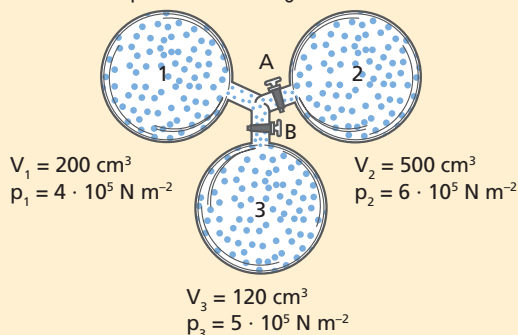
2P

P

**47.** Um cilindro contendo uma amostra de gás perfeito, à temperatura ambiente, é vedado por um êmbolo que pode deslizar livremente, sem qualquer atrito. O volume inicialmente ocupado pelo gás é $V_0$ e a pressão exercida sobre ele, pelo êmbolo e pela coluna de ar acima dele, é igual a 12 N/cm². Colocando-se sobre o êmbolo, cuja área é de 100 cm², um corpo de massa 40 kg, o gás é comprimido, sua pressão aumenta e seu volume passa a ser igual a **V**.
**Dado:** aceleração da gravidade no local = 10 m/s².

a) Determine, em N/cm², a pressão adicional exercida sobre o gás pelo peso do corpo de massa 40 kg.
b) Demonstre que, se a transformação sofrida pelo gás for isotérmica, vale a relação $\frac{V}{V_0} = \frac{3}{4}$.

**48.** (Univest-SP)

Um recipiente contém um gás ideal à temperatura de 27 °C e sob pressão de 1,0 atm. A pressão desse gás é transmitida a um tubo em **U** contendo mercúrio, conforme indica a figura acima. Inicialmente, os níveis **A** e **A'** do mercúrio são iguais nos dois ramos do tubo.
Aquecendo-se o gás no recipiente, observa-se que os níveis do mercúrio passam para **B** e **B'**. Considere que o volume de gás que entra no tubo é insignificante diante do volume do recipiente, e que 1 atm corresponde a 76 cm de mercúrio. Então, a temperatura, em graus Celsius, à qual o gás foi aquecido, é de:
a) 77. b) 120. c) 147. d) 227. e) 420.

**49.** (Unesp-SP) Em um dia em que se registrava uma temperatura ambiente de 27 °C, um balão de festa foi cheio com ar, cuja densidade era de 1,3 kg/m³. Foi medida uma diferença de massa entre o balão vazio e cheio de 7,8 g.
a) Qual o volume, em litros, do balão cheio?
b) Considerando o ar como um gás ideal, qual seria o seu volume se, depois de cheio, ele fosse guardado numa câmara fria a −23 °C, sem variar a pressão e o número de partículas em seu interior?

**50.** (UFPE) Um cilindro de 20 cm² de seção reta contém um gás ideal, comprimido em seu interior por um pistão móvel, de massa desprezível e sem atrito. O pistão repousa a uma altura $h_0 = 1{,}0$ m. A base do cilindro está em contato com um forno, de forma que a temperatura do gás permanece constante. Bolinhas de chumbo são lentamente depositadas sobre o pistão até que ele atinja a altura h = 80 cm.

Considere a pressão atmosférica igual a 1 atm.
(1 atm = $1{,}0 \cdot 10^5$ N/m²)
A massa do chumbo que foi depositada sobre o pistão vale:
a) 0,50 kg. b) 1,0 kg. c) 2,0 kg. d) 5,0 kg. e) 50,5 kg.

**51. E.R.** Três recipientes contêm gases sob pressão e volume conforme representado a seguir:

As paredes dos recipientes são diatérmicas (permitem trocas de calor com o meio externo). Abrindo-se as válvulas **A** e **B**, os gases misturam-se, sem reações químicas, mantendo-se a temperatura constante (igual à temperatura ambiente). Qual o valor aproximado da pressão final da mistura?

**Resolução:**

Para uma mistura de gases perfeitos em que não há variação do número de mols dos componentes, temos:

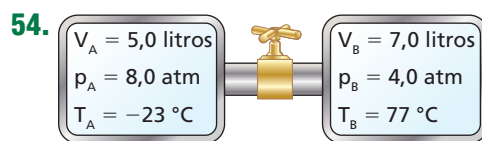
$$\frac{p_m V_m}{T_m} = \frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} + \frac{p_3 V_3}{T_3}$$

Como $T_1 = T_2 = T_3 = T_m = T_{ambiente}$ e
$V_m = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V_m = 820$ cm³, temos:
$p_m \cdot 820 = 4 \cdot 10^5 \cdot 200 + 6 \cdot 10^5 \cdot 500 + 5 \cdot 10^5 \cdot 120$

$$\boxed{p_m \cong 5{,}4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}$$

**52.** Em um recipiente **A** de capacidade igual a 25 L há nitrogênio à temperatura de −23 °C, sob pressão de 3,0 atm. Em outro recipiente **B**, com 30 L de capacidade, há oxigênio à temperatura de 127 °C sob pressão de 8,0 atm. Ambos os gases são colocados num terceiro reservatório de capacidade de 27 L, no qual se misturam. Admitindo que esses gases não interagem quimicamente e que se comportam como gases perfeitos, qual será a temperatura final da mistura gasosa, sabendo que a pressão passou a ser de 10 atm?

**53.** Um modelo fenomenológico usado para estudar os gases é considerar que eles são constituídos de um grande número de moléculas cujas distâncias entre si são muito maiores que nos sólidos e líquidos. Nesse modelo, as moléculas de um gás movimentam-se através do espaço como uma saraivada de pequenas partículas, as quais colidem entre si e, eventualmente, com as paredes do recipiente. Essa sucessão de choques momentâneos empurra as paredes do recipiente em que o gás está contido. Sabe-se, ainda, que todos os gases têm o mesmo comportamento quando estão bastante rarefeitos e se encontram a uma temperatura muito maior do que aquela em que se tornam líquidos. Nesse estado, o comportamento dos gases é muito próximo daquele de um gás perfeito, cujo estado é facilmente conhecido utilizando a equação de estado para gases perfeitos. Considere um recipiente cuja capacidade é de 8,0 litros, no qual são colocados 4,0 litros de oxigênio a 17 °C sob 2,9 atm de pressão e 10 litros de hidrogênio a 27 °C sob aproximadamente 1,5 atm de pressão. Qual é a pressão final da mistura física dos gases, sabendo-se que a temperatura de equilíbrio do sistema é de 47 °C?

**54.**

(UnB-DF) A figura acima mostra, de forma esquemática, dois recipientes contendo dois gases ideais, conectados por meio de uma válvula, que está fechada inicialmente. Com base nessas informações e nos dados apresentados na figura, julgue os itens subsequentes.

I) Se a válvula for aberta, a temperatura da mistura a uma pressão de 10 atm deve ser superior a 200 K.

II) Se a válvula for aberta e a pressão for mantida 10 atm, a temperatura $T_A$ permanecerá constante em torno de 300 K e a temperatura $T_B$ abaixará para 237 K.

III) Quando dois sistemas gososos quaisquer em equilíbrio térmico entre si são colocados em contato térmico, tem maior temperatura aquele cuja pressão aumenta a volume constante.

# Bloco 3

## 10. O modelo microscópico de gás perfeito

No primeiro item deste Tópico, fizemos uma análise macroscópica do gás perfeito, estabelecendo um modelo teórico a partir do seu comportamento “externo”, isto é, do comportamento de seus parâmetros pressão, volume e temperatura.

O estudo do gás perfeito realizado sob a perspectiva microscópica leva-nos à **teoria cinética dos gases**. Nesse modelo teórico, pelo fato de encontrarmos um número muito grande de partículas por unidade de volume (ordem de $10^{20}$ partículas por $cm^3$), as hipóteses impostas representam o que deve acontecer, em média, com as partículas do gás.

Vejamos as hipóteses da teoria cinética a respeito dos gases perfeitos:

- Uma porção de gás perfeito é constituída de um grande número de moléculas em movimento caótico (todas as direções são igualmente prováveis).
- As moléculas são consideradas pontos materiais, isto é, suas dimensões são desprezíveis quando comparadas com as distâncias que percorrem entre colisões sucessivas.
- As colisões entre duas moléculas ou entre uma molécula e uma parede do recipiente são supostas perfeitamente elásticas (não há perda de energia cinética).
- Cada colisão tem duração desprezível quando comparada com o tempo decorrido entre colisões sucessivas.
- Entre colisões sucessivas, o movimento das moléculas é retilíneo e uniforme. Isso equivale a desprezar as forças gravitacionais e intermoleculares.
- As forças intermoleculares só se manifestam durante as colisões.
- O estudo das colisões das moléculas do gás pode ser feito com base na mecânica newtoniana.

## 11. Velocidade média quadrática

No interior de um recipiente em repouso, encontramos partículas de gás que se deslocam em todas as direções e sentidos, fazendo com que a velocidade média das partículas seja nula, ao contrário da energia cinética média (que não é nula).

Assim, sendo **N** o número de partículas do gás, temos:

$$E_{c_m} = \frac{E_{c_1} + E_{c_2} + \ldots + E_{c_N}}{N}$$

$$E_{c_m} = \frac{\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + ... + \frac{mv_N^2}{2}}{N}$$

$$E_{c_m} = \frac{m}{2}\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_N^2}{N}\right)$$

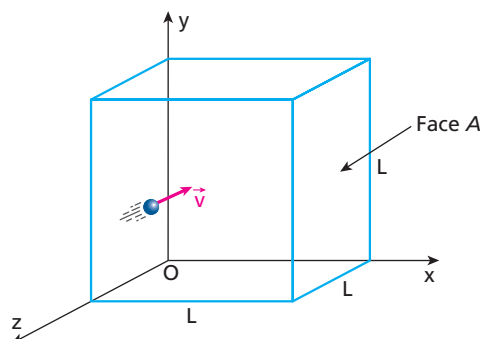
Chamando o termo existente no interior do parênteses de $\overline{v}$ (**velocidade média quadrática**), temos:

$$E_{c_m} = \frac{m(\overline{v})^2}{2}$$

Valendo a relação:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_N^2}{N}}$$

## 12. Equação Fundamental da Teoria Cinética

Para facilitar nosso raciocínio, imagine um recipiente cúbico de aresta **L** posicionado com um de seus vértices na origem de um sistema de eixos triortogonais. Em seu interior encontramos uma amostra de gás perfeito.

Estudando-se apenas uma das **N** partículas desse gás, vamos considerá-la dirigindo-se para a face **A** com uma velocidade $\vec{v}$. Fazendo-se a decomposição de $\vec{v}$, segundo os eixos, temos:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Após a colisão dessa partícula com a face **A**, notamos que as componentes $\mathbf{v_y}$ e $\mathbf{v_z}$ não foram alteradas; no entanto, a componente $\mathbf{v_x}$ inverteu o sentido de seu movimento. Sua quantidade de movimento sofreu uma alteração dada por:

$$\Delta Q = Q_f - Q_i$$

$$\Delta Q = -mv_x - (+mv_x)$$

$$\Delta Q = -2mv_x$$

Como a quantidade de movimento total deve ser conservada, podemos afirmar que a face **A** do recipiente sofreu uma variação da quantidade do movimento, dada por:

$$\Delta Q = +2mv_x$$

Aplicando-se o Teorema do Impulso, podemos determinar a intensidade média da força aplicada (perpendicularmente) na face **A**.

$$I = \Delta Q$$

$$F\,\Delta t = \Delta Q$$

$$F = \Delta Q \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

Supondo que essa partícula, movendo-se de maneira retilínea e uniforme, colida com a face oposta e torne a chocar-se com a face **A**, podemos calcular a frequência de colisões dessa partícula em **A**.

$$\Delta s = v\,\Delta t$$

$$(L + L) = v_x \cdot \Delta t$$

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{v_x}{2L}$$

Assim:

$$F = 2mv_x \cdot \frac{v_x}{2L}$$

$$F = \frac{m\,v_x^2}{L}$$

e a pressão exercida pela partícula em **A** será dada por:

$$p = \frac{F}{A}$$

$$p = \frac{\frac{m\,v_x^2}{L}}{L^2} \Rightarrow p = \frac{m\,v_x^2}{L^3}$$

Se considerarmos que **N** é o número total de partículas do gás e **n** é seu número por unidade de volume, teremos:

$$n = \frac{N}{V} \Rightarrow n = \frac{N}{L^3}$$

$$L_3 = \frac{N}{n}$$

Portanto:

$$p = \frac{n\,m\,v_x^2}{N}$$

Considerando que esse gás é homogêneo, com todas as partículas de mesma massa (**m**), a pressão na face **A**, em virtude de todas as partículas do gás, será:

$$p = n\,m\left(\frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + ... + v_{x_N}^2}{N}\right)$$

Como vimos, a velocidade média quadrática é dada por:

$$(\overline{v}_x)^2 = \frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + ... + v_{x_N}^2}{N}$$

Assim:

$$p = n\,m\,\overline{v_x^2}$$

No entanto, o gás é constituído por um grande número de partículas e elas se movem ao acaso, fazendo com que os valores médios de $(\overline{v}_x)^2$, $(\overline{v}_y)^2$ e $(\overline{v}_z)^2$ sejam iguais, valendo a relação:

$$(\overline{v}_x)^2 = (\overline{v}_y)^2 = (\overline{v}_z)^2$$

e, sendo:

$$(\overline{v})^2 = (\overline{v}_x)^2 + (\overline{v}_y)^2 + (\overline{v}_z)^2 = 3\,(\overline{v}_x)^2$$

temos:

$$(\overline{v}_x)^2 = \frac{(\overline{v})^2}{3}$$

Assim:

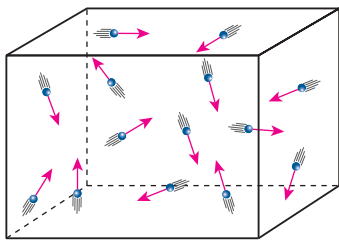
$$p = n\,m\frac{(\overline{v})^2}{3}$$

No entanto, o produto $n\,m$ é a massa das partículas por unidade de volume, isto é, a densidade volumétrica ($\mu$) do gás.

$$p = \frac{1}{3}\mu(\overline{v})^2$$

Embora o cálculo da pressão tenha sido feito apenas para a face **A**, de acordo com o Princípio de Pascal, a pressão será a mesma nas outras faces.

Portanto:

A pressão (**p**) exercida por um gás perfeito nas paredes internas de um recipiente é igual a um terço do produto de sua massa específica pelo quadrado da velocidade média quadrática de suas partículas.

A teoria cinética dos gases leva-nos a "visualizar" uma amostra de gás perfeito formada por um grande número de partículas ($10^{20}$ por $cm^3$), de dimensões desprezíveis, que se movem em todas as direções de modo aleatório.

## 13. A temperatura na Teoria Cinética

Como vimos no início, a temperatura de um gás perfeito está relacionada com a energia de movimentação das moléculas. Agora, vamos analisar esse fato utilizando as informações da teoria cinética.

Da Equação Fundamental da Teoria Cinética, vem:

$$p = \frac{1}{3}\mu(\overline{v})^2$$

A massa específica ($\mu$), entretanto, é o quociente da massa total (**m**) do gás pelo volume (**V**) ocupado por ele:

$$\mu = \frac{m}{V}$$

Daí:

$$p = \frac{1}{3}\,\frac{m}{V}\,(\overline{v})^2$$

$$3pV = m(\overline{v})^2 \qquad \text{(I)}$$

A **Equação de Clapeyron** fornece-nos:

$$p\,V = n\,R\,T \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), temos:

$$3n\,R\,T = m\,(\overline{v})^2$$

Mas:

$$n = \frac{m}{M}$$

Portanto:

$$3\frac{m}{M}\,R\,T = m\,(\overline{v})^2$$

Assim, temos:

$$T = \frac{M}{3R}\,(\overline{v})^2$$

Do exposto, observamos que a temperatura absoluta de um gás perfeito é função da velocidade média quadrática de suas partículas e da natureza do gás (**T** depende de **M**, que é a massa molar do gás).

Essa lei é válida para qualquer gás, desde que seu comportamento seja igual ou aproximadamente igual ao do gás perfeito.

## 14. A energia interna de um gás perfeito

Das hipóteses do modelo teórico de gás perfeito, sabemos que as suas moléculas são pontos materiais que não interagem entre si. Consequentemente, essas moléculas não possuem energia cinética de rotação nem energia potencial.

Podemos, então, dizer que a energia interna (**U**) de uma amostra de gás perfeito é a energia cinética de translação de suas moléculas. Assim, vale a expressão:

$$U = \frac{1}{2}\,m\,(\overline{v})^2 \qquad \text{(I)}$$

em que **m** é a massa total do gás e $\bar{v}$, a velocidade média quadrática das partículas.

Usando a relação demonstrada no item anterior, temos:

$$T = \frac{M}{3R}(\bar{v})^2$$

$$(\bar{v})^2 = \frac{3R\,T}{M} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), segue que:

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{m}{M}\,3R\,T$$

Como $\frac{m}{M}$ = n (número de mols do gás), obtemos:

$$U = \frac{3}{2}\,n\,R\,T$$

A **energia interna** de um gás perfeito é função exclusiva do número de mols (**n**) e da temperatura absoluta (**T**) do gás.

Para um gás real, a expressão deduzida não é válida, uma vez que no **zero absoluto** sua **energia interna não é nula**. Ao valor da energia interna no zero absoluto dá-se o nome de **energia do ponto zero**. Essa expressão, no entanto, é válida, com boa aproximação, para gases reais monoatômicos, em baixas pressões e altas temperaturas. O valor do coeficiente $\frac{3}{2}$ varia com a atomicidade do gás real. No caso de gases biatômicos, por exemplo, o coeficiente assume o valor $\frac{5}{2}$.

## Equipartição da energia

Utilizando o nosso modelo teórico de gás, em que cada partícula de gás perfeito é representada por uma esfera de dimensões desprezíveis, sabemos que cada uma delas tem **três graus de liberdade**, que indicam o movimento de translação na direção de cada um dos três eixos **x**, **y** e **z** de um sistema cartesiano de referência. Os gases reais monoatômicos têm comportamento bem próximo do comportamento dos gases perfeitos, sendo que, com boa aproximação, sua energia interna também pode ser expressa por:

$$U = \frac{1}{2}\,m\,(\bar{v})^2$$

Sendo: $(\bar{v})^2 = \frac{3R\,T}{M}$, temos:

$$U = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{3R\,T}{M}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{m}{M}\,R\,T = \frac{3}{2}\,n\,R\,T$$

$$U = \frac{3}{2}\,n\,R\,T = \frac{3}{2}\,p\,V$$

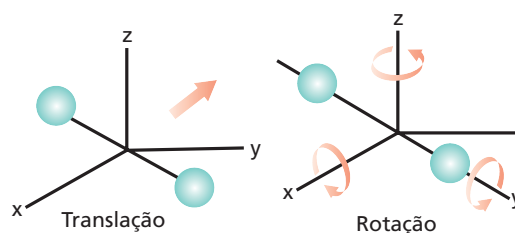
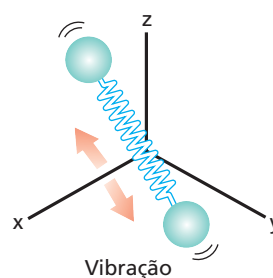
O **teorema da equiparação da energia** estabelece que a divisão dessa energia deve ser feita de maneira igual para cada grau de liberdade. Assim:

$$U_x = U_y = U_z = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\,n\,R\,T\right)$$

$$U_x = U_y = U_z = \frac{1}{2}\,n\,R\,T$$

Os gases diatômicos são imaginados como uma "barra" com um átomo em cada ponta (como um haltere), sendo capaz de girar em torno de qualquer um dos eixos ortogonais. Entretanto, a inércia de rotação em torno do eixo, cuja direção coincide com a "barra", é desprezível em comparação com as duas outras direções. Assim, a partícula diatômica tem três graus de liberdade na translação e dois graus na rotação, sendo que sua energia interna fica expressa por:

$$U = 3\left(\frac{1}{2}\,n\,R\,T\right) + 2\left(\frac{1}{2}\,n\,R\,T\right) = 5\left(\frac{1}{2}\,n\,R\,T\right)$$

$$U = \frac{5}{2}\,n\,R\,T$$

Se mudarmos o modelo, sendo a "barra" trocada por uma "mola", acrescentaremos à molécula uma vibração. Cada partícula passa a ter translação, rotação e vibração. Passamos a ter mais graus de liberdade, o que faz aumentar a energia interna desse gás. Esse novo modelo, bem como os gases de atomicidade maior que dois (os poliatômicos), tem energia interna maior que $\frac{5}{2}$ n R T.

Portanto, o cálculo da energia interna de um gás depende do modelo que vamos adotar. Para o nosso curso, usaremos apenas o modelo clássico de esferas de dimensões desprezíveis para gases perfeitos e reais monoatômicos e de "halteres" para gases diatômicos. Assim, é importante ressaltar que, para todos os gases (perfeitos ou reais), a energia interna (**U**) é sempre proporcional à temperatura absoluta (**T**) do gás.

## 15. A energia cinética média molecular

Considere um recipiente no qual há **N** moléculas de um gás perfeito, com energia interna igual a **U**. A **energia cinética média** por molécula é calculada por:

$$E_{c_m} = \frac{U}{N}$$

Como a energia interna de um gás perfeito, que é exclusivamente cinética de translação, vale:

$$U = \frac{3}{2}\, n\, R\, T$$

temos:

$$E_{c_m} = \frac{3}{2}\, \frac{n\, R\, T}{N} \quad \text{(I)}$$

Cada mol de gás, entretanto, representa uma quantidade de partículas dada pelo número de Avogadro ($A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol). Assim:

$$N = n\, A$$

que, substituído na relação (I), conduz a:

$$E_{c_m} = \frac{3}{2}\, \frac{n\, R\, T}{n\, A} \Rightarrow E_{c_m} = \frac{3}{2}\, \frac{R}{A}\, T$$

A razão entre as constantes **R** e **A** é denominada **constante de Boltzmann**, cujo valor é:

$$k = \frac{R}{A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$$

Dessa forma, a equação da energia cinética média existente em cada partícula de um gás perfeito fica dada por:

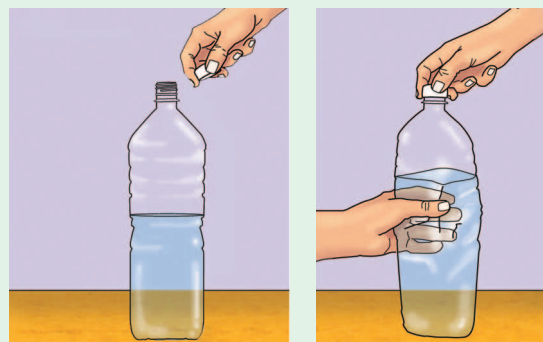
$$E_{c_m} = \frac{3}{2}\, k\, T$$

Como a constante de Boltzmann (**k**) não depende da natureza do gás, podemos afirmar que a energia cinética existente, em média, em cada partícula de um gás perfeito é função exclusiva de sua temperatura absoluta.

## Faça você mesmo

Coloque na geladeira uma garrafa plástica de 1,5 litro de refrigerante ou água mineral com gás. Aguarde algumas horas, retire a garrafa, abra-a e derrame metade do seu conteúdo em uma pia. Aperte o corpo da garrafa com a mão e feche-a bem com a tampa. Observe que a embalagem permanecerá deformada. Agite a garrafa por alguns segundos e veja como a embalagem retorna ao seu formato original.

Isso ocorre porque, ao agitarmos a garrafa, parte do gás existente na bebida sai, misturando-se ao ar confinado no interior do recipiente. Em decorrência disso, a pressão aumenta e força as paredes da garrafa a retomar à sua forma primitiva.

Se continuarmos a agitar a garrafa fechada, observaremos que a embalagem ficará um pouco mais estufada e mais resistente aos apertões, o que dificultará novas deformações na superfície externa. Isso se verifica devido a um aumento da pressão dos gases existentes sobre o líquido, uma vez que também há o aumento do número de moléculas nessa região e da temperatura.

## Exercícios

nível 1

**55.** A teoria cinética dos gases propõe um modelo para os gases perfeitos, no qual:
a) a pressão do gás não depende da velocidade das moléculas.
b) as moléculas são consideradas partículas que podem colidir inelasticamente entre si.
c) a temperatura do gás está diretamente relacionada com a energia cinética das moléculas.
d) a pressão do gás depende somente do número de moléculas por unidade de volume.
e) a temperatura do gás depende somente do número de moléculas por unidade de volume.

**56.** O valor da temperatura de uma amostra de gás perfeito é consequência:
a) da radiação emitida por suas moléculas.
b) da energia potencial total de suas moléculas.
c) da energia potencial média de suas moléculas.
d) da energia cinética média de suas moléculas.
e) do calor de cada uma de suas moléculas.

**57.** O valor da energia cinética média das partículas de uma amostra de gás perfeito é diretamente proporcional:
a) à pressão do gás.
b) ao volume do gás.
c) à temperatura absoluta do gás.
d) à temperatura do gás em graus Celsius.
e) à variação da temperatura absoluta do gás.

**58.** Se uma amostra de gás perfeito encontra-se no interior de um recipiente de volume constante e tem a energia cinética média de suas moléculas aumentada:
a) a pressão do gás aumentará e sua temperatura permanecerá constante.
b) a pressão permanecerá constante e a temperatura aumentará.
c) a pressão e a temperatura aumentarão.
d) a pressão diminuirá e a temperatura aumentará.
e) Todas as afirmações estão incorretas.

**59.** Duas amostras de massas iguais de um gás perfeito são colocadas em dois recipientes, **A** e **B**. As temperaturas são diferentes, sendo $T_A > T_B$. Podemos afirmar que:
a) o gás em **A** possui mais calor que em **B**.
b) o gás em **A** possui menor velocidade que em **B**.
c) a energia cinética das moléculas é menor no gás em **A** que em **B**.
d) a energia cinética média das moléculas do gás é maior em **A** que em **B**.
e) a temperatura não influencia a energia de movimento das partículas de um gás.

## Exercícios — nível 2

**60.** Uma amostra de gás perfeito é colocada no interior de um recipiente e mantida à pressão constante. Se a temperatura e o volume aumentam:
(01) o número de choques por centímetro quadrado de parede deve aumentar.
(02) a distância média entre as moléculas deve aumentar.
(04) a energia cinética média das moléculas não sofre alteração.
(08) a velocidade média das moléculas também deve aumentar.
(16) a pressão tem que aumentar, pois a temperatura do gás aumentou.
Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

**61.** (UFPI) O ar que respiramos é constituído, entre outros, pelos seguintes gases: $O_2$, $CO_2$ e $N_2$. Suponha que, na sala em que você se encontra, o ar esteja em equilíbrio termodinâmico. Com relação ao ar da sala, analise as seguintes afirmativas e coloque **V**, para verdadeiro, ou **F**, para falso.
1 ( ) As moléculas de $CO_2$ têm menor energia cinética média do que as moléculas de $O_2$.
2 ( ) A energia cinética média das moléculas é a mesma para todos os gases presentes na sala.
3 ( ) As velocidades médias das moléculas são as mesmas para todos os gases presentes na sala.
4 ( ) A velocidade média das moléculas de $CO_2$ é menor do que a velocidade média das moléculas de $O_2$.

**62.** (UFC-CE) Um recipiente contém uma mistura de um gás ideal **X**, cuja massa molar é $M_x$, com um gás ideal **Y**, cuja massa molar é $M_y$, a uma temperatura **T**. Considere as afirmações a seguir:
I. A energia cinética média das moléculas dos gases ideais **X** e **Y** depende apenas da temperatura absoluta em que se encontram.
II. a velocidade média das moléculas dos gases ideais **X** e **Y** depende da temperatura absoluta em que se encontram e da natureza de cada gás.
III. Se $M_x > M_y$, a velocidade média das moléculas do gás ideal **X** é maior que a velocidade média do gás ideal **Y**.

Assinale a alternativa correta.
a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas I e II são verdadeiras.
c) Apenas I e III são verdadeiras.
d) Apenas II e III são verdadeiras.
e) I, II e III são verdadeiras.

**63.** Em um recipiente hermeticamente fechado, encontramos nitrogênio à temperatura de 0 °C. Como o mol do referido gás é igual a 28 g, qual o valor da velocidade média quadrática das suas partículas?
**Dado:** $R = 8{,}31$ J/mol · K

**64.** Avaliando a energia interna de 5 mols de gás perfeito, encontramos o valor 24 930 J. Qual a sua temperatura em graus Celsius?
**Dado:** $R = 8{,}31$ J/mol · K

**65.** Um gás perfeito ocupa um volume de 2,0 L e possui uma energia interna igual a 600 J. Qual o valor da pressão desse gás, em atmosferas?
**Dados:** 1 atm = $10^5$ N/m$^2$;
1 L = 1 dm$^3$ = $10^{-3}$ m$^3$.

## Descubra mais

**1.** Quando um recipiente de 1,5 litro de água mineral com gás é aberto, você pode observar bolhas subindo através do líquido. Essas bolhas aumentam de tamanho, praticamente dobrando seu volume quando atingem as proximidades da superfície. Por que esse aumento de volume ocorre?

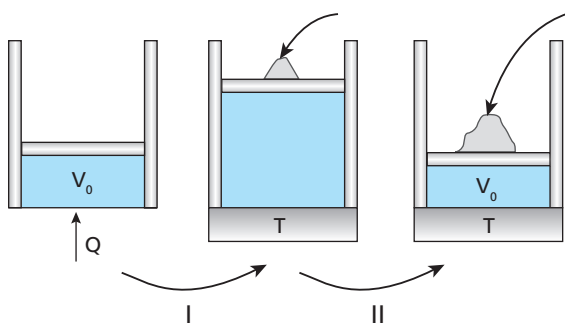
## Exercícios — nível 3

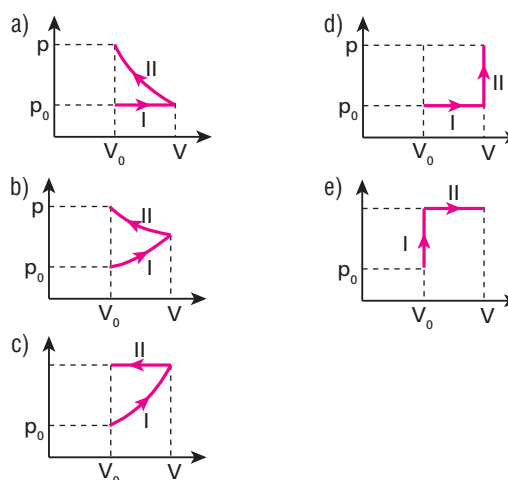
**66.** (Unesp-SP) Uma panela de pressão com capacidade de 4 litros contém, a uma temperatura de 27 °C, 3 litros de água líquida à pressão de 1 atm. Em seguida, ela é aquecida até que a temperatura do vapor seja de 127 °C, o volume de água líquida caia para 2,8 litros e o número de moléculas do vapor dobre. A panela começa a deixar escapar vapor por uma válvula, que entra em ação após a pressão interna do gás atingir um certo valor máximo. Considerando o vapor como um gás ideal, determine o valor dessa pressão máxima.

**67.** (Unifesp-SP) Você já deve ter notado como é difícil abrir a porta de um *freezer* logo após tê-la fechado, sendo necessário aguardar alguns segundos para abri-la novamente. Considere um *freezer* vertical cuja porta tenha 0,60 m de largura por 1,0 m de altura, volume interno de 150 L e que esteja a uma temperatura interna de −18 °C, num dia em que a temperatura externa seja de 27 °C e a pressão, $1,0 \cdot 10^5$ N/m².

a) Com base em conceitos físicos, explique a razão de ser difícil abrir a porta do *freezer* logo após tê-lo fechado e por que é necessário aguardar alguns instantes para conseguir abri-la novamente.

b) Suponha que você tenha aberto a porta do *freezer* por tempo suficiente para que todo o ar frio do seu interior fosse substituído por ar a 27 °C e que, fechando a porta do *freezer*, quisesse abri-la novamente logo em seguida. Considere que, nesse curtíssimo intervalo de tempo, a temperatura média do ar no interior do *freezer* tenha atingido −3 °C. Determine a intensidade da força resultante sobre a porta do *freezer*.

**68.** (Unifesp-SP) A figura ilustra duas transformações de um gás ideal contido em um cilindro de paredes adiabáticas. Em I, através de uma base diatérmica (que permite a passagem do calor), o gás recebe calor e faz o êmbolo, também construído de material adiabático, subir livremente, aumentando seu volume de $V_0$ a **V**, atingindo a temperatura **T**. Nesse estado, a fonte quente é retirada e substituída por um reservatório térmico à mesma temperatura **T** do gás. Em seguida, na transformação II, colocam-se grãos de areia sobre o êmbolo, lentamente, para que o gás possa manter-se em equilíbrio térmico com o reservatório. Nessas condições, o êmbolo baixa até que o gás volte a ocupar o mesmo volume $V_0$ do início.

Considere desprezíveis as variações da pressão atmosférica. O diagrama **p × V** que melhor representa essas duas transformações é o da figura:

a)
b)
c)
d)
e)

**69.** Em um laboratório de Física, um estudante realizou um experimento que consistia em pegar um recipiente, vazio, de paredes indeformáveis, dotado de uma válvula que não deixa a pressão interna passar de um valor-limite. Esse estudante injetou hidrogênio gasoso (que se comporta como gás perfeito) no interior do recipiente até que a pressão atingisse o máximo valor e observou que a massa de gás injetada era igual a 10 gramas. Em seguida, ele esfriou o gás, diminuindo a sua temperatura absoluta em 20%. Que massa do mesmo gás, na nova temperatura, o estudante deve injetar no interior do recipiente para restabelecer a pressão máxima suportável pela válvula?

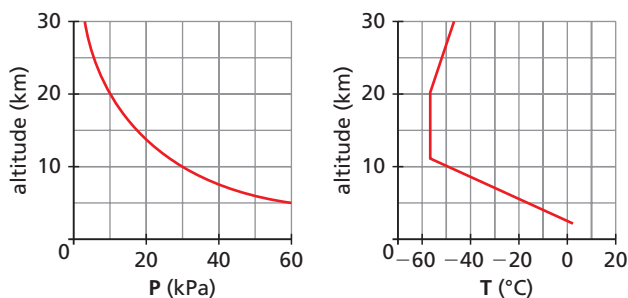
**70.** (Mack-SP) Num recipiente, fechado por uma tampa hermética, há 10 mols de gás perfeito, sob pressão de 5 atmosferas, à temperatura ambiente e em um local de pressão atmosférica normal. Abrindo a tampa do recipiente, o número de moléculas que escapa é:

a) $12 \cdot 10^{23}$.
b) $24 \cdot 10^{23}$.
c) $36 \cdot 10^{23}$.
d) $48 \cdot 10^{23}$.
e) $60 \cdot 10^{23}$.

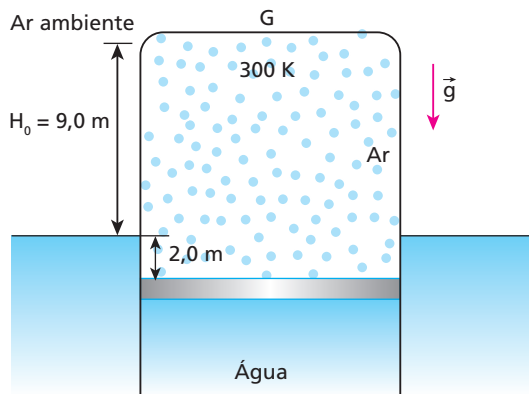
**Adote:**
Número de Avogadro $= 6 \cdot 10^{23}$.

**71.** (Unicamp-SP) A Lua não tem atmosfera, diferentemente de corpos celestes de maior massa. Na Terra, as condições propícias para a vida ocorrem na troposfera, a camada atmosférica mais quente e densa que se estende da superfície até cerca de 12 km de altitude.

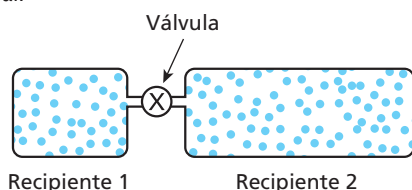
a) A pressão atmosférica na superfície terrestre é o resultado do peso exercido pela coluna de ar atmosférico por unidade de área, e ao nível do mar ela vale $P_0 = 100$ kPa. Na cidade de Campinas, que está a 700 m acima do nível do mar, a pressão atmosférica vale $P_1 = 94$ kPa. Encontre a densidade do ar entre o nível do mar e a altitude de Campinas, considerando-a uniforme entre essas altitudes.

b) Numa viagem intercontinental um avião a jato atinge uma altitude de cruzeiro de cerca de 10 km. Os gráficos no espaço de resposta mostram as curvas da pressão (**P**) e da temperatura (**T**) médias do ar atmosférico em função da altitude para as camadas inferiores da atmosfera. Usando os valores de pressão e temperatura desses gráficos e considerando que o ar atmosférico se comporta como um gás ideal, encontre o volume de um mol de ar a 10 km de altitude. A constante universal dos gases é $R = 8,3 \frac{J}{mol\ K}$.

**72.** (UFC-CE) Um cilindro de área de seção reta **S** e comprimento **L**, completamente isolado, é dividido em partições **A** e **B**, ambas de volumes iguais, por uma parede diatérmica, móvel e impermeável. Cada partição é preenchida com um gás ideal, de modo que a partição **A** possui o dobro do número de mols da partição **B**. Ambas as partições encontram-se em uma mesma temperatura **T** durante o processo. Despreze quaisquer efeitos de atrito e, quando o sistema estiver em equilíbrio, determine:

a) os volumes das partições **A** e **B** em função de **S** e **L**.
b) o módulo do deslocamento da parede em função de **L**.

**73.** (Fuvest-SP) O gasômetro **G**, utilizado para o armazenamento de ar, é um recipiente cilíndrico, metálico, com paredes laterais de pequena espessura. **G** é fechado na sua parte superior, aberto na inferior, que permanece imersa em água, e pode se mover na direção vertical. **G** contém ar, inicialmente à temperatura de **300 K**, e o nível da água no seu interior se encontra **2,0 m** abaixo do nível externo da água. Nessas condições, a tampa de **G** está **9,0 m** acima do nível externo da água, como mostra a figura a seguir. Aquecendo-se o gás, o sistema se estabiliza numa nova altura de equilíbrio, com a tampa superior a uma altura **H**, em relação ao nível externo da água, e com a temperatura do gás a **360 K**.

Supondo que o ar se comporte como um gás ideal, a nova altura **H** será, aproximadamente, igual a:

a) 8,8 m. b) 9,0 m. c) 10,8 m. d) 11,2 m. e) 13,2 m.

**74.** (UFF-RJ) Um gás ideal estava confinado à mesma temperatura em dois recipientes, 1 e 2, ligados por uma válvula inicialmente fechada. Os volumes dos recipientes 1 e 2 são 4,0 L e 6,0 L, respectivamente. A pressão inicial no recipiente 1 era de 4,8 atm.
Abriu-se a válvula e os conteúdos dos recipientes atingiram um estado final de equilíbrio à pressão de 2,4 atm e à mesma temperatura inicial.

A porcentagem total de mols de gás que ocupava o recipiente 1 antes da abertura da válvula era:

a) 60%.
b) 80%.
c) 50%.
d) 40%.
e) 20%.

**75.** (UEFS) A experiência mostra que, para todos os gases, as grandezas volume, **V**, temperatura, **T**, e pressão, **p**, obedecem, aproximadamente, a uma equação denominada Equação de Clapeyron, desde que os gases tenham baixas densidades, isto é, as temperaturas não devem ser muito "baixas" e as pressões não devem ser muito "altas". Isso levou os físicos a formularem o conceito de gás ideal, que obedece à Equação de Clapeyron, em quaisquer condições.
Considere um recipiente em que há 3,0 litros do gás nitrogênio, $N_2$, à pressão de 5,0 atm e à temperatura **T**. Em um segundo recipiente, há 2,0 litros do gás oxigênio, $O_2$, à pressão de 4,0 atm e à mesma temperatura **T**. Esses gases são misturados em um recipiente de volume 10,0 litros, mantido à mesma temperatura **T**.
Com base nessas informações, é correto afirmar:

a) A pressão da mistura é igual a 3,2 atm.
b) A fração molar do gás nitrogênio corresponde a 40%.
c) A fração molar do gás oxigênio corresponde a 50%.
d) A massa molecular média da mistura é, aproximadamente, igual a 29,4 sendo as massas moleculares do $N_2$ e $O_2$ iguais, respectivamente, a 28 e 32.
e) A mistura apresenta um número total de oito mols.

**76.** (Unicamp-SP) Uma sala tem 6 m de largura, 10 m de comprimento e 4 m de altura. Deseja-se refrigerar o ar dentro da sala. Considere o calor específico do ar como sendo 30 J/ (mol · K) e use R = 8 J/ (mol · K).

a) Considerando o ar dentro da sala como um gás ideal à pressão ambiente ($P = 10^5\ N/m^2$), quantos mols de gás existem dentro da sala a 27 °C?
b) Qual é a quantidade de calor que o refrigerador deve retirar da massa de ar do item (**a**) para resfriá-la até 17 °C?

**77.** (ITA-SP) Considere uma mistura de gases $H_2$ e $N_2$ em equilíbrio térmico. Sobre a energia cinética média e sobre a velocidade média das moléculas de cada gás, pode-se concluir que:

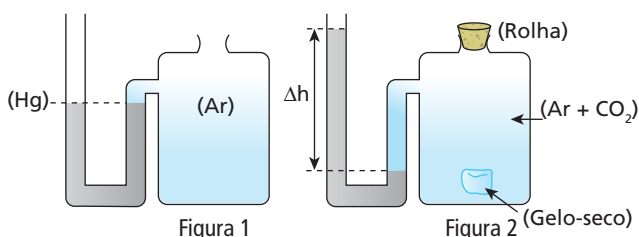
a) as moléculas de $N_2$ e $H_2$ têm a mesma energia cinética média e a mesma velocidade média.
b) ambas têm a mesma velocidade média, mas as moléculas de $N_2$ têm maior energia cinética média.
c) ambas têm a mesma velocidade média, mas as moléculas de $H_2$ têm maior energia cinética média.
d) ambas têm a mesma energia cinética média, mas as moléculas de $N_2$ têm maior velocidade média.
e) ambas têm a mesma energia cinética média, mas as moléculas de $H_2$ têm maior velocidade média.

**78.** (ITA-SP) Uma cesta portando uma pessoa deve ser suspensa por meio de balões, sendo cada qual inflado com 1 m³ de hélio na temperatura local (27 °C). Cada balão vazio com seus apetrechos pesa 1,0 N. São dadas a massa atômica do oxigênio $A_O = 16$, a do nitrogênio $A_N = 14$, a do hélio $A_{He} = 4$ e a constante dos gases $R = 0{,}082\ atm\ L\ mol^{-1}\ K^{-1}$. Considerando que o conjunto pessoa e cesta pesa 1 000 N e que a atmosfera é composta de 30% de $O_2$ e 70% de $N_2$, determine o número mínimo de balões necessários.
**Dado:** $g = 10\ m/s^2$

## Para raciocinar um pouco mais

**79.** Ao ler um livro sobre tecnologia do vácuo, um aluno recebeu a informação de que o melhor "vácuo" que se pode obter no interior de um recipiente, na superfície da Terra, é da ordem de $2,5 \cdot 10^{-15}$ atm.
Considerando-se que o ar se comporta como um gás perfeito, aproximadamente quantas moléculas iremos encontrar em 1 $mm^3$ do interior desse recipiente, onde se fez o vácuo parcial, à temperatura de 27 °C?
**Dados:** constante universal dos gases perfeitos = 0,082 atm L/mol K;
1 litro = 1 $(dm)^3$;
número de Avogadro = $6,02 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol.
a) zero
b) 60
c) 602
d) 1 820
e) $6 \cdot 10^{23}$

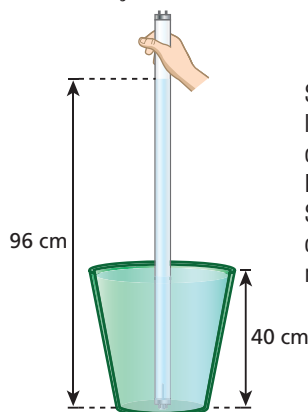
**80.** Na figura 1, podemos observar um recipiente de volume 2 litros, que contém ar na pressão atmosférica local (70 cm Hg), acoplado a um tubo em forma de **U** que contém mercúrio. No início, os níveis do mercúrio estão na mesma horizontal. Em seguida, é introduzida no recipiente uma porção de gelo-seco ($CO_2$). O recipiente é fechado. Após algum tempo, quando todo o gelo-seco passou para a fase gasosa, notamos que o mercúrio apresenta um desnível de 19 cm e a situação se estabiliza. Observe, para tanto, a figura 2. Despreze o volume do tubo em comparação com o do recipiente.

Figura 1 Figura 2

Todo o processo ocorre à temperatura do meio ambiente (27 °C). Supondo-se que o ar e o $CO_2$ comportem-se como gases perfeitos, que a pressão atmosférica normal valha 76 cm Hg e que a constante universal dos gases perfeitos valha 0,082 atm · L/ mol · K, o número de mols aproximado de $CO_2$ existente no recipiente é:
a) 0,002.
b) 0,02.
c) 0,2.
d) 2.
e) 20.

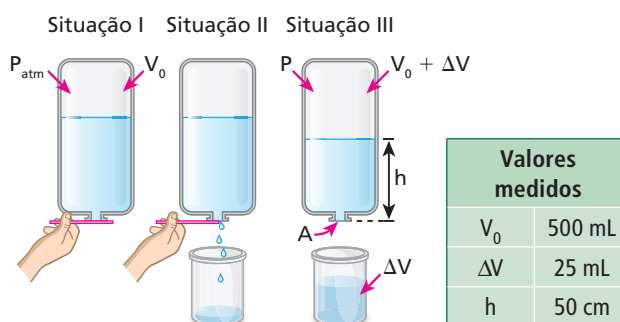
**81.** (ITA-SP) Estime a massa de ar contida em uma sala de aula. Indique claramente quais as hipóteses utilizadas e os quantitativos estimados das variáveis empregadas.

**82.** (Fuvest-SP) Um cilindro de oxigênio hospitalar ($O_2$), de 60 litros, contém, inicialmente, gás a uma pressão de 100 atm e temperatura de 300 K. Quando é utilizado para a respiração de pacientes, o gás passa por um redutor de pressão, regulado para fornecer oxigênio a 3 atm, nessa mesma temperatura, acoplado a um medidor de fluxo, que indica, para essas condições, o consumo de oxigênio em litros/minuto.
Assim, determine:
a) o número $\mathbf{N_0}$ de mols de $O_2$, presentes inicialmente no cilindro;
b) o número **n** de mols de $O_2$, consumidos em 30 minutos de uso, com o medidor de fluxo indicando 5 litros/minuto.
c) o intervalo de tempo **t**, em horas, de utilização do $O_2$, mantido o fluxo de 5 litros/minuto, até que a pressão interna no cilindro fique reduzida a 40 atm.

**Note e adote:**
Considere o $O_2$ como gás ideal.
Suponha a temperatura constante e igual a 300 K.
A constante dos gases ideais $R \cong 8 \cdot 10^{-2}$ litro · atm/K

**83.** Um aluno ouviu dizer que as lâmpadas fluorescentes funcionam a baixa pressão. Ao lembrar-se das suas aulas de Física, teve a seguinte ideia para apresentar na feira de ciências do colégio: determinar experimentalmente a pressão no interior de uma lâmpada fluorescente. Para isto, providenciou um balde de 5 litros cheio de água, com uma altura de 40 cm, em cujo interior, e aproximadamente em seu centro, colocou um prego em pé, fixo no fundo do balde. Em seguida, o aluno, com um golpe rápido e num movimento vertical, perfurou uma das pontas da lâmpada, fazendo o prego penetrar nela. Ele observou que a água do balde subiu no interior da lâmpada até uma altura de 0,96 m da base.
Com esses dados, determine a pressão interna da lâmpada fluorescente, sabendo que a lâmpada usada era de 40 W de potência e, por isso, tinha um comprimento de 1,20 m. Suponha que o gás no interior da lâmpada fluorescente seja ideal, que a variação no nível da água do balde seja desprezível e que o gás sofra uma transformação isotérmica.

São dadas a pressão atmosférica local $P_0 = 10$ $mH_2O$ e a aceleração da gravidade $g = 10$ $m/s^2$.
Dar a resposta em $cmH_2O$.
Supondo a pressão atmosférica local (10 $mH_2O$) igual a 1,0 atm, determinar também a resposta em atm.

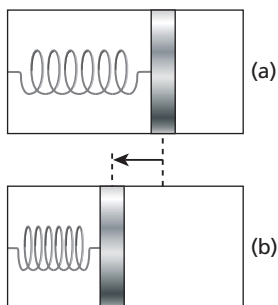
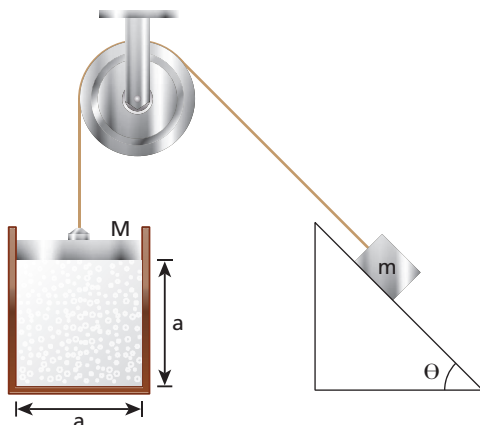
**84.** (Fuvest-SP)

| Valores medidos | |
|---|---|
| $V_0$ | 500 mL |
| ΔV | 25 mL |
| h | 50 cm |

Para se estimar o valor da pressão atmosférica, $\mathbf{P_{atm}}$, pode ser utilizado um tubo comprido, transparente, fechado em uma extremidade e com um pequeno gargalo na outra. O tubo, aberto e parcialmente cheio de água, deve ser invertido, segurando-se um cartão que feche a abertura do gargalo (Situação I). Em seguida, deve-se mover lentamente o cartão de forma que a água possa escoar, sem que entre ar, coletando-se a água que sai em um recipiente (Situação II). A água para de escoar quando a pressão no

ponto **A**, na abertura, for igual à pressão atmosférica externa, devendo-se, então, medir a altura **h** da água no tubo (Situação III). Em uma experiência desse tipo, foram obtidos os valores, indicados na tabela, para $\mathbf{V_0}$, volume inicial do ar no tubo, $\Delta$**V**, volume da água coletada no recipiente e **h**, altura final da água no tubo. Em relação a essa experiência, e considerando a Situação III,

a) determine a razão **R** = $P/P_{atm}$, entre a pressão final **P** do ar no tubo e a pressão atmosférica;
b) escreva a expressão matemática que relaciona, no ponto **A**, a $\mathbf{P_{atm}}$ com a pressão **P** do ar e a altura **h** da água dentro do tubo;
c) estime, utilizando as expressões obtidas nos itens anteriores, o valor numérico da pressão atmosférica $\mathbf{P_{atm}}$, em N/m$^2$.

**Note e adote:**
Considere a temperatura constante e desconsidere os efeitos da tensão superficial.

**85.** (ITA-SP) Uma parte de um cilindro está preenchida com um mol de um gás ideal monoatômico a uma pressão $\mathbf{P_0}$ e temperatura $\mathbf{T_0}$. Um êmbolo de massa desprezível separa o gás da outra seção do cilindro, na qual há vácuo e uma mola em seu comprimento natural presa ao êmbolo e à parede oposta do cilindro, como mostra a figura **(a)**. O sistema está termicamente isolado e o êmbolo, inicialmente fixo, é então solto, deslocando-se vagarosamente até passar pela posição de equilíbrio, em que a sua aceleração é nula e o volume ocupado pelo gás é o dobro do original, conforme mostra a figura **(b)**. Desprezando os atritos, determine a temperatula do gás na posição de equilíbrio em função da sua temperatura inicial.

**86.** (IME-RJ) Em um recipiente, hermeticamente fechado por uma tampa de massa **M**, com volume interno na forma de um cubo de lado **a**, encontram-se **n** mols de um gás ideal a uma temperatura absoluta **T**. A tampa está presa a uma massa **m** por um fio que passa por uma roldana, ambos ideais. A massa **m** encontra-se na iminência de subir um plano inclinado de ângulo $\boldsymbol{\theta}$ com a horizontal e coeficiente de atrito estático $\boldsymbol{\mu}$. Considerando que as variáveis estejam no Sistema Internacional e que não exista atrito entre a tampa **M** e as paredes do recipiente, determine **m** em função das demais variáveis.

**Dados:** aceleração da gravidade = g;
constante universal dos gases perfeitos = R;
pressão atmosférica = $P_0$.

**87.** Em uma prova de laboratório, um professor de Física pegou três recipientes, **A**, **B** e **C**. Colocou em um deles hidrogênio, em outro, neônio, e, no que restou, dióxido de carbono, todos a 27 °C. Forneceu aos alunos duas tabelas, sendo uma dos mols dos referidos gases e outra associando a velocidade média quadrática das partículas do gás com o recipiente portador.

**Tabela I**

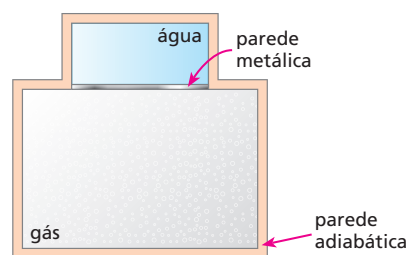
| Gás | Mol (g) |
|---|---|
| $H_2$ | 2,0 |
| Ne | 20 |
| $CO_2$ | 44 |

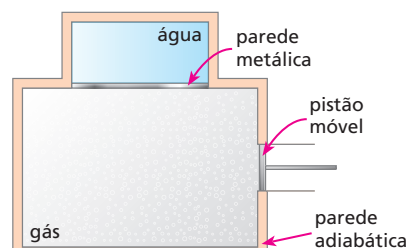
**Tabela II**

| Recipiente | Velocidade média quadrática das partículas |
|---|---|
| A | 412 m/s |
| B | 1 936 m/s |
| C | 612 m/s |

Identifique o gás contido em cada recipiente.
**Dado:** 3R = 25 J/K · mol

**88.** (UFF-RJ) Numa experiência, um recipiente de paredes adiabáticas, exceto pelo fundo metálico, contém 20 g de água a 67 °C e é colocado em contato térmico com outro recipiente, com 200 L de volume, de paredes adiabáticas, exceto por um pedaço metálico em seu topo, contendo um gás monoatômico. Na situação inicial, este gás está a uma temperatura de 27 °C e exerce sobre as paredes do recipiente uma pressão de 1 atm. A capacidade térmica do recipiente que contém água pode ser desprezada, enquanto a daquele que contém o gás é de 4 cal/K. A temperatura do sistema, quando o equilíbrio térmico é atingido, é de 59 °C. Calor específico da água = 1 cal/g°C.

a) Determine a pressão exercida pelo gás sobre as paredes do recipiente depois de alcançado o equilíbrio térmico.

b) Determine a capacidade térmica da massa gasosa.

c) A experiência é, em seguida, repetida a partir das mesmas condições iniciais, mas o recipiente que contém o gás dispõe agora de um pistão móvel. A temperatura final de equilíbrio nesta nova situação será **maior**, **menor**, ou **igual** a 59 °C? Justifique sua resposta explicitando os princípios ou leis físicas que conduziram seu raciocínio.

# Tópico 5

# Termodinâmica

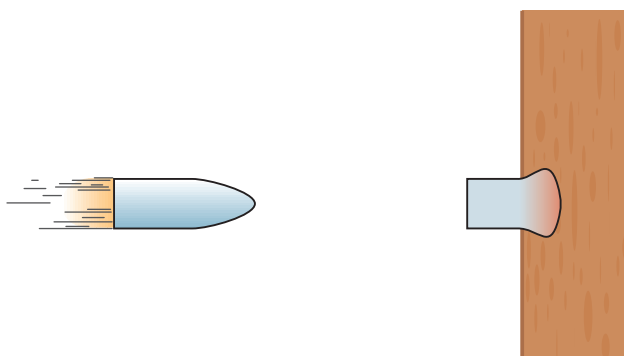
## Bloco 1

### 1. Introdução

O estudo da Física envolve quase sempre um conceito primitivo denominado **energia**. Essa energia manifesta-se de várias formas, recebendo em cada caso um nome que a caracteriza: energia mecânica, energia térmica, energia elétrica, energia luminosa e outros.

É importante lembrar que a realização de trabalho pode envolver trânsito ou conversão de energia e que calor também é energia em trânsito.

A **Termodinâmica** estuda as transformações e as relações existentes entre dois tipos de energia: energia mecânica e energia térmica.

Para exemplificar, vamos considerar uma bala de revólver atirada contra um bloco de madeira.

Antes de chocar-se com a madeira, a bala possui uma energia mecânica (cinética). Após o choque, essa energia mecânica converte-se em outras formas de energia, principalmente térmica. Esse fato fica evidenciado pelo aquecimento da bala, em decorrência do choque. Isso significa que a energia (interna) de agitação das suas partículas se intensificou. Assim, houve conversão de energia mecânica em térmica. Essa conversão é medida pelo trabalho realizado pelas forças que se opuseram à penetração da bala.

Vejamos, agora, um exemplo um pouco mais complexo: um reator nuclear. Nesse sistema, ocorre fissão de núcleos de urânio (geralmente $U^{235}$, urânio enriquecido), que liberam calor. O calor é absorvido pela água existente no corpo do reator, que entra em ebulição, vaporizando.

O vapor de água expande-se por uma tubulação, onde encontra, como obstáculo, as partes móveis de uma turbina. Devido à expansão, esse vapor aciona as turbinas, girando-as para a produção de energia elétrica. Observe que parte da energia térmica existente nas partículas do vapor é transformada em energia mecânica na movimentação das partes móveis das turbinas, com a realização de trabalho.

Dos exemplos mais simples (como o impacto e a penetração da bala na madeira) aos mais sofisticados (como o funcionamento de um reator nuclear), é possível converter energia mecânica em térmica e vice-versa.

Em todos os casos em que ocorre essa conversão, há um sistema físico intermediário que transforma um dos dois tipos de energia recebido no outro. No reator nuclear, por exemplo, o sistema intermediário, ou **fluido operante**, é a água, que vaporiza ao receber calor. Seus vapores expandem-se, realizando trabalho.

Nos próximos itens deste tópico, faremos um estudo da **Termodinâmica dos Gases Perfeitos**. Veremos situações em que o sistema físico intermediário na conversão entre energia térmica e energia mecânica é um gás perfeito.

## Fissão nuclear: eficiência com menos poluição, mas com altos riscos

A usina de fissão nuclear (na fotografia, usina nuclear em Loire Valley, França), que na década de 1970 representava a grande esperança de geração de energia para uma humanidade que não para de crescer, voltou a ser considerada, após alguns anos sendo tratada como uma grande ameaça para a vida em nosso planeta. Se conseguirmos reduzir os riscos de vazamento radioativo e resolvermos o grande problema da armazenagem dos resíduos originados após a fissão do combustível nuclear, essa forma de geração de energia será muito útil para melhorar o padrão de vida da humanidade. E saiba que ela é a maneira de obtenção de energia que menos polui a Terra!

Masterfile/Other Images - Brasil

## 2. Energia interna, trabalho e calor

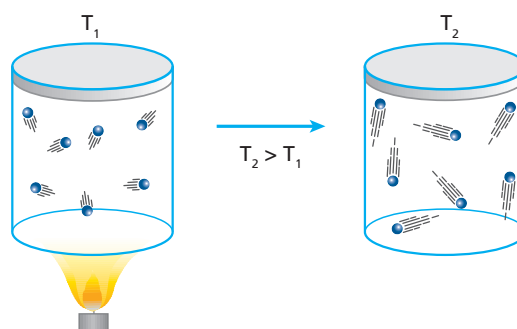
No estudo da Termodinâmica dos Gases Perfeitos, são parâmetros básicos as grandezas físicas **energia interna** (**U**), **trabalho** ($\boldsymbol{\tau}$) e **quantidade de calor** (**Q**) associadas a uma transformação sofrida pelo gás perfeito. Vejamos melhor cada uma dessas três grandezas.

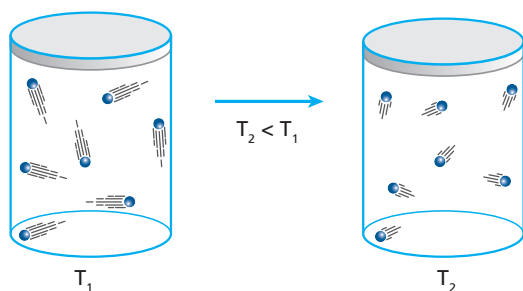
### Energia interna

A energia interna de um sistema é o somatório de vários tipos de energia existentes em suas partículas. Nesse cálculo, consideramos as energias cinética de agitação (ou de translação), potencial de agregação, de ligação, nuclear, enfim todas as energias existentes em suas moléculas. Observemos que apenas parte dessa energia (cinética de agitação e potencial de agregação) é térmica. Quando fornecemos energia térmica para um corpo ou a retiramos dele, provocamos a variação de sua energia interna. É essa variação que utilizaremos em Termodinâmica.

No caso do gás perfeito, como vimos nas considerações gerais, as partículas são esferas de dimensões desprezíveis, não existindo energia de ligação, muito menos energia de agregação. Como as dimensões são desprezíveis também não existe energia de rotação. Dessa forma, a energia interna se resume na energia de translação de suas partículas e, seu cálculo é feito pela expressão definida pela **Lei de Joule**:

$$U = \frac{3}{2} n R T$$

Observemos que a energia interna (**U**) de um gás perfeito é função de sua temperatura absoluta (**T**). Para determinada massa de gás perfeito (**n** = constante), o aumento da temperatura absoluta corresponde a um aumento da energia interna, e a variação de energia interna $\Delta U$ é **positiva** ($\Delta U > 0$).

No aumento da energia interna do sistema: $\Delta U > 0$.

Se há diminuição de temperatura, a energia interna diminui, e sua variação é **negativa** ($\Delta U < 0$).

Na diminuição da energia interna do sistema: $\Delta U < 0$.

Quando a temperatura permanece constante, a energia interna também se mantém constante. Portanto, sua variação é nula ($\Delta U = 0$).

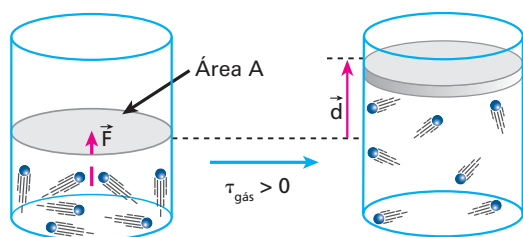
Relacionando a **Lei de Joule** com a **Equação de Clapeyron**, podemos escrever:

$$U = \frac{3}{2} n\ R\ T = \frac{3}{2} p\ V$$

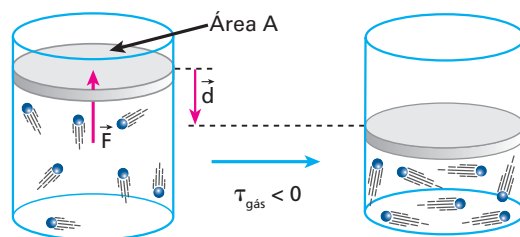
**Nota:**

- A expressão da Lei de Joule $\left(U = \frac{3}{2} n R T\right)$ também é válida aproximadamente para os gases reais rarefeitos monoatômicos. Para os gases de outras atomicidades, entretanto, o cálculo é diferente, já que existem outras parcelas de energia a serem consideradas, como vimos no Tópico 4.

## Trabalho

De acordo com o que já foi estudado em Mecânica, sabemos que todo trabalho é realizado por uma força. Vamos, então, considerar a expansão de um gás perfeito, representada na figura abaixo.

Esquema de expansão de um gás perfeito: volume final maior que volume inicial.

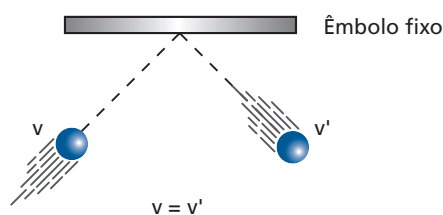
A força ($\vec{F}$) exercida no êmbolo pelo gás tem o mesmo sentido do deslocamento sofrido pelo êmbolo ($\vec{d}$). Consequentemente, o trabalho realizado por essa força é **positivo** ($\tau_{gás} > 0$).

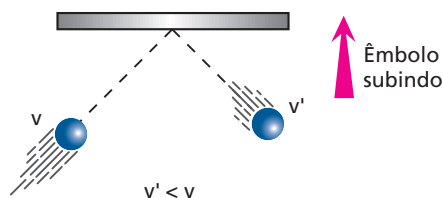
Consideremos agora a compressão de um gás perfeito.

Esquema de compressão de um gás perfeito: volume final menor que volume inicial.

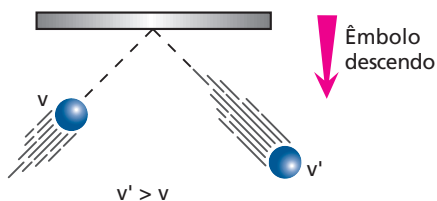
Nesse caso, a força ($\vec{F}$) exercida pelo gás tem sentido oposto ao do deslocamento ($\vec{d}$) do êmbolo. Consequentemente, o trabalho realizado por essa força é **negativo** ($\tau_{gás} < 0$).

Evidentemente, se o gás não se expande nem é comprimido, temos $\tau_{gás} = 0$, pois o êmbolo não se desloca.

**Notas:**

- Quando o êmbolo representado nas figuras anteriores não muda de posição, as moléculas do gás que se chocam contra ele retornam com a mesma velocidade escalar, uma vez que os choques são supostos perfeitamente elásticos.

- Quando o gás se expande, durante a subida do êmbolo, moléculas do gás chocam-se contra ele e retornam com velocidades escalares menores.

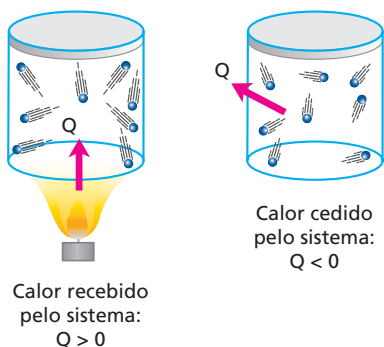
  Isso significa que, ao expandir-se, o gás perde energia na forma de trabalho. Essa energia perdida corresponde, pelo menos em parte, ao acréscimo de energia potencial gravitacional do êmbolo e de algum corpo que eventualmente esteja sobre ele. Assim, o gás fornece energia durante esse trabalho. Por isso, diz-se que "o gás realiza trabalho".

- Quando o gás é comprimido, durante a descida do êmbolo, moléculas do gás chocam-se contra ele, retornando com velocidades escalares maiores.

  Nesse caso, o gás recebe energia na forma de trabalho. Por isso, diz-se que "o gás recebe trabalho" na compressão.

Resumindo:

Na **expansão**, $\tau_{gás} > 0$ e o gás fornece energia na forma de trabalho: o gás realiza trabalho.

Na **compressão**, $\tau_{gás} < 0$ e o gás recebe energia na forma de trabalho: o gás recebe trabalho.

## Calor

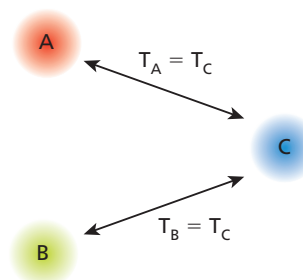
Já vimos que calor é a energia térmica transitando de um sistema para outro. Assim, um dos sistemas **cede** essa energia e o outro, a **recebe**. Será convencionado que o calor recebido é **positivo** e o calor cedido, **negativo**.

**Notas:**

- Os sinais atribuídos ao calor recebido e ao calor cedido tornam correta a maneira como equacionaremos a 1ª Lei da Termodinâmica, no item 4.
- É importantíssimo observar que as trocas de energia entre um sistema gasoso e o meio externo podem dar-se tanto pela realização de trabalho como por trocas de calor.

## 3. Lei Zero da Termodinâmica

A Lei Zero da Termodinâmica trabalha o conceito de **equilíbrio térmico**. Essa lei diz que dois sistemas físicos estão em equilíbrio se, ao serem colocados em contato térmico, não há fluxo de calor entre eles. Como a condição para existir fluxo de calor entre dois locais é que exista uma diferença de temperatura, concluímos que o equilíbrio térmico indica a igualdade das temperaturas dos dois sistemas.

A partir da Lei Zero da Termodinâmica também podemos concluir que, se dois sistemas físicos, **A** e **B**, estão individualmente em equilíbrio térmico com um terceiro sistema **C**, ambos estarão em equilíbrio térmico entre si ($T_A = T_B$).

Assim, se:

vale a conclusão:

$$T_A = T_B$$

## 4. 1ª Lei da Termodinâmica

O conhecido **Princípio da Conservação da Energia**, quando aplicado à Termodinâmica, recebe a denominação de **1ª Lei da Termodinâmica**.

Com a aplicação dessa lei, podemos, por meio de uma "contabilidade" energética, saber o que ocorre com um sistema gasoso ao sofrer uma transformação termodinâmica.

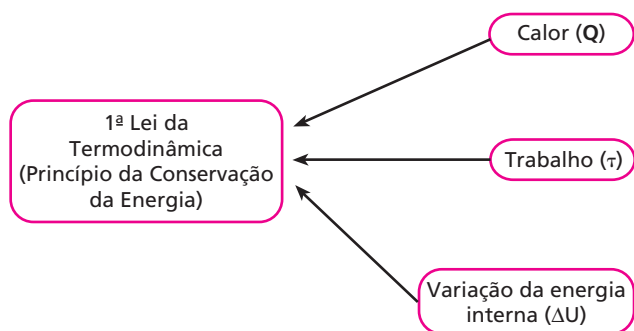
Essa lei pode ser enunciada da seguinte forma:

Para todo sistema termodinâmico existe uma função característica denominada **energia interna**. A variação dessa energia interna ($\Delta U$) entre dois estados quaisquer pode ser determinada pela diferença entre a quantidade de calor (**Q**) e o trabalho ($\tau_{gás}$) trocados com o meio externo.

Matematicamente, essa lei pode ser expressa por:

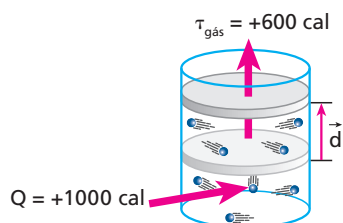
$$\Delta U = Q - \tau_{gás}$$

É importante observar que essas grandezas podem ser positivas, negativas ou nulas.

Esquematicamente, temos:

Para entender o mecanismo de aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica, tomemos como exemplo um sistema gasoso contido em um recipiente provido de êmbolo móvel.

**Exemplo 1:**

O gás recebe de uma fonte térmica externa uma quantidade de calor igual a 1 000 cal ($Q = +1\,000$ cal). Essa energia, além de produzir um aquecimento no gás, provoca sua expansão, com consequente realização de trabalho equivalente a 600 cal ($\tau_{gás} = +600$ cal).

Já que a energia fornecida pelo sistema para o ambiente em forma de trabalho é menor que a recebida em forma de calor, pode-se concluir que o restante ficou no gás, na forma de energia interna, produzindo neste um aumento de 400 cal ($\Delta U = +400$ cal).

A aplicação da equação da **1ª Lei da Termodinâmica** leva-nos à mesma conclusão:

$$\Delta U = Q - \tau_{gás}$$

Sendo:

$Q = +1\,000$ cal (calor recebido)
$\tau_{gás} = +600$ cal (trabalho realizado)
temos:

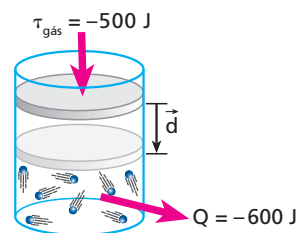
$$\Delta U = (+1\,000) - (+600)$$

$$\Delta U = +400 \text{ cal}$$

O sinal positivo de $\Delta U$ indica que o sistema sofreu um **aumento** em sua energia interna.

**Exemplo 2:**

O gás é comprimido, recebendo um trabalho igual a 500 J ($\tau_{gás} = -500$ J). Simultaneamente, esse gás perde para o ambiente uma quantidade de calor correspondente a 600 J ($Q = -600$ J).

Como o total de energia deve conservar-se, concluímos que, pelo fato de o calor cedido ser, em módulo, maior que a energia recebida em forma de trabalho, a diferença de 100 J saiu do próprio sistema, diminuindo sua energia interna ($\Delta U = -100$ J).

Matematicamente:

$$\Delta U = Q - \tau_{gás}$$

Sendo:

$Q = -600$ J (calor cedido)
$\tau_{gás} = -500$ J (trabalho recebido)
temos:

$$\Delta U = (-600) - (-500) = -600 + 500$$

$$\Delta U = -100 \text{ J}$$

O sinal negativo de $\Delta U$ indica que o sistema sofreu uma **diminuição** em sua energia interna.

**Nota:**

- Observe que é indiferente usarmos as unidades **caloria** ou **joule**. O que não podemos fazer é misturar as duas unidades.

## 5. Transformações termodinâmicas particulares

No estudo da Termodinâmica dos Gases Perfeitos, encontramos quatro transformações particulares que devem ser analisadas com mais detalhes: a **isotérmica**, a **isométrica**, a **isobárica** e a **adiabática**.

### Transformação isotérmica

Nas transformações isotérmicas, a temperatura do sistema gasoso mantém-se constante e, em consequência, a variação de sua energia interna é nula ($\Delta U = 0$). Lembre-se de que a energia interna de um

gás perfeito é função de sua temperatura absoluta

$\left(U = \frac{3}{2}\, n\, R\, T\right)$.

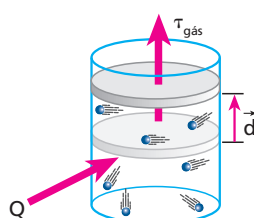
Aplicando a equação da **1ª Lei da Termodinâmica** a essa transformação, temos:

$$\Delta U = Q - \tau_{gás}$$

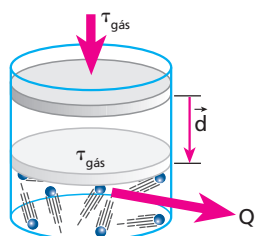
$$0 = Q - \tau_{gás} \Rightarrow \boxed{Q = \tau_{gás}}$$

Isso significa que o calor e o trabalho trocados com o meio externo são iguais.

Esse fato indica duas possibilidades:

a) Se o sistema gasoso recebe calor ($Q > 0$), essa energia é integralmente utilizada na realização de trabalho ($\tau_{gás} > 0$).

$Q = \tau_{gás}$, pois $\Delta U = 0$

$Q > 0$ e $\tau_{gás} > 0$

b) Se o sistema gasoso recebe trabalho ($\tau_{gás} < 0$), ele cede para o meio externo igual quantidade de energia em forma de calor ($Q < 0$).

$\tau_{gás} = Q$, pois $\Delta U = 0$

$\tau_{gás} < 0$ e $Q < 0$

**Nota:**

- É importantíssimo observar que a temperatura do gás não varia em uma transformação isotérmica, mas ele troca calor com o meio externo.

## Transformação isométrica

Nas transformações isométricas (também denominadas isovolumétricas, ou ainda isocóricas), o volume do gás mantém-se constante e, em consequência, o sistema não troca trabalho com o meio externo ($\tau_{gás} = 0$). Portanto, nesse tipo de transformação o sistema não realiza nem recebe trabalho.

Utilizando a equação da **1ª Lei da Termodinâmica**, obtemos:

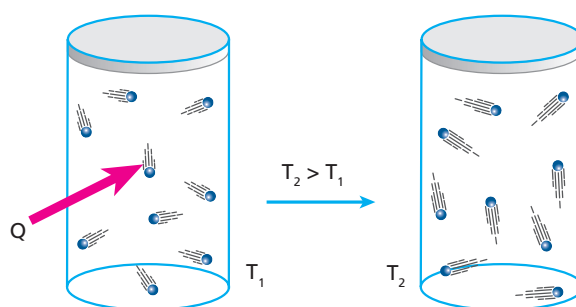
$$\Delta U = Q - \tau_{gás} \Rightarrow \Delta U = Q - 0$$

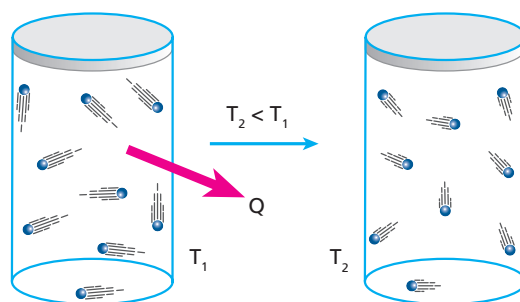
$$\boxed{\Delta U = Q}$$

Isso significa que a variação de energia interna sofrida pelo sistema gasoso é igual ao calor trocado com o meio externo.

Temos, então, duas situações a considerar:

a) Se o sistema recebe calor ($Q > 0$), sua energia interna aumenta ($\Delta U > 0$) em igual valor.

$$\tau_{gás} = 0 \Rightarrow Q = \Delta U$$

b) Se o sistema cede calor ($Q < 0$), sua energia interna diminui ($\Delta U < 0$) em igual valor.

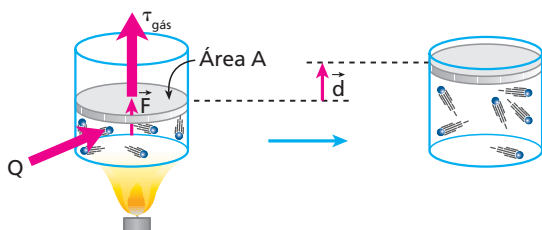
$$\tau_{gás} = 0 \Rightarrow Q = \Delta U$$

## Transformação isobárica

Nas transformações isobáricas, a pressão do sistema gasoso mantém-se constante. Dessa forma, a análise do que ocorre é feita pela **Equação de Clapeyron** (é bom lembrar que estamos utilizando o gás perfeito como sistema físico intermediário):

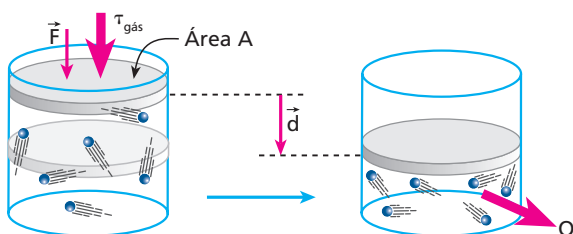
$$p\, V = n\, R\, T$$

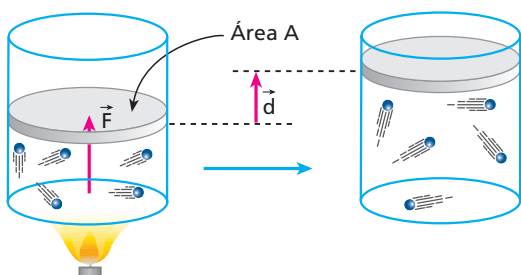
Note que o volume (**V**) do gás varia na razão direta da temperatura absoluta (**T**), já que as demais grandezas permanecem constantes nessa transformação.

Há, então, duas situações a considerar:

a) Quando a temperatura absoluta do sistema aumenta, seu volume também aumenta. Isso significa que sua energia interna aumenta ($\Delta U > 0$) e que o sistema realiza trabalho ($\tau_{gás} > 0$). É evidente que toda essa energia entra no sistema na forma de calor.

$$\Delta U = Q - \tau_{gás} \text{ ou } Q = \tau_{gás} + \Delta U$$

b) Quando a temperatura absoluta do sistema diminui, seu volume também diminui. Isso significa que sua energia interna diminui ($\Delta U < 0$) e que o sistema recebe trabalho ($\tau_{gás} < 0$). É evidente que toda essa energia sai do sistema na forma de calor.

$$\Delta U = Q - \tau_{gás} \text{ ou } Q = \tau_{gás} + \Delta U$$

### Trabalho de um gás em uma transformação isobárica ($\tau_p$)

Considere um gás em expansão isobárica.

Podemos calcular o trabalho realizado por ele usando a fórmula da definição de trabalho de força constante:

$$\tau_p = F\,d \qquad \text{(I)}$$

em que **F** é o módulo da força média aplicada pelo gás no êmbolo móvel do recipiente e **d** é o módulo do deslocamento sofrido por ele.

Sendo **A** a área da secção transversal do êmbolo, da definição de pressão, temos:

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p\,A \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\tau_p = p\,A\,d$$

O produto **A d**, contudo, corresponde ao volume varrido pelo êmbolo, isto é, à variação de volume $\Delta V$ sofrida pelo gás nessa transformação ($A\,d = \Delta V$).

Assim, a equação do trabalho do gás em uma transformação isobárica fica expressa pelo produto da pressão (**p**), que permanece constante, pela variação de volume ($\Delta V$) sofrida pelo gás perfeito:

$$\tau_p = p\,\Delta V$$

Usando a **Equação de Clapeyron**, completamos a relação:

$$\tau_p = p\,\Delta V = n\,R\,\Delta T$$

Essa expressão é válida também na compressão isobárica de um gás perfeito.

## Transformação adiabática

Nas transformações adiabáticas, não há troca de calor entre o sistema e o meio externo. Dessa forma, toda a energia recebida ou cedida pelo sistema ocorre por meio de trabalho.

Da equação da **1ª Lei da Termodinâmica**, sendo $Q = 0$, temos:

$$\Delta U = Q - \tau_{gás} \Rightarrow \Delta U = 0 - \tau_{gás}$$

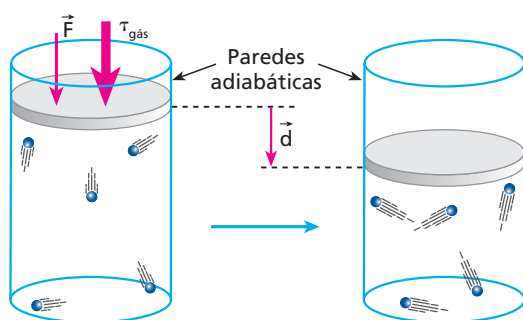
$$\Delta U = -\tau_{gás}$$

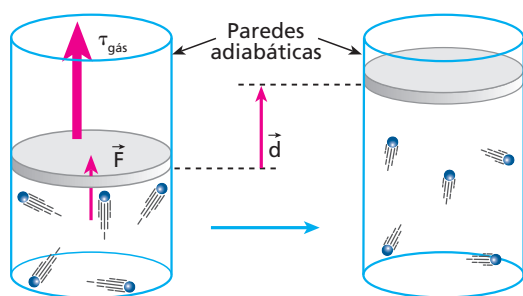
Isso significa que o módulo da variação de energia interna sofrida pelo sistema é igual ao módulo do trabalho que o sistema troca com o meio externo.



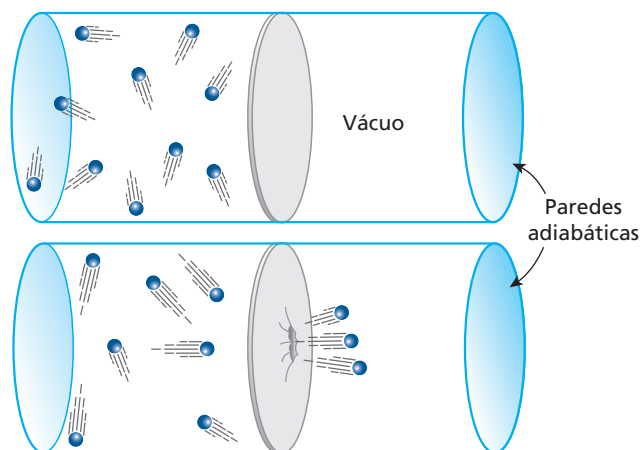
TF2-P1T5_110a147_5P.indd 116 17/08/12 18:30

Assim, temos duas situações a considerar:

a) Quando o sistema recebe trabalho ($\tau_{gás} < 0$), sua energia interna aumenta ($\Delta U > 0$) em igual valor.

$$\Delta U = -\tau_{gás}$$

b) Quando o sistema realiza trabalho ($\tau_{gás} > 0$), ele o faz retirando essa energia da sua própria energia interna, que diminui ($\Delta U < 0$).

$$\Delta U = -\tau_{gás}$$

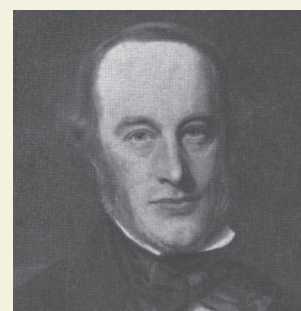
## Expansão livre

Para entender melhor, considere um recipiente de paredes rígidas (volume constante) e adiabáticas (não permite trocas de calor através delas), dividido em duas partes por uma fina película. Em uma das partes coloca-se certa massa de gás perfeito, enquanto na outra supõe-se vácuo.

Se a película subitamente se rompe, o gás se expande pela região de vácuo, realizando uma expansão livre.

Como o gás não sofreu resistência em sua expansão, ele não realizou trabalho ($\tau_{gás} = 0$). Pelo fato de o processo ser adiabático, também não há troca de calor ($Q = 0$). Assim, a variação de energia interna é nula ($\Delta U = 0$) e a temperatura mantém-se constante durante todo o processo.

**Nota:**

- A expansão livre é uma transformação termodinâmica **irreversível**, pois o sistema não consegue voltar à situação inicial espontaneamente, isto é, sem a ajuda de um agente externo. Esse agente deve realizar sobre o gás um trabalho, forçando-o a voltar. Dessa forma, o gás recebe trabalho, o que provoca um aumento em sua energia interna. (Lembremos que a transformação é adiabática.)

**James Prescott Joule** (1818-1889). Físico inglês, nascido em Salford, deixou um grande legado à humanidade com suas pesquisas sobre energia. Em seu principal trabalho, demonstrou a equivalência entre a energia mecânica e a energia térmica. Para homenageá-lo, a comunidade científica usou o nome **joule** como unidade de energia no Sistema Internacional.

## Locomotiva: uma máquina térmica!

Uma **locomotiva a vapor** é um dispositivo que ilustra muito bem uma máquina térmica. Na fornalha, pela combustão da madeira (ou do carvão), é obtida energia térmica (calor), que é transferida para a água existente na caldeira. Essa água se aquece e entra em ebulição, e o vapor produzido expande-se, realizando trabalho. A expansão do vapor transformou energia térmica em energia mecânica (pela realização de trabalho), o que resulta no movimento do trem.

Thinkstock/Getty Images

# Leitura

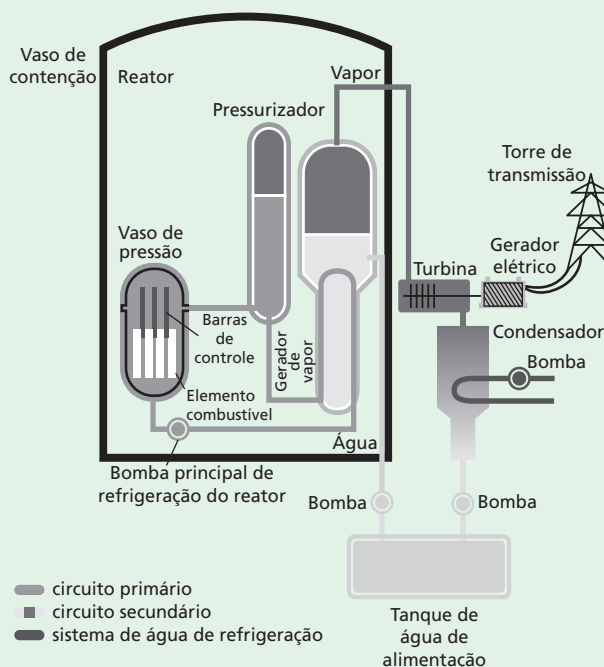
## Uma reflexão sobre a energia nuclear

Muito se tem falado e escrito sobre a energia do átomo. Alguns a favor e muitos contra. No entanto, será que todos sabemos realmente os prós e os contras? A real necessidade de a humanidade usar ou não a energia nuclear?

Nós vivemos em uma sociedade que exige cada vez mais a utilização da energia elétrica. Usamos essa energia para iluminação de nossas casas, lojas e ruas; para fazer funcionar nossos aparelhos de cozinha (geladeiras, *freezers*, batedeiras de bolo, fornos elétricos, fornos de micro-ondas, torradeiras, e outros); para nossos televisores (normais, de plasma, de LCD ou de LED), para nossos aparelhos de som, computadores fixos ou móveis (*notebooks* e *netbooks*); *tablets*, telefones sem fio ou celulares, enfim uma grande quantidade de aparelhos que exigem energia elétrica para seu funcionamento. Já se fala em automóveis elétricos em um futuro bem próximo. Todos eles deverão ser abastecidos nas tomadas de nossas residências. A indústria que produz todos esses bens funciona com energia elétrica. Sempre que pessoas melhoram de vida passam a consumir mais energia elétrica, mais bens que são produzidos a partir dessa energia. Como vamos gerar tanta energia assim? Muitos podem dizer que existe a energia hídrica (gerada nas hidrelétricas, utilizando o desnível de grandes quantidades de água em represas), a energia eólica (gerada por aqueles grandes "ventiladores" soprados pelos ventos), a energia do carvão e dos óleos combustíveis (petróleo ou vegetais), do etanol, da energia solar, porém a obtenção dessas energias também tem suas limitações, seus prós e seus contras.

A seguir vamos entender um pouco da energia nuclear, como obtê-la, os prós e os contras.

A energia utilizada nas centrais termonucleares é obtida a partir da *fissão* controlada de núcleos de Urânio 235 (radioativo). Esse Urânio $U^{235}$ é um isótopo que possui 92 prótons e 143 nêutrons, e sua massa atômica é 235 (92 + 143). Além do $U^{235}$, encontramos na natureza o $U^{238}$, outro isótopo de Urânio que contém 92 prótons e 146 nêutrons. O $U^{238}$ é encontrado em maior quantidade, mas só pode sofrer *fissão* se bombardeado por nêutrons "rápidos", de alta energia cinética. Já o $U^{235}$, que representa apenas 0,7% do Urânio encontrado, pode ser fissionado por nêutrons de qualquer energia cinética, os nêutrons "lentos" (nêutrons térmicos). Como nos reatores do tipo PWR (*Pressurized Water Reactor*), os mais usados, precisamos ter aproximadamente 3,2% de concentração de $U^{235}$, a massa de Urânio deve passar por um processo de enriquecimento. Isso é feito retirando-se $U^{238}$ da amostra, já que, após o enriquecimento, devem-se encontrar 32 átomos de $U^{235}$ para cada 968 átomos de $U^{238}$. Quando o grau de enriquecimeto é muito alto (mais de 90% de $U^{235}$), uma reação em cadeia muito rápida pode ocorrer, é a bomba atômica.

**Esquema gráfico de usina PWR**

**Fonte:** Comissão Nacional de Energia Nuclear – www.cnen.gov.br

A *fissão* de núcleos de Urânio e seus isótopos gera uma grande quantidade de energia térmica, que pode ser aproveitada para a geração de energia elétrica, por meio de reatores do tipo PWR. A taxa de liberação de energia, a potência do reator, pode ser mudada, alterando-se a densidade de átomos físseis, alterando-se o fluxo de nêutrons ou ainda o tamanho do núcleo a ser bombardeado. Para se ter uma ideia, se um grama de $U^{235}$ fosse totalmente fissionado, forneceria energia equivalente à combustão de 9 toneladas de carvão.

Comparando uma usina termonuclear com usinas termelétricas e hidrelétricas, observamos que:

1. As usinas nucleares possuem uma reserva energética muito maior que as termelétricas (que dependem principalmente de combustíveis fósseis, em extinção) e as hidrelétricas (que dependem de reservas hídricas em cotas elevadas, cada vez mais difíceis de se obter).
2. As agressões ao meio ambiente são muito menores nas usinas nucleares. Já as usinas termelétricas são altamente poluidoras, emitindo gases tóxicos gerados pela queima de combustíveis fósseis (como os derivados de petróleo). As usinas hidrelétricas provocam grandes alterações no meio ambiente, como a devastação de grandes áreas úteis à agricultura, alagando-as.

Na tabela a seguir, podemos observar a comparação entre uma usina termelétrica alimentada pela combustão de carvão e uma termonuclear, ambas com potência equivalente a 1 300 MWe (megawatt elétrico).

| Usina | Carvão | Nuclear |
|---|---|---|
| Capacidade instalada | 2 × 650 MWe | 1 300 MWe |
| Combustível | Antracita | Urânio enriquecido |
| Consumo anual de combustível | 2,8 milhões de toneladas | 32t U enriquecido ou 170 t de U natural |
| Utilização de terra para mineração e rejeitos | 415 ha | 5 ha |
| Espaço para estocagem de combustível | 25 ha (reserva de 2 meses) | Alguns $m^2$ somente |
| Necessidade de transporte de combustível | 33 000 vagões por ano | 5 caminhões por ano |
| Emissão de $CO_2$, $SO_2$ e NOx | 85 000 000 t de $CO_2$, 12 000 t de $SO_2$ e 6 000 de NOx, ao ano | zero |
| Rejeitos anuais | 220 000 t de cinzas, 120 000 t de cinzas volantes, 130 000 t de gesso, ao ano | Rejeito de alta radioatividade contido em um cubo de 1,5 m de aresta |

**Fonte:** <http://www.mar.mil.br/ctmsp/usina_nuclear.html>. Acesso em: 8 abr. 2010.

De toda a energia elétrica produzida no mundo, 17% são gerados por usinas termonucleares. O país que mais utiliza essa forma de produção de energia são os Estados Unidos, com 109 usinas gerando 98 784 MWe. O segundo é a França, com 56 usinas que produzem 58 493 MWe. O terceiro é o Japão, com 51 usinas gerando 39 917 MWe. O Brasil possui apenas duas usinas: Angra 1, em operação desde 1985, que gera 657 MWe, e Angra 2, em operação desde 2001, que produz 1 309 MWe. Hoje, são trinta os países que possuem usinas termonucleares em funcionamento; em três deles (Cuba, Irã e Romênia) elas estão em fase de construção.

Apesar dos riscos representados por usinas termonucleares, observamos que no futuro, se não encontrarmos uma nova maneira de obtenção de energia ou não mudarmos nosso modo de vida (utilizando menos energia), deveremos retornar à construção de novas usinas que utilizam a energia do átomo para obter a preciosa energia elétrica que move nosso mundo.

Mauricio Simonetti/Pulsar Imagens

Na fotografia, observamos, à esquerda, a usina nuclear de Angra 1 com sua cúpula cilíndrica; à direita, a usina de Angra 2 com sua cúpula convexa e a imensa chaminé. O conjunto é denominado Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto. Angra 1 iniciou seus trabalhos em 1985 e Angra 2 em 2001. Em um futuro próximo, a usina Angra 3 deverá fazer parte desse cenário.

## Exercícios

nível 1

**1.** Você já deve ter notado que ao esfregar as mãos durante algum tempo elas ficam mais quentes. Isso ocorre porque:
a) aumenta a circulação do sangue, elevando a produção de calor;
b) o movimento das mãos pode alterar a temperatura do ambiente, devido ao atrito delas com o ar;
c) o trabalho mecânico realizado pelas forças de atrito existentes entre as mãos se transforma em energia térmica, aumentando sua temperatura;
d) durante o movimento, as mãos absorvem energia térmica do ambiente, o que aumenta sua temperatura;
e) a diferença de polaridade existente entre a mão direita e a mão esquerda provoca um aquecimento em ambas.

**2.** A primeira coluna descreve uma transformação sofrida pelo gás; a segunda contém a denominação utilizada para indicar essa transformação.

| | |
|---|---|
| (A) O gás realiza trabalho e sua energia interna não varia. | (1) Compressão isotérmica. |
| (B) O gás tem sua energia interna aumentada e não troca trabalho com o meio externo. | (2) Compressão adiabática. |
| (C) O gás não troca calor com o meio externo, mas sua temperatura aumenta. | (3) Aquecimento isométrico. |
| (D) O gás recebe trabalho e sua energia interna não varia. | (4) Expansão isotérmica. |

Em qual das alternativas as associações estão corretas?
a) A–1, B–2, C–3 e D–4.
b) A–4, B–2, C–1 e D–3.
c) A–4, B–3, C–2 e D–1.
d) A–3, B–1, C–4 e D–2.
e) A–2, B–4, C–1 e D–4.

**3.** A **1ª Lei da Termodinâmica**, aplicada a uma transformação gasosa, se refere à:
a) conservação de massa do gás;
b) conservação da quantidade de movimento das partículas do gás;
c) relatividade do movimento de partículas subatômicas, que constituem uma massa de gás;
d) conservação da energia total;
e) expansão e contração do binômio espaço-tempo no movimento das partículas do gás.

**4. E.R.** Um gás perfeito sofre uma expansão, realizando um trabalho igual a 200 J. Sabe-se que, no final dessa transformação, a energia interna do sistema está com 60 J a mais que no início. Qual a quantidade de calor recebida pelo gás?

**Resolução:**
A **1ª Lei da Termodinâmica** dá a relação entre as grandezas referidas no problema:

$$\Delta U = Q - \tau_{gás}$$

Do texto, sabemos que:
$\tau_{gás} = +200$ J (o sistema **realizou** trabalho)
$\Delta U = +60$ J (a energia interna **aumentou**)
Assim, temos:

$$60 = Q - 200 \Rightarrow \boxed{Q = 260 \text{ J}}$$

**5.** Uma porção de gás perfeito está confinada por um êmbolo móvel no interior de um cilindro. Ao receber 20 kcal de calor do meio externo, o êmbolo sobe e o gás realiza um trabalho equivalente a 12 kcal. Aplicando a 1ª Lei da Termodinâmica, determine a variação sofrida pela energia interna desse gás.

**6.** Um gás perfeito sofre uma expansão isotérmica ao receber do ambiente 250 J de energia em forma de calor. Qual o trabalho realizado pelo gás e qual sua variação de energia interna?

**7.** Analise as afirmativas a seguir:
(01) Um gás somente pode ser aquecido se receber calor.
(02) Pode-se aquecer um gás realizando-se trabalho sobre ele.
(04) Para esfriar um gás, devemos necessariamente retirar calor dele.
(08) Um gás pode receber calor do meio externo e sua temperatura permanecer constante.
(16) Numa transformação adiabática de um gás, sua temperatura pode diminuir.
Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**8.** Numa expansão isobárica (pressão constante), o trabalho realizado por um gás é tanto maior quanto:
a) maior a pressão e maior a variação de volume;
b) menor a pressão e maior a variação de volume;
c) maior a pressão e maior o volume;
d) menor a pressão e menor o volume;
e) maior a pressão e menor o volume.

**9.** Analise as proposições dadas a seguir e dê como resposta o somatório dos números que correspondem às afirmativas corretas:
(01) A energia interna de dada massa de gás é função exclusiva de sua temperatura.
(02) Numa expansão isobárica, a quantidade de calor recebida é menor que o trabalho realizado.
(04) Numa transformação isocórica, a variação de energia interna do gás é igual à quantidade de calor trocada com o meio exterior.
(08) Numa transformação adiabática, o gás não troca trabalho com o meio externo.
(16) A energia interna de um sistema gasoso só não varia nas transformações adiabáticas.
(32) Numa expansão isobárica, a temperatura do gás aumenta.

**10.** (UEPG) A 1ª lei da termodinâmica pode ser entendida como uma afirmação do princípio da conservação da energia. Sua expressão analítica é dada por $\Delta U = Q - \tau$, onde **$\Delta$U** corresponde à variação da energia interna do sistema, **Q** e $\tau$, respectivamente, calor trocado e trabalho realizado. Sobre a 1ª lei da termodinâmica aplicada a transformações abertas, assinale o que for correto.
(01) O sistema pode receber trabalho sem fornecer calor e sua energia interna aumenta.
(02) O sistema pode receber calor sem realizar trabalho e sua energia interna aumenta.
(04) O sistema pode, simultaneamente, receber calor e trabalho e sua energia interna aumenta.
(08) O sistema pode realizar trabalho sem receber calor e sua energia interna diminui.
(16) O sistema pode fornecer calor sem receber trabalho e sua energia interna diminui.



TF2-P1T5_110a147_5P.indd 120 17/08/12 18:30

**11.** Um gás perfeito sofre uma expansão isobárica, sob pressão de 5,0 $N/m^2$. Seu volume aumenta de 0,20 $m^3$ para 0,60 $m^3$. Qual foi a variação de energia interna do gás se, durante a expansão, ele recebeu 5,0 J de calor do ambiente?

**12.** Um sistema gasoso ideal sofre uma transformação isobárica de pressão igual a $5 \cdot 10^4$ $N/m^2$. Seu volume evolui de 3 L para 6 L. Determine o trabalho trocado com o meio externo.
**Dado:** 1 L = 1 $dm^3$ = $10^{-3}$ $m^3$

## Exercícios nível 2

**13. E.R.** Um sistema gasoso ideal troca (recebe ou cede) com o meio externo 150 cal em forma de calor. Determine, em joules, o trabalho trocado com o meio, em cada um dos casos:
a) expansão isotérmica;
b) compressão isotérmica;
c) aquecimento isométrico.
**Dado:** 1 cal = 4,18 J

**Resolução:**
Nas transformações isotérmicas, não há variação de temperatura e, em consequência, a energia interna do sistema mantém-se constante ($\Delta U = 0$).
Da **1ª Lei da Termodinâmica**, $\Delta U = Q - \tau_{gás}$, vem:

$$\boxed{Q = \tau_{gás}}$$

Então, se o sistema recebe calor, realiza um trabalho de igual valor. Se cede calor, é porque recebe igual quantidade de energia em forma de trabalho.

a) Na expansão, o volume aumenta e o sistema realiza trabalho ($\tau_{gás} > 0$), recebendo calor ($Q > 0$).
Daí, temos:

$$\tau_{gás} = Q = 150 \text{ cal}$$

Transformando caloria em joule, vem:

$$\tau_{gás} = J\,Q \Rightarrow \tau_{gás} = 4{,}18 \cdot 150$$

$$\boxed{\tau_{gás} = 627 \text{ J}}$$

b) Na compressão, o volume diminui e o sistema recebe trabalho ($\tau_{gás} < 0$), cedendo calor ($Q < 0$).
Daí, temos:

$$\tau_{gás} = Q = -150 \text{ cal}$$

Transformando caloria em joule, vem:

$$\boxed{\tau_{gás} = -627 \text{ J}}$$

c) Nas transformações isométricas, o volume permanece constante e não há trabalho trocado com o meio externo.
Então:

$$\boxed{\tau_{gás} = 0}$$

**14.** Um sistema termodinâmico, constituído por um gás perfeito, troca 400 cal de calor com o meio externo. Determine a variação de energia interna do sistema, em cada um dos casos:
a) aquecimento isocórico;
b) resfriamento isométrico;
c) expansão isotérmica.

**15.** Numa transformação termodinâmica, um gás ideal troca com o meio externo 209 J em forma de trabalho. Determine, em calorias, o calor que o sistema troca com o meio externo, em cada um dos casos:
a) expansão isotérmica;
b) compressão isotérmica;
c) expansão adiabática.
**Dado:** 1 cal = 4,18 J

**16.** Leia com atenção e identifique a alternativa correta.
a) Numa compressão isotérmica de um gás perfeito, o sistema não troca calor com o meio externo.
b) Numa compressão isotérmica de um gás perfeito, o sistema cede um valor de calor menor que o valor do trabalho que recebe.
c) Numa compressão isotérmica de um gás perfeito, sempre ocorre variação da energia interna do gás.
d) Numa compressão isotérmica de um gás perfeito, o sistema realiza trabalho; portanto, não recebe calor.
e) Numa compressão isotérmica de um gás perfeito, o sistema recebe trabalho, que é integralmente transformado em calor.

**17.** Um estudante manuseava uma bomba manual (metálica) de encher bola de futebol. Mantendo o orifício de saída do ar tapado com seu dedo, ele comprimia rapidamente o êmbolo e observava que o ar dentro da bomba era aquecido.
Das afirmativas a seguir, qual você usaria para explicar o fenômeno descrito?
a) Quando se comprime um gás, sua temperatura sempre aumenta.
b) Quando se comprime rapidamente um gás, facilita-se a troca de calor entre o ar que está dentro da bomba e o meio externo.
c) Devido à rapidez da compressão, o ar que está dentro da bomba não troca calor com o meio externo; assim, o trabalho realizado provoca aumento da energia interna desse ar.
d) A compressão rápida do ar foi feita isobaricamente, provocando aumento na velocidade de suas partículas.
e) O fenômeno descrito é impossível de ocorrer, pois, sendo o corpo da bomba metálico, qualquer energia que seja fornecida para o ar interno será imediatamente transferida para o meio externo.

**18.** (Vunesp-FMJ) Inicialmente, um gás ideal ocupava o volume de 3,5 litros enquanto sua temperatura e pressão eram, respectivamente, 400 K e $2{,}0 \cdot 10^5$ Pa.
a) Determine a relação entre o volume e a tempertatura para que a pressão desse gás passe a ser mantida em $2{,}5 \cdot 10^5$ Pa.
b) Suponha que, a partir das condições inciais, o gás receba calor de uma fonte térmica, realizando sobre o meio um trabalho de 800 J. Nessas condições, sabendo-se que a transformação sofrida pelo gás foi isobárica, determine seu novo volume.

**19. E.R.** Um gás perfeito sofre uma expansão isobárica, trocando com o meio externo 500 cal em forma de calor e 300 cal em forma de trabalho. Determine a variação da energia interna do sistema.

**Resolução:**

Como o gás sofre uma expansão, seu volume aumenta e ele realiza trabalho ($\tau_{gás} = +300$ cal).

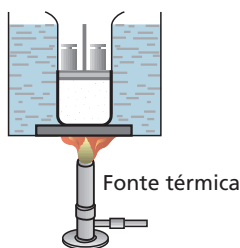
Da **Equação de Clapeyron** para os gases perfeitos, $p\,V = n\,R\,T$, observamos que, sendo isobárica ($p = cte$) a transformação, quando o volume aumenta, a temperatura absoluta também aumenta, provocando aumento de energia interna ($\Delta U > 0$).

Daí concluirmos que o sistema recebe calor ($Q = +500$ cal), que será parcialmente transformado em trabalho realizado, sendo o restante usado para aumentar a energia interna do sistema.

Portanto, da **1ª Lei da Termodinâmica**, $\Delta U = Q - \tau_{gás}$, vem:

$$\Delta U = 500 - 300 \Rightarrow \boxed{\Delta U = +200 \text{ cal}}$$

O sinal positivo indica que houve aumento na energia interna do sistema.

**20.** (UFBA) Para aquecer lentamente o gás contido em um recipiente provido de êmbolo móvel, utiliza-se o sistema de banho-maria, conforme a figura abaixo.

Considerando-se que os pesos são mantidos sobre o êmbolo, o gás, ao expandir-se:

(01) desloca o êmbolo com velocidade constante.
(02) sofre acréscimo de energia interna.
(04) mantém sua pressão constante.
(08) tem seu estado termodinâmico descrito exclusivamente pela temperatura.
(16) converte integralmente em trabalho o calor recebido da fonte térmica.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**21.** (UFMS) Um cilindro, fechado por um êmbolo, encerra o volume de $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ m$^3$ de um gás ideal à pressão de $2{,}0 \cdot 10^5$ Pa. O sistema recebe de uma fonte quente $5{,}0 \cdot 10^3$ J de calor. O êmbolo desloca-se de modo que o volume do gás seja duplicado num processo isobárico.

Ao final do processo, pode-se afirmar que:

(01) não houve qualquer variação da energia interna do sistema.
(02) o calor fornecido pela fonte quente foi totalmente armazenado sob a forma de energia interna do sistema.
(04) o trabalho realizado pelo sistema sobre o meio foi de $2{,}0 \cdot 10^3$ J.
(08) o aumento da energia interna do sistema foi de $3{,}0 \cdot 10^3$ J.
(16) o calor fornecido pela fonte quente foi totalmente transformado em trabalho realizado pelo sistema sobre o meio.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**22.** Na universidade, no interior de um laboratório de Física, um instrutor realizou um experimento diante de uma plateia extremamente atenta. Utilizando um recipiente apropriado, provido de êmbolo móvel, aprisionou determinada massa de um gás monoatômico, que pode ser considerado como um gás ideal. Com uma fonte térmica provocou no gás uma transformação quase estática em duas etapas: uma isobárica seguida de outra isométrica. No estado inicial a pressão do gás valia $8{,}0 \cdot 10^2$ N/m$^2$ e o volume $0{,}40$ m$^3$. No final do experimento a pressão valia $4{,}0 \cdot 10^2$ N/m$^2$ e o volume $0{,}80$ m$^3$.

Utilizando estes dados, determine:

a) a variação de energia interna do gás.
b) o trabalho realizado pelo gás nesta transformação (desconsidere os atritos).
c) a quantidade de calor trocada pelo gás com a fonte térmica externa.
d) Se a transformação isométrica ocorrer antes da isobárica, mantendo-se os mesmos estados inicial e final, qual é o novo trabalho realizado pelo gás?

**23.** (Unesp-SP) Um pistão com êmbolo móvel contém 2 mol de $O_2$ e recebe 581 J de calor. O gás sofre uma expansão isobárica na qual seu volume aumentou de 1,66 L, a uma pressão constante de $10^5$ N/m$^2$. Considerando que nessas condições o gás se comporta como gás ideal, utilize $R = 8{,}3$ J/mol · K e calcule:

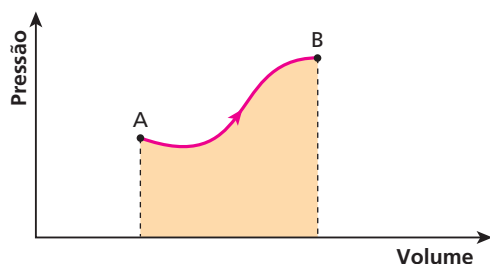
a) a variação de energia interna do gás;
b) a variação de temperatura do gás.

# Bloco 2

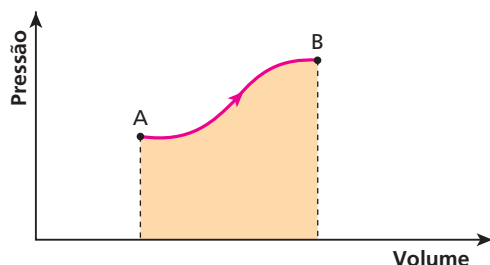
## 6. Diagramas termodinâmicos

No estudo da Termodinâmica dos Gases Perfeitos, é de grande importância o **Diagrama de Clapeyron**, que representa a relação existente entre a pressão, o volume e a temperatura absoluta de uma massa de gás perfeito.

### Uma transformação aberta

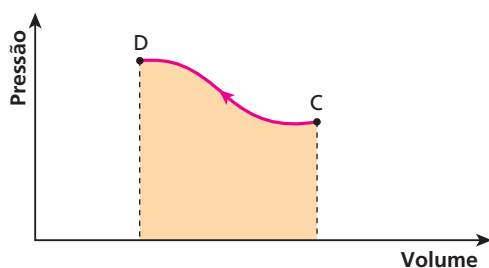
Consideremos um sistema constituído por certa massa de gás perfeito, que sofre uma transformação aberta, passando de um estado definido pelo ponto **A** para outro definido pelo ponto **B**, conforme a indicação do diagrama a seguir.

A “área” destacada sob a curva que representa a transformação, indicada no diagrama pressão × volume, é igual ao módulo do trabalho que esse sistema troca com o meio externo ao executar essa transformação.

Numa transformação aberta, podem ocorrer três situações:

a) Quando um sistema realiza trabalho ($\tau_{gás} > 0$), seu volume aumenta.

$$\text{“Área”} = |\tau_{AB}|$$

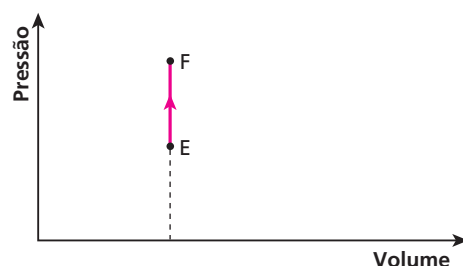
**Atenção:**

$$\tau_{AB} > 0$$

b) Quando um sistema recebe trabalho ($\tau_{gás} < 0$), seu volume diminui.

$$\text{“Área”} = |\tau_{CD}|$$

**Atenção:**

$$\tau_{CD} < 0$$

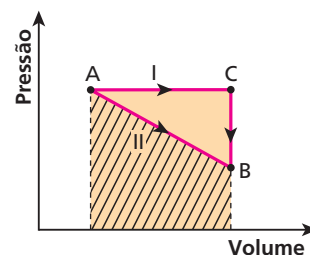
c) Quando um sistema não troca trabalho com o meio externo, seu volume permanece constante

$$\text{“Área”} = 0$$

**Atenção:**

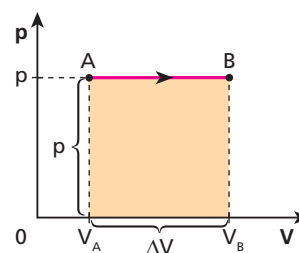
$$\tau_{EF} = 0$$

**Notas:**

- É importante observar que o trabalho trocado entre o sistema e o meio externo depende não somente dos estados inicial e final, mas também dos estados intermediários, que determinam o “caminho” ao longo da transformação.

  O diagrama ao lado mostra, por exemplo, uma transformação aberta sofrida por um sistema gasoso, na qual o estado final **B** pode ser atingido, a partir do estado inicial **A**, por dois caminhos diferentes, I e II.

  A “área” bege, correspondente ao caminho I, é maior que a “área” hachurada, correspondente ao caminho II. Isso significa que o trabalho realizado pelo sistema ao percorrer o caminho I é maior que o trabalho realizado ao percorrer o caminho II.

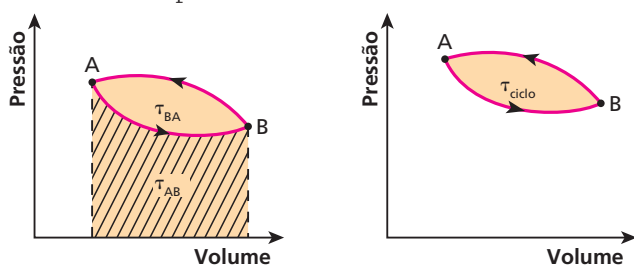
$$\tau_{ACB} > \tau_{AB}$$

- Na transformação isobárica (p = pressão constante), fica fácil demonstrar que a “área” sob o gráfico é igual ao módulo do trabalho trocado pelo sistema.

$$\text{“Área”} = p|\Delta V| = |\tau_{AB}|$$

$$\tau_{AB} = p\,\Delta V = n\,R\,\Delta T$$

## Uma transformação cíclica

Um sistema gasoso sofre uma transformação definida como cíclica (ou fechada) quando o estado final dessa transformação coincide com o estado inicial. Num diagrama pressão × volume, essa transformação cíclica é representada por uma curva fechada, e o módulo do trabalho total trocado com o meio externo é determinado pela "área interna" à curva fechada representativa do ciclo.

Não é difícil perceber que, ao desenvolver uma transformação cíclica, o sistema geralmente realiza e recebe trabalho, sendo o trabalho total a soma desses trabalhos parciais.

Na transformação AB, o módulo do trabalho é dado pela "área" hachurada (trabalho realizado ⇒ $\tau_{AB} > 0$) e, na transformação BA, é dado pela área bege (trabalho recebido ⇒ $\tau_{BA} < 0$). Ao determinarmos o trabalho total, resta apenas a "área interna" à curva fechada.

O trabalho total tem seu módulo determinado pela "área interna" à curva fechada.

É importante observar que:

a) Quando o ciclo está orientado no sentido horário, o trabalho realizado é maior que o recebido. Dizemos que o ciclo no sentido horário indica que o sistema realiza trabalho: $\tau_{ciclo} > 0$.

b) Quando o ciclo está orientado no sentido anti-horário, o trabalho recebido é maior que o realizado. Dizemos que o ciclo no sentido anti-horário indica que o sistema recebe trabalho: $\tau_{ciclo} < 0$.

**Nota:**

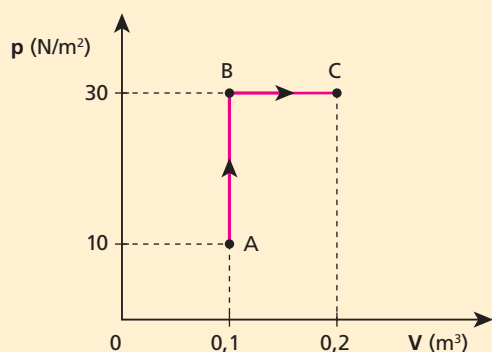
- No diagrama pressão × volume, o módulo do trabalho trocado entre o sistema e o meio externo é determinado pela "área", em joules, quando a pressão é dada em $N/m^2$ (pascal) e o volume, em $m^3$; caso contrário, deve-se fazer a conversão para essas unidades.

  Para isso, é importante lembrar que:

$$1\ L = 1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3$$

$$1\ atm \cong 760\ mm\ Hg \cong 10^5\ N/m^2$$

## Exercícios nível 1

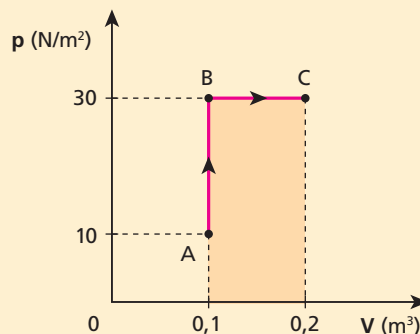
**24. E.R.** Um gás perfeito passa do estado representado por **A**, no gráfico, para os estados representados por **B** e **C**:

Determine o trabalho realizado pelo gás, em joules, nas transformações:

a) **A** para **B**;
b) **B** para **C**;
c) **ABC**.

**Resolução:**

a) Na transformação **AB**, não há troca de trabalho com o meio externo, pois o volume do sistema mantém-se constante:

$$\boxed{\tau_{AB} = 0}$$

b) Na transformação **BC**, o trabalho realizado (o volume do sistema aumenta) pelo gás é igual à "área" sob o gráfico:

"Área" $= \tau_{BC}$

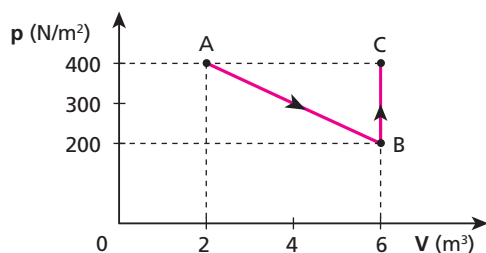
$$\tau_{BC} = 30 \cdot (0,2 - 0,1)$$

$$\boxed{\tau_{BC} = 3\ J}$$

c) O trabalho total na transformação **ABC** é a soma algébrica dos trabalhos nas transformações **AB** e **BC**. Assim:

$$\tau_{ABC} = \tau_{AB} + \tau_{BC} \Rightarrow \tau_{ABC} = 0 + 3$$

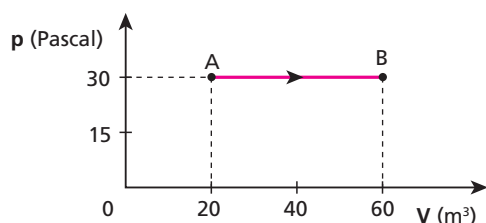
$$\boxed{\tau_{ABC} = 3\ J}$$

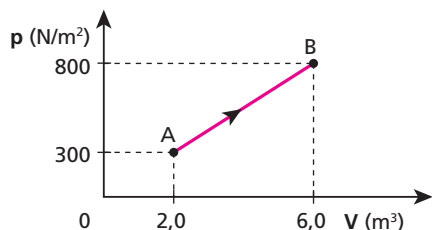
**25.** Um gás perfeito sofre a transformação **ABC** indicada no diagrama pressão (**p**) × volume (**V**) a seguir:

Determine o trabalho do sistema nas transformações:

a) **A** para **B**;

b) **B** para **C**;

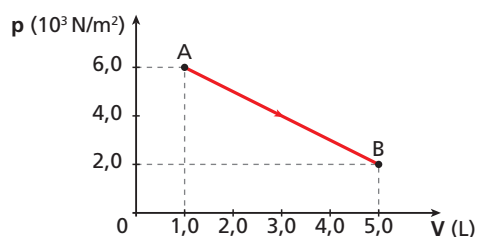
c) **ABC**.

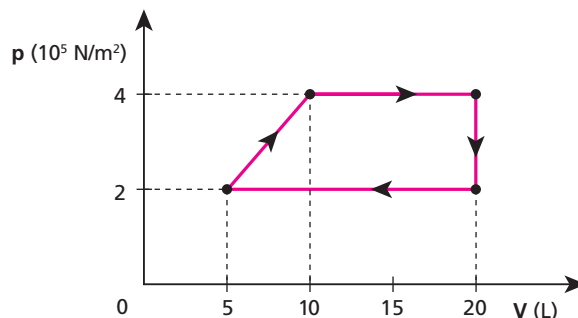
**26.** No processo isobárico indicado no gráfico, um gás perfeito recebeu 3 000 J de energia do ambiente.

Que variação ocorreu na energia interna desse gás?

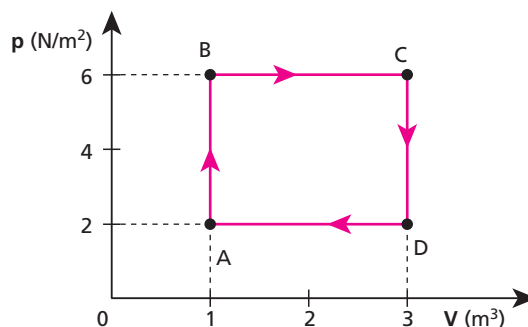
**27.** Um sistema termodinâmico constituído de certa massa de gás perfeito recebe calor de uma fonte térmica, num total de 8 500 J. Em consequência, o gás se expande, sofrendo a transformação **AB** representada no diagrama pressão (**p**) × volume (**V**) a seguir:

A respeito da transformação **AB**, responda:

a) Qual é o trabalho do sistema? É trabalho realizado ou recebido? Justifique.

b) Qual é a variação de energia interna? A energia interna aumentou ou diminuiu? Justifique.

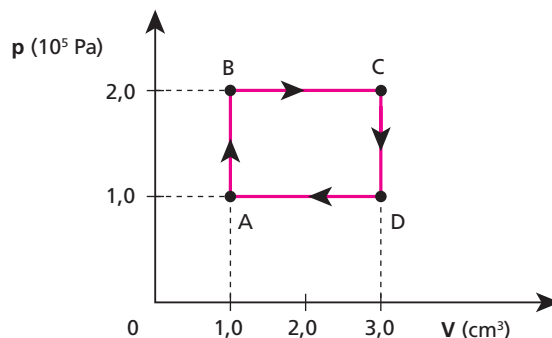
**28.** No diagrama a seguir observamos a transformação sofrida por uma determinada amostra de gás perfeito.

Sabe-se que durante a transformação o gás recebeu de uma fonte térmica energia equivalente a 22,0 joules. A partir desses dados, estabeleça a variação de energia interna dessa amostra gasosa.

**29.** (PUC-MG) A transformação cíclica representada no diagrama a seguir mostra o que ocorreu com uma massa de gás perfeito.

Qual o trabalho realizado por esse gás em cada ciclo? Dê a resposta em joules.

**30.** Um gás perfeito desenvolve uma transformação cíclica **ABCDA**, como mostra a figura abaixo.

Determine:

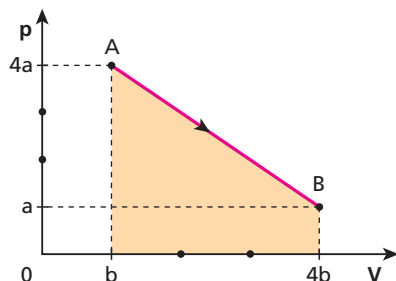
a) o trabalho, em joules, realizado pelo gás no ciclo **ABCDA**;

b) o ponto do ciclo em que a energia interna do sistema é máxima e o ponto onde é mínima.

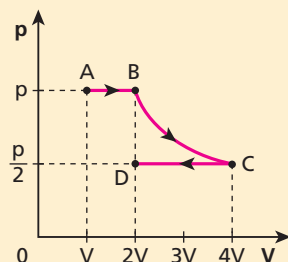
**31.** Um sistema termodinâmico, constituído de certa massa de gás perfeito, realiza a cada segundo 100 ciclos **ABCDA**. O diagrama a seguir mostra a evolução de um ciclo **ABCDA**.

Qual a potência desse sistema? Dê a resposta na unidade watt.

## Exercícios

nível 2

**32.** (Unip-SP) O gráfico a seguir representa a pressão em função do volume para 1 mol de um gás perfeito:

O gás vai do estado **A** para o estado **B** segundo a transformação indicada no gráfico. Indique a opção correta:

a) A transformação indicada é isotérmica.
b) A área assinalada na figura mede a variação de energia interna do gás.
c) Na transformação de **A** para **B** o gás recebe um calor **Q**, realiza um trabalho $\tau$, de modo que $|Q| = |\tau|$.
d) A transformação de **A** para **B** é adiabática porque não houve acréscimo de energia interna do gás.
e) A área assinalada na figura não pode ser usada para se medir o calor recebido pelo gás.

**33. E.R.** Um gás perfeito monoatômico sofre o conjunto de transformações indicadas no esquema:

a) Sendo **T** a temperatura absoluta do gás em **A**, qual é a sua temperatura em **D**?
b) Sendo **n** o número de mols e **R** a constante universal dos gases perfeitos, qual é a variação de energia interna do gás ao passar do estado **A** para o **D**?

c) Qual é a razão entre os trabalhos do gás nas transformações **AB** e **CD**?

**Resolução:**

a) Como o número de mols do gás não varia, podemos aplicar a **Lei Geral dos Gases Perfeitos**:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_D V_D}{T_D}$$

Assim, temos:

$$\frac{pV}{T} = \frac{\frac{p}{2}\, 2V}{T_D} \Rightarrow \boxed{T_D = T}$$

b) Como as temperaturas $T_A$ e $T_D$ são iguais, concluímos que a variação de energia interna é nula:

$$\boxed{\Delta U_{AD} = 0}$$

c) Na transformação **AB**, o volume aumenta e o sistema realiza trabalho ($\tau_{AB} > 0$) igual à "área" encontrada sob o gráfico:

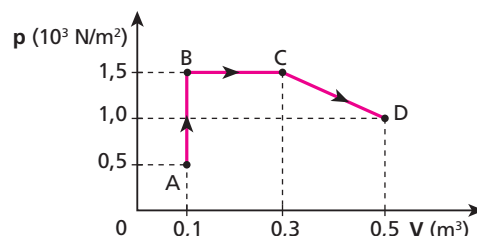
$$\tau_{AB} = +pV$$

Na transformação CD, o volume diminui e o sistema recebe trabalho ($\tau_{CD} < 0$) igual a:

$$\tau_{CD} = -\frac{p}{2}\, 2V \Rightarrow \tau_{CD} = -pV$$

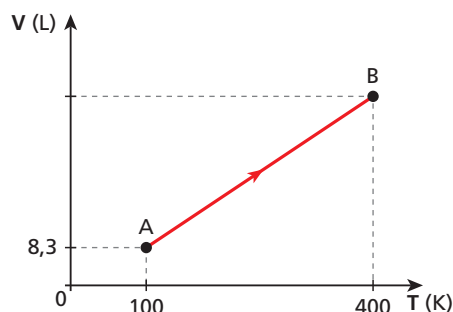
Assim, a razão entre esses trabalhos é dada por:

$$\frac{\tau_{AB}}{\tau_{CD}} = \frac{+pV}{-pV} = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_{AB}}{\tau_{CD}} = -1}$$

**34.** Um sistema gasoso ideal, ao receber 293 cal, evolui do estado **A** para o estado **D**, conforme o gráfico:

Determine:

a) o trabalho do gás em cada transformação: **AB**, **BC** e **CD**;
b) a variação da energia interna na transformação **ABCD**;
c) a temperatura do gás no ponto **D**, sabendo que no ponto **C** era de $-3$ °C.

Dado: 1 cal = 4,18 J

**35.** O diagrama volume × temperatura absoluta representado a seguir mostra um processo isobárico ocorrido com uma amostra de gás monoatômico, cujo comportamento pode ser considerado igual ao de um gás ideal.

A pressão é mantida constante em $1{,}0 \cdot 10^6$ N/m². A constante universal dos gases ideais vale, aproximadamente, 8,3 J/mol K. Sendo assim, determine:

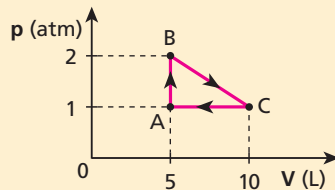
a) O número de mols do gás.
b) O trabalho realizado pelo gás no processo **AB**.
c) A variação de energia interna do gás no processo **AB**.

**36. E.R.** Certa massa de gás ideal desenvolve o ciclo indicado na figura:

Determine:

a) o trabalho realizado pelo gás ao percorrer o ciclo uma vez;

b) a potência desenvolvida, sabendo que a duração de cada ciclo é de 0,5 s;

c) o ponto onde a energia interna do sistema é máxima e onde é mínima.

**Dados:** 1 atm = $10^5$ N/m$^2$;
1 L = 1 dm$^3$ = $10^{-3}$ m$^3$.

**Resolução:**

a) Num ciclo, o trabalho do sistema é igual a sua "área" interna:

$$\tau_{ABC} = \frac{5\text{ L} \cdot 1\text{ atm}}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3 \cdot 1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{2}$$

$$\boxed{\tau_{ABC} = 250\text{ J}}$$

Como o ciclo tem sentido horário, o sistema realiza trabalho e seu sinal é positivo.

b) A potência desenvolvida é dada por:

$$\text{Pot} = \frac{\tau}{\Delta t} \Rightarrow \text{Pot} = \frac{250\text{ J}}{0,5\text{ s}} \Rightarrow \boxed{\text{Pot} = 500\text{ W}}$$

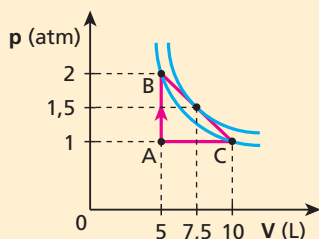
c) Como a energia interna de um gás ideal é função de sua temperatura, podemos afirmar:

I. A energia interna é mínima onde a temperatura também é mínima.

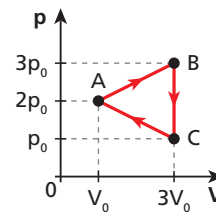
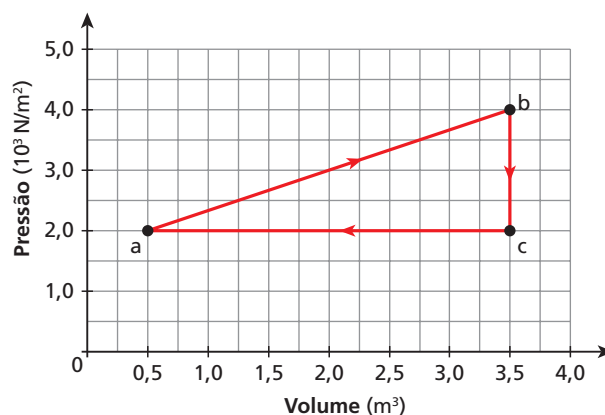
Da Equação de Clapeyron, p V = n R T, observamos que a temperatura absoluta de um gás perfeito é mínima onde o produto pressão × volume é mínimo.

Assim, do gráfico temos que a energia interna desse gás ideal é mínima no ponto **A**.

II. A energia interna é máxima onde a temperatura e o produto p × V são máximos.

Do gráfico, notamos que o produto p × V é o mesmo nos pontos **B** e **C**, o que indica temperaturas iguais, sendo que a mesma isoterma passa por ambos.

Existe, no entanto, outra isoterma mais afastada dos eixos, que toca o ponto médio do segmento BC. É nesse ponto que a energia interna do sistema é máxima.

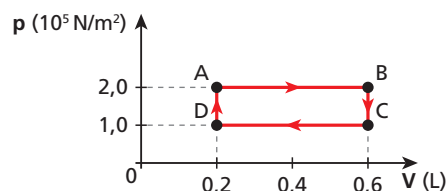
Lembremos que, quanto mais afastada dos eixos se encontra uma isoterma, maior é a temperatura associada a ela.

**37.** Uma máquina térmica executa o ciclo descrito no diagrama pV abaixo. O ciclo inicia-se no estado **A**, vai para o **B**, segundo a parte superior do diagrama, e retorna para **A**, passando por **C**. Sabendo-se que $p_0V_0$ = 13 J, calcule o trabalho realizado por esta máquina térmica ao longo de um ciclo,em joules.

**38.** (UNICAMP-SP) Um gás ideal monoatômico percorre o ciclo termodinâmico **abc** ilustrado na figura abaixo.

Sabendo-se que a temperatura do gás no ponto a é $T_a$ = 200 K e que a constante universal dos gases, **R**, é igual a 8,3 J/mol K, calcule:

a) a quantidade de matéria (em mol) do gás.

b) a temperatura do gás no ponto **b**.

c) a quantidade de calor fornecida ao gás durante o ciclo.

**39.** (AFA-RJ) O diagrama abaixo representa um ciclo realizado por um sistema termodinâmico constituído por **n** mols de um gás ideal.

Sabendo-se que em cada segundo o sistema realiza 40 ciclos iguais a este, é correto afirmar que a (o)

a) potência desse sistema é de 1 600 W.

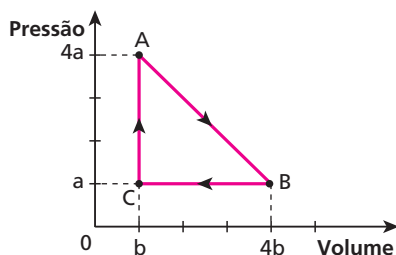
b) trabalho realizado em cada ciclo é −40 J.

c) quantidade de calor trocada pelo gás com o ambiente em cada ciclo é nula.

d) temperatura do gás é menor no ponto **C**.

**40.** (Unip-SP) Para 1 mol de um gás perfeito, submetido a uma pressão **p** e ocupando um volume **V**, a temperatura absoluta **T** e a energia interna **U** são dadas por:

$$T = \frac{pV}{R} \text{ e } U = \frac{3}{2}pV$$

Considere uma amostra de 1 mol de gás perfeito, sofrendo as transformações **AB**, **BC** e **CA** indicadas no diagrama pressão × volume:

Analise as proposições que se seguem:

I. Nos estados **A** e **B**, a energia interna do gás é a mesma, o que nos leva a concluir que, na transformação **AB**, não ocorreu troca de energia entre o gás e o meio externo.

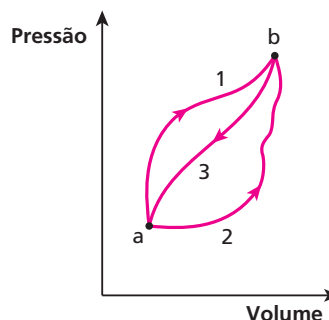
II. Em todo o ciclo, a temperatura é mínima no estado **C**.

III. Nos estados **A** e **B**, a temperatura é a mesma.

IV. Na transformação **BC**, a energia interna do gás vai diminuindo, o que significa que o gás está cedendo energia para o meio externo.

Estão corretas apenas:

a) II, III e IV.
b) I, II e III.
c) I e IV.
d) II e III.
e) II e IV.

**41.** (UFC-CE) Um sistema gasoso, originalmente no estado termodinâmico **a**, é levado para o estado **b** por meio de dois processos distintos, 1 e 2, mostrados na figura. No processo 1, o sistema realiza um trabalho, $\tau_1$, de 300 J e absorve uma quantidade de calor, $Q_1$, de 800 J.

a) Se no processo 2 o trabalho $\tau_2$ realizado é de 100 J, quanto calor, $Q_2$, é absorvido pelo sistema nesse processo?

b) Quando o sistema é trazido de volta ao estado original **a**, pelo processo 3 (ver figura), o trabalho, $\tau_3$, de 200 J é realizado sobre o sistema. Que quantidade de calor, $Q_3$, é envolvida nesse processo?

c) O calor mencionado no item **b** é liberado ou absorvido pelo sistema?

# Bloco 3

## 7. Calores específicos dos gases perfeitos

A variação de temperatura de certa massa de gás pode ser realizada de três maneiras: a volume constante, a pressão constante e a volume e pressão variáveis. Verifica-se que, em cada um desses processos, cada unidade de massa do gás precisa receber ou ceder quantidades diferentes de calor para que sua temperatura sofra a variação de uma unidade.

Esse fato leva-nos a estudar dois desses casos, que apresentam particular importância. São as transformações a volume constante (isométrica) e a pressão constante (isobárica).

### Transformação a volume constante

Suponha o aquecimento **isométrico** de certa massa de gás perfeito. Como vimos no Bloco 2, já que o volume permanece constante, o trabalho trocado é nulo, e todo o calor recebido pelo sistema é integralmente utilizado para aumento de sua energia interna:

$$Q_V = \Delta U_V$$

### Transformação a pressão constante

O aquecimento **isobárico** da massa de gás perfeito é acompanhado de uma realização de trabalho, já que o volume do sistema deve aumentar para que a pressão permaneça constante. Dessa forma, o sistema recebe calor, usa parte dessa energia para realizar trabalho e, com o restante, produz aumento em sua energia interna:

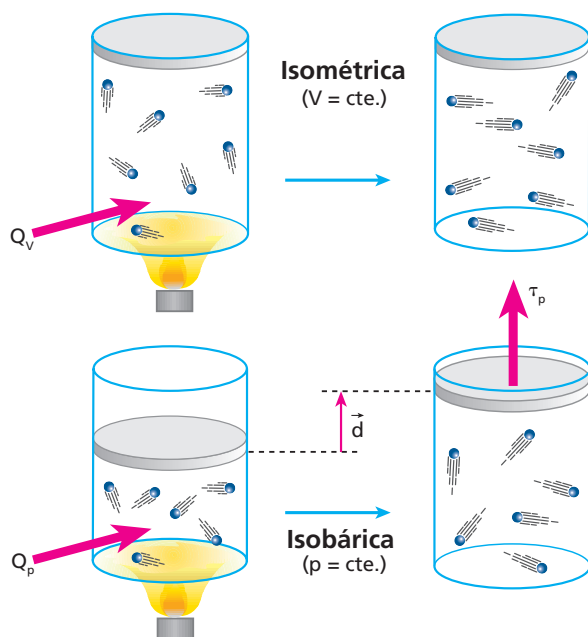
$$Q_p = \tau_p + \Delta U_p$$

### Comparação entre $Q_p$ e $Q_V$

Se o aquecimento sofrido pela massa de gás perfeito foi o mesmo a volume e a pressão constantes ($\Delta U_V = \Delta U_p$), concluímos que sob pressão constante esse sistema recebeu mais calor, pois parte dessa energia foi utilizada para a realização de trabalho, o que não ocorre quando o aquecimento é feito a volume constante:

$$Q_p > Q_V$$

Assim, vale a relação:

$$\tau_p = Q_p - Q_V \quad \text{(I)}$$

Note que, para o aquecimento ($\Delta U_V = \Delta U_p$), precisamos fornecer mais calor ao gás quando a transformação é feita a pressão constante do que quando é feita a volume constante.

É importante observar que um mesmo gás tem um calor específico para transformações a pressão constante ($c_p$) e outro para transformações a volume constante ($c_v$). Isso porque cada unidade de massa desse gás tem que receber mais calor a pressão constante do que a volume constante para que sua temperatura seja elevada em uma unidade.

Dessa forma:

$$c_p > c_V$$

Valem as relações:

$$Q_p = m\, c_p\, \Delta T$$
$$Q_V = m\, c_V\, \Delta T$$

que, substituídas em (I), resultam:

$$\tau_p = m\, c_p\, \Delta T - m\, c_V\, \Delta T$$

Entretanto, como já vimos, o trabalho na transformação isobárica pode ser calculado por:

$$\tau_p = p\, \Delta V = n\, R\, \Delta T = \frac{m}{M} R\, \Delta T$$

Assim, temos:

$$\frac{m}{M} R\, \Delta T = m\, c_p\, \Delta T - m\, c_V\, \Delta T$$

$$\frac{R}{M} = c_p - c_V$$

Essa relação é conhecida como **Relação de Mayer**.

O produto do mol (**M**) do gás por seu calor específico é denominado **calor específico molar** e indica a capacidade térmica de cada mol desse gás.

Portanto, da Relação de Mayer, temos:

$$R = M\, c_p - M\, c_V \Rightarrow \boxed{R = C_p - C_V}$$

Para um gás perfeito, a diferença entre os calores específicos molares a pressão constante e a volume constante é igual à constante universal dos gases perfeitos:

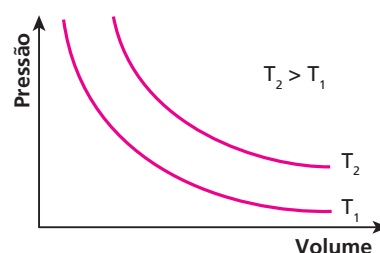
$$R \cong 2 \text{ cal/K mol ou } R = 8{,}3 \text{ J/K mol}$$

Photo Researchers/Diomedia

Essa expressão foi deduzida para gases perfeitos, mas ela é aproximadamente verdadeira para gases reais, quando em baixas pressões e altas temperaturas.

Julius Robert von Mayer (1814-1878) – Físico e químico nascido na Alemanha.

## 8. O gráfico da adiabática

Com relação aos gases perfeitos, vimos que as transformações isotérmicas (temperatura constante) de determinada massa de gás são regidas pela equação $p\, V = K$, em que **p** é a pressão desse gás, **V** é o seu volume e **K** é uma constante. Representada num diagrama pressão × volume, veja a seguir, essa equação proporciona uma curva denominada hipérbole.

Já a transformação adiabática ($Q = 0$) tem por expressão analítica a **Equação de Poisson**:

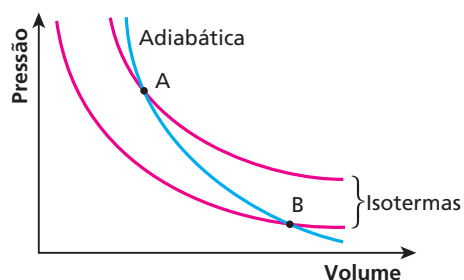
$$pV^{\gamma} = \text{constante}$$

em que **p** é a pressão do gás, **V**, o seu volume, e **γ**, a razão entre os seus calores específicos a pressão constante e a volume constante:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} \quad \text{(expoente de Poisson)}$$

O valor do coeficiente $\gamma$ depende apenas da atomicidade do gás, variando de acordo com a tabela a seguir:

| Atomicidade | $\gamma$ |
|---|---|
| Monoatômico | ≅ 1,7 |
| Diatômico | ≅ 1,4 |
| Poliatômico | ≅ 1,3 |

Notemos que o valor do coeficiente $\gamma$ é maior que 1. Por isso, a curva representativa dessa função, num diagrama pressão × volume, é semelhante a uma hipérbole, porém inclinada em relação às isotermas, interceptando-as:

A expansão AB, ao longo da adiabática, indica que o trabalho foi realizado pelo gás à custa de sua energia interna (a temperatura diminuiu). A compressão BA, ao longo da adiabática, indica que o trabalho recebido pelo sistema produziu aumento em sua energia interna (a temperatura aumentou).

Bettmann/CORBIS/Latinstock

Siméon Denis Poisson (1781-1840) – Físico e matemático nascido na França.

## 9. A energia mecânica e o calor

A energia mecânica de um sistema pode ser dos tipos cinética ou potencial (gravitacional ou elástica). Muitas vezes, essa energia mecânica transforma-se em energia térmica, produzindo aquecimento do sistema. Quando um corpo cai, por exemplo, a energia potencial gravitacional ($E_p = m\,g\,h$) é transformada em energia cinética $\left(E_c = \frac{m\,v^2}{2}\right)$. No impacto com o chão, pelo menos uma parcela dessa energia cinética transforma-se em térmica, ocorrendo a elevação da temperatura desse corpo.

Geralmente, a energia mecânica é medida em joules (**J**) e a energia térmica, em calorias (cal). Dessa forma, é importante saber a relação existente entre essas unidades, para possíveis conversões:

$$1 \text{ caloria} = 4{,}186 \text{ joules}$$

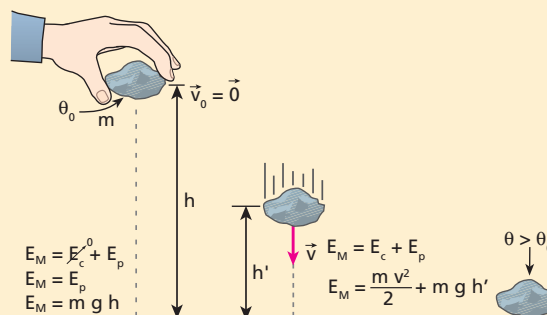
É comum falar em equivalente mecânico da caloria, que é expresso por:

$$J = 4{,}186 \frac{\text{joules}}{\text{caloria}}$$

Esse valor foi calculado por Joule no seu famoso experimento.

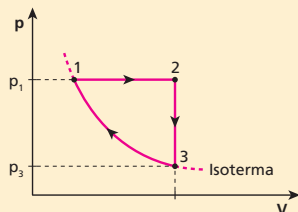
**Nota:**

- O número 4,186 é frequentemente arredondado para 4,19 ou 4,2, ou mesmo 4. Esse arredondamento é feito para facilitar os cálculos nos exercícios.

A ilustração representa a queda de uma pedra em um local onde o campo gravitacional vale **g** e onde podemos considerar desprezível a influência do ar.

No início, a pedra tem energia potencial gravitacional (como sua velocidade inicial é nula, a energia cinética também é nula). Ao cair, sua energia potencial gravitacional diminui, enquanto sua energia cinética aumenta. Observe que o sistema é conservativo. Ao chegar ao solo, considerando a colisão totalmente inelástica, a energia mecânica (potencial gravitacional mais a cinética) se anula, transformando-se principalmente em energia térmica, o que produz um aumento na temperatura da pedra.

## Exercícios

nível 1

**42. E.R.** Um motor, constituído por cilindro e êmbolo, contém 10 g de um gás perfeito, cujas transformações estão esquematizadas na figura:

São dados, para o gás, os calores específicos sob volume constante, $c_V = 0{,}20$ cal/g K, e sob pressão constante, $c_p = 0{,}34$ cal/g K; a temperatura $T_1 = 300$ K; as pressões $p_1 = 4{,}0$ atm e $p_3 = 1{,}0$ atm.
Determine:

a) a temperatura $T_2$;
b) a energia trocada na transformação entre os estados 2 e 3.

**Resolução:**

a) Sendo a transformação 1 → 2 isobárica, temos:

$$\boxed{\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}} \quad \text{(I)}$$

Sendo a transformação 3 → 1 isotérmica, temos:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 = p_3 V_2$$

$$\text{ou} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{4{,}0}{1{,}0} = 4 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 \Rightarrow T_2 = 4 \cdot 300$$

$$\boxed{T_2 = 1\,200 \text{ K}}$$

b) A transformação 2 → 3 é isométrica e, portanto, o trabalho envolvido é nulo ($\tau = 0$). Nessas condições, a expressão da **1ª Lei da Termodinâmica** fica:

$$\Delta U = Q$$

Isso significa que a energia trocada na transformação é exclusivamente térmica.
Assim:

$$Q = m\, c_V\, \Delta T = m\, c_V\, (T_3 - T_2)$$

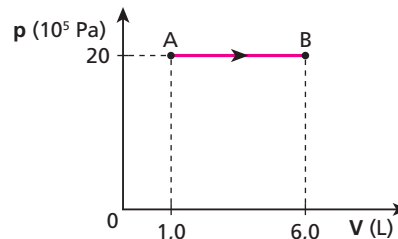
$$Q = 10 \cdot 0{,}20 \cdot (300 - 1\,200)$$

$$\boxed{Q = -1\,800 \text{ cal}}$$

O sinal negativo indica que o sistema gasoso cede calor ao meio externo e, consequentemente, sua energia interna diminui.

**43.** Uma amostra de 60 g de gás perfeito foi aquecida isometricamente, tendo sua temperatura variado de 200 K para 230 K. O calor específico a volume constante desse gás é igual a 0,25 cal/g · K e o calor específico a pressão constante é 0,32 cal/g · K. Determine:

a) o trabalho realizado por esse gás;
b) a variação da energia interna desse gás.

**44.** Uma amostra de 5,0 mols de gás perfeito sofre a expansão isobárica representada no diagrama pressão × volume a seguir:

Sabe-se que a variação de temperatura do gás foi de 250 °C. Sendo o calor específico molar a pressão constante igual a 5,0 cal/mol °C, qual foi a variação da energia interna desse gás?
**Dado:** 1 cal = 4 J

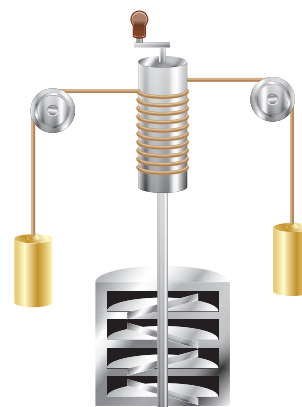
**45.** Uma determinada amostra de gás monoatômico, que se comporta como um gás ideal, recebe de uma fonte térmica o equivalente a 25 joules de calor. Devido a essa energia o gás desenvolve uma expansão isobárica.
Para esse gás, os valores dos calores específicos molares à pressão e à volume constantes:
$C_p = 5$ cal/mol · K e $C_V = 3$ cal/mol · K.
Determinar o trabalho realizado pelo gás na referida expansão.

**46.** Uma quantidade de mercúrio cai de uma altura de 60 m. Supondo que toda a energia potencial se transforme em calor, qual o aumento de temperatura do corpo, em graus Celsius?
**Dados:** calor específico do mercúrio = 0,15 J/g °C; g = 10 m/s².

**47.** (Enem) Um projétil de chumbo é disparado a 200 m/s contra uma parede de concreto. A colisão deforma, aquece e para a bala. Supondo-se que a metade da energia cinética da bala nela permaneça como energia interna, a variação de temperatura do projétil de chumbo é, em °C:

a) $1{,}2 \cdot 10^2$.
b) 80.
c) 40.
d) 20.
e) 8,0.

**Dado:** calor específico do chumbo = 125 J/kg °C

**48.** (Vunesp-SP) A figura ilustra o aparato utilizado por James P. Joule (1818-1889) na determinação do equivalente mecânico do calor (1 cal ≅ 4 J). Os corpos suspensos tem massa 1 kg cada e podem realizar uma queda vertical de 1 metro, em um local em que g = 10 m/s².

Admita que toda a energia potencial correspondente ao movimento de queda dos dois corpos seja utilizada para aquecer 10 gramas de água. Sendo o calor específico da água 1 cal/g °C, a variação de temperatura (em °C) da água foi de:

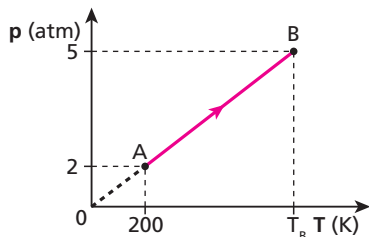
a) 0,25
b) 0,50
c) 0,75
d) 1,00
e) 5,00

## Exercícios

**nível 2**

**49.** Um recipiente de paredes indeformáveis, de capacidade V = 12 L, contém 1,0 mol de um gás perfeito de calor específico molar a volume constante $C_V$ = 3,0 cal/mol K. Fornecendo-se 900 cal a esse gás, sua temperatura absoluta duplica. Qual a pressão final do gás?

**Dado:** $R = 0,082\,\dfrac{\text{atm L}}{\text{mol K}}$

**50.** (EEM-SP) Um gás, constituído por 5 mols, sofre uma transformação, de acordo com o gráfico p = (f) (**T**).

Sendo a constante universal dos gases perfeitos R = 2,0 cal/mol K e o calor molar a volume constante do gás $C_V$ = 5 cal/mol K, determine:

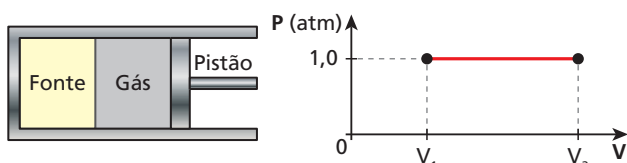
a) o tipo de transformação sofrida pelo gás;
b) o calor recebido e a variação de energia interna sofrida pelo gás, nessa transformação.

**51.** No interior de um cilindro provido de êmbolo móvel e volume $\mathbf{V_0}$ são aprisionados **n** mols de um gás ideal diatômico. Esse gás desenvolve uma expansão adiabática, partindo de uma temperatura $\mathbf{T_0}$ e uma pressão $\mathbf{p_0}$ até atingir a situação final 0,82 $T_0$ e $\dfrac{p_0}{2}$.
Determine o trabalho realizado pelo gás, nessa expansão.
Sabe-se que o calor específico molar a volume constante vale $C_V = \dfrac{5R}{2}$, sendo **R** a constante universal dos gases ideais.

**52.** (Olimpíada Brasileira de Física) Um recipiente cilíndrico, de área de secção reta de 300 cm² contém 3 mols de gás ideal diatômico $\left(C_V = \dfrac{5R}{2}\right)$ que está à mesma pressão externa. Este recipiente contém um pistão que pode se mover sem atrito e todas as paredes são adiabáticas, exceto uma que pode ser retirada para que o gás fique em contato com uma fonte que fornece calor a uma taxa constante. Num determinado instante o gás sofre um processo termodinâmico ilustrado no diagrama PV abaixo e o pistão se move com velocidade constante de $16,6\,\dfrac{\text{mm}}{\text{s}}$.

a) Qual foi a variação de temperatura do gás depois de decorridos 50 s?
b) Obtenha a quantidade de calor transferida ao gás durante esse intervalo de tempo.

**Dados:** $1\text{ atm} \cong 1 \cdot 10^5\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

$R = 8,3\,\dfrac{\text{J}}{\text{mol K}}$

**53.** Certa quantidade de gás ideal expande-se adiabaticamente e quase estaticamente desde uma pressão inicial de 2,0 atm e volume de 2,0 L na temperatura de 21 °C até atingir o dobro de seu volume. Sabendo-se que para este gás $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = 2,0$ e que a Equação de Poisson para as transformações adiabáticas é dada por: $p\,V^\gamma$ = constante, pode-se afirmar que a pressão final e a temperatura final são respectivamente:

a) 0,5 atm e 10,5 °C;
b) 0,5 atm e –126 °C;
c) 2,0 atm e 10,5 °C;
d) 2,0 atm e –126 °C.

**54.** (PUC-RJ) Uma quantidade de gás diatômico $\left(\gamma = 1,4 = \dfrac{7}{5}\right)$ sofre uma expansão adiabática, onde vale $PV^\gamma$ = constante. Se $\dfrac{V_f}{V_i} = 4\sqrt{2}$, qual a razão entre as temperaturas final e incial $\dfrac{T_f}{T_i}$?

a) 0,1
b) 0,2
c) 0,3
d) 0,4
e) 0,5

**55. E.R.** Uma esfera metálica de 200 g de massa é abandonada do repouso, de uma altura **H**, sobre um grande bloco de gelo a 0 °C. Desprezam-se influências do ar e supõe-se que toda a energia mecânica existente na esfera transforma-se em energia térmica e é absorvida pelo gelo, sem, no entanto, alterar a temperatura do metal. Qual deve ser a altura **H** para que 1 g de gelo sofra fusão?

**Dados:** calor específico latente de fusão do gelo = 80 cal/g;
aceleração da gravidade = 10 m/s²;
1 cal = 4,2 J.

**Resolução:**

Para a fusão de 1 grama de gelo, são necessárias 80 cal ou 336 J (1 cal = 4,2 J).
Da conservação da energia, concluímos que essa energia no início estava armazenada no sistema em forma de energia potencial gravitacional. Portanto:

$$E_p = m\,g\,h \Rightarrow 336 = 0,2 \cdot 10 \cdot H \Rightarrow \boxed{H = 168\text{ m}}$$

**56.** Um bloco de gelo fundente de 12 kg de massa é lançado com velocidade igual a 20 m/s sobre uma pista horizontal também de gelo a 0 °C. Devido ao atrito, o bloco para. Se toda a energia cinética foi transformada em térmica e absorvida pelo gelo, qual a massa de gelo que se funde?

**Dados:** 1 cal = 4 J;
calor latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

**57.** (Cefet-PR) Um estudante observou um pequeno aquecimento de 0,1 °C em certa quantidade de massa de modelagem, quando a deixava cair repetidamente vinte vezes de uma altura igual a 1 m no solo firme. Se desprezarmos as trocas eventuais de calor dessa massa com o ambiente e se considerarmos o campo gravitacional igual a 10 m/s², podemos dizer que o calor específico desse material tem valor, em J/kg °C, próximo de:

a) 250.
b) 500.
c) 1 000.
d) 2 000.
e) 4 000.

**58.** (UCMT) Uma manivela é usada para agitar 100 g de água contida num recipiente termicamente isolado. Para cada volta da manivela é realizado um trabalho de 0,1 J sobre a água. O número de voltas necessário para que a temperatura aumente em 1 °C é:

a) 2800.
b) 3700.
c) 5500.
d) 3000.
e) 4200.

**Dados:** 1 cal = 4,2 J;
calor específico da água = 1 cal/g °C.

**59.** Uma bala de chumbo, com velocidade de 100 m/s, atravessa uma placa de madeira e sai com velocidade de 60 m/s. Sabendo que 40% da energia cinética perdida é gasta sob a forma de calor, determine o acréscimo de temperatura da bala, em graus Celsius. O calor específico do chumbo é c = 128 J/kg °C. Considere que somente a bala absorve o calor produzido.

**60.** (Unesp-SP) Um *cowboy* atira contra uma parede de madeira de um bar. A massa da bala de prata é 2 g e a velocidade com que esta bala é disparada é de 200 m/s. É assumido que toda a energia térmica gerada pelo impacto permanece na bala.

a) Determine a energia cinética da bala antes do impacto.
b) Dado o calor específico da prata 234 J/kg °C, qual a variação de temperatura da bala, supondo que toda a energia cinética é transformada em calor no momento que a bala penetra na madeira?

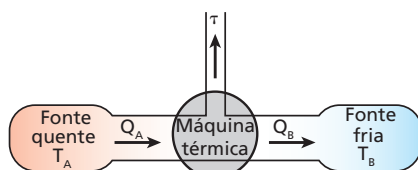
# Bloco 4

## 10. As máquinas térmicas e a 2ª Lei da Termodinâmica

Tips/Other Images - Brasil

Uma máquina térmica mais próxima, que faz parte de nosso dia a dia, é o motor de automóvel. A explosão do combustível (gasolina, álcool ou diesel) origina gases aquecidos que empurram o pistão, realizando trabalho. O movimento do pistão é transferido para as rodas, que giram e proporcionam o movimento do automóvel.

São denominadas **máquinas térmicas** os dispositivos usados para converter energia térmica em energia mecânica.

Desde as máquinas térmicas mais primitivas, que eram usadas para movimentar trens, navios e mesmo os primeiros automóveis, até as mais modernas e sofisticadas, como um reator termonuclear, todas funcionam obedecendo basicamente a um mesmo esquema.

$T_A > T_B$

Representação esquemática do funcionamento de uma máquina térmica.

Há duas fontes térmicas, uma "quente" e outra "fria". Entre elas, coloca-se a máquina térmica. Um fluido operante, geralmente vapor de água, serve de veículo para a energia térmica que sai da fonte quente, passa pelo dispositivo intermediário, que utiliza parte dessa energia na realização do trabalho, e leva o restante para a fonte fria.

A quantidade $Q_A$ de calor que chega à máquina térmica, vinda da fonte quente, geralmente é obtida pela combustão de carvão, óleo, madeira ou mesmo por fissão nuclear, ocorrida nos modernos reatores nucleares. A conservação da energia garante que:

$$\tau = |Q_A| - |Q_B|$$

O trabalho realizado pela máquina térmica é igual à diferença entre os módulos do calor recebido da fonte quente e do calor rejeitado para a fonte fria.

## 11. A 2ª Lei da Termodinâmica

O **rendimento** de uma máquina térmica é definido pela fração do calor recebido da fonte quente que é usada para a realização de trabalho:

$$\eta = \frac{\tau}{|Q_A|} = \frac{|Q_A| - |Q_B|}{|Q_A|}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_B|}{|Q_A|}$$

É importante observar que a máquina térmica ideal seria aquela que tivesse um rendimento de 100% ($\eta = 1$). Para que isso se concretizasse, a quantidade de calor rejeitada para a fonte fria deveria ser nula ($Q_B = 0$). Na prática, isso é impossível, pois a

energia térmica $Q_A$ somente sai da fonte quente devido à existência da fonte fria. Lembremos que calor é energia térmica em trânsito, que se transfere, espontaneamente, de um local de maior temperatura para outro de menor temperatura.

Dessa impossibilidade surgiu o enunciado de Kelvin-Planck para a **2ª Lei da Termodinâmica**:

> É impossível construir uma máquina que, operando em transformações cíclicas, tenha como único efeito transformar completamente em trabalho a energia térmica recebida de uma fonte quente.

O fato de a energia térmica fluir da fonte quente para a fonte fria levou Rudolf Clausius a enunciar essa 2ª Lei da Termodinâmica da seguinte forma:

> É impossível uma máquina, sem ajuda de um agente externo, conduzir calor de um sistema para outro que esteja a uma temperatura maior.

A consequência imediata desse enunciado é que o calor só pode passar de um sistema de menor temperatura para outro de maior temperatura se um agente externo realizar um trabalho sobre esse sistema, como nas máquinas frigoríficas.

SPL/Latinstock

Fotografia do físico alemão Rudolf Emmanuel Clausius (1822-1888), um dos fundadores da Termodinâmica.

## Máquinas térmicas: antigas e modernas

Newton Villas Boas

Ricardo Azoury/Pulsar Imagens

Nas antigas máquinas térmicas, a energia obtida da combustão de carvão mineral era transformada em energia mecânica, que produzia o movimento das máquinas industriais.
Nas modernas usinas nucleares, a energia liberada pelo processo de fissão nuclear transforma-se em térmica (aquecendo um líquido ou um gás) e, em seguida, transforma-se em energia mecânica (nas turbinas). A energia mecânica, por sua vez, se transforma em energia elétrica (nos geradores), que é enviada para as indústrias e residências. Na primeira fotografia podemos observar uma dessas antigas máquinas térmicas (Museu da Energia – Canela, RS); a segunda fotografia mostra uma moderna usina nuclear.

## 12. O ciclo de Carnot

Até 1824, acreditava-se que uma máquina térmica poderia atingir o rendimento total (100%) ou algo próximo desse valor. Em outras palavras, acreditava-se na possibilidade de utilização de toda a energia térmica fornecida a uma máquina, que se transformaria integralmente, ou quase, em trabalho.

Coube ao jovem engenheiro francês Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832) demonstrar a impossibilidade desse rendimento. Ele propôs uma máquina térmica teórica, ideal, que funcionaria percorrendo um ciclo particular, denominado **ciclo de Carnot**. Esse dispositivo obedeceria a dois postulados estabelecidos pelo próprio Carnot, antes mesmo do enunciado da 1ª Lei da Termodinâmica. São eles:

SPL/LatinStock

Retrato de Nicolas Léonard Sadi Carnot.

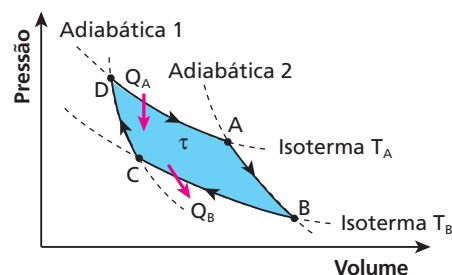
### 1º Postulado de Carnot

> Nenhuma máquina operando entre duas temperaturas fixadas pode ter rendimento maior que a máquina ideal de Carnot, operando entre essas mesmas temperaturas.

### 2º Postulado de Carnot

> Ao operar entre duas temperaturas, a máquina ideal de Carnot tem o mesmo rendimento, qualquer que seja o fluido operante.

Observe que esses postulados garantem que o rendimento de uma máquina térmica é função das temperaturas das fontes fria e quente. Entretanto, fixando-se as temperaturas dessas fontes, a máquina teórica de Carnot é aquela que conseguiria ter o maior rendimento.

Para o caso em que o fluido operante é o gás perfeito, o ciclo de Carnot é composto de duas transformações isotérmicas e duas adiabáticas, intercaladas.

Ciclo de Carnot para gases perfeitos, limitado por duas isotermas e duas adiabáticas.

Na expansão isotérmica DA, o sistema realiza trabalho utilizando o calor $Q_A$ retirado da fonte quente.

Na expansão adiabática AB, o sistema não troca calor, realizando trabalho com diminuição de energia interna e, portanto, de temperatura.

Na compressão isotérmica BC, o sistema rejeita $Q_B$ de calor para a fonte fria, utilizando o trabalho recebido.

Na compressão adiabática CD, o sistema não troca calor. Recebe trabalho, que serve para aumentar sua energia interna e, portanto, sua temperatura.

No ciclo de Carnot, os calores trocados ($Q_A$ e $Q_B$) e as temperaturas absolutas ($T_A$ e $T_B$) das fontes quente e fria são proporcionais, valendo a relação:

$$\frac{|Q_A|}{|Q_B|} = \frac{T_A}{T_B} \quad \text{ou} \quad \frac{|Q_B|}{|Q_A|} = \frac{T_B}{T_A}$$

Substituindo na equação do rendimento de uma máquina térmica, obtemos, para a máquina de Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

Considerando a temperatura da fonte fria ($T_B$) igual a zero Kelvin (zero absoluto), temos:

$$\eta = 1 - \frac{0}{T_A}$$

$$\eta = 1$$

ou

$$\eta(\%) = 100\%$$

Entretanto, esse fato contraria a 2ª Lei da Termodinâmica, que garante ser impossível um rendimento de 100% (pois sempre haverá energia sendo transferida para a fonte fria), o que nos leva a concluir que nenhum sistema físico pode estar no zero absoluto.

De qualquer forma, podemos dizer que:

O **zero absoluto** seria a temperatura da fonte fria de uma máquina ideal de Carnot, que operasse com rendimento de 100%.

## 13. Transformações reversíveis e irreversíveis

Denomina-se transformação **reversível** aquela em que, após seu término, o sistema pode retornar às suas condições iniciais pelo mesmo caminho, isto é, passando pelos mesmos estados intermediários, na sequência inversa daquela ocorrida na transformação inicial, sem interferência externa. A transformação será **irreversível** se o processo não puder satisfazer às condições citadas acima.

Do exposto, podemos entender que a maioria dos processos naturais são irreversíveis, sendo o processo reversível apenas uma idealização teórica. Quando, por exemplo, misturamos dois gases diferentes, torna-se impossível voltar a separá-los sem uma intervenção externa; quando provocamos a expansão livre de um gás, ele não voltará espontaneamente a ocupar as condições iniciais.

## 14. Entropia

Sabemos que a temperatura e a energia interna são duas variáveis de estado utilizadas na descrição do estado termodinâmico de um sistema. Em 1865, Rudolf Clausius usou pela primeira vez uma outra variável, que denominou **entropia** (**S**). Clausius observou que, se as Leis da Natureza puderem atuar, sem interferências, em um sistema, o mais provável é que os integrantes desse sistema tendam a uma disposição desordenada. Se, por exemplo, em uma viagem passamos por um bosque e encontramos árvores alinhadas e separadas por distâncias praticamente iguais, vamos concluir que elas foram plantadas por alguém. Se, no entanto, esse bosque, em sua formação, ficou apenas sob as leis naturais, uma "desordem" no posicionamento das árvores é o que devemos esperar. Na sua mesa de estudo, o normal é encontrarmos seus objetos de uma forma desordenada, e o natural é que essa desordem aumente durante o seu estudo. A partir de observações como essas, Clausius estabeleceu a ideia de entropia como sendo uma medida dessa desordem.

Como a entropia é uma medida da desordem e os sistemas físicos tendem para estados cada vez mais desordenados, podemos inferir que, em processos naturais (sujeitos apenas às Leis da Natureza), a entropia do Universo vem aumentando ao longo do tempo. Essa poderia ser uma outra maneira de enunciarmos a 2ª Lei da Termodinâmica.

Kauko Helavuo/Stone/Getty Images

No Universo, a entropia está aumentando ao longo do tempo.

Segundo Clausius, quando estudamos a **entropia** como uma grandeza física na forma potencial, o importante não é sabermos o seu valor absoluto, mas sim a variação dessa grandeza durante uma transformação. Assim, ele definiu que a variação de entropia ($\Delta S$) de um sistema, quando se agrega uma quantidade de calor (**Q**), mediante um processo reversível (à temperatura absoluta constante **T**), é dada por:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

Caso a temperatura se altere durante o processo, somente poderemos determinar a variação de entropia por meio de cálculo infinitesimal, que foge do nível estabelecido para o nosso curso. No entanto, quando ocorrem pequenas variações de temperatura, podemos mantê-la constante em seu valor médio e utilizar a expressão anterior, com boa aproximação, para o devido cálculo da variação da entropia.

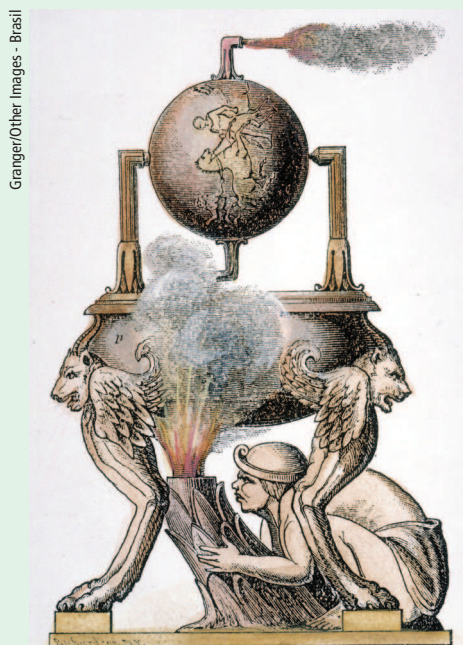
Do exposto, podemos concluir que:

1) Se um sistema recebe calor $Q > 0$, sua entropia aumenta e $\Delta S > 0$.
2) Se um sistema libera calor $Q < 0$, sua entropia diminui e $\Delta S < 0$.
3) Se um sistema não troca calor com o meio externo (transformação adiabática), $Q = 0$, a entropia do sistema não varia e $\Delta S = 0$.

## Leitura

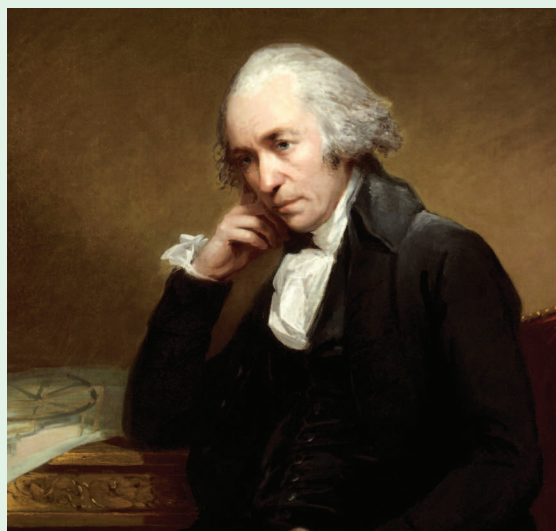
### Máquina térmica

O primeiro dispositivo que funcionava usando a força do vapor data do século I da era cristã. Um estudioso de nome Heron, que viveu em Alexandria, Egito, deixou um esboço da primeira "máquina térmica" de que se tem notícia, a eolípila. Essa máquina era uma esfera metálica, oca, encaixada em um cano, através do qual recebia vapor de uma caldeira. Em suas laterais encontravam-se dois canos em forma de L. O vapor entrava na esfera e saía pelos canos em L. Isso provocava o movimento de rotação do dispositivo. Esse "motor" não realizava trabalho, era apenas uma forma de se demonstrar a "força" do vapor.

Granger/Other Images - Brasil

A figura acima é uma gravura do século XIX que mostra o "motor" inventado por Heron de Alexandria, a eolípila. Essa é a primeira "máquina a vapor" de que se tem notícia.

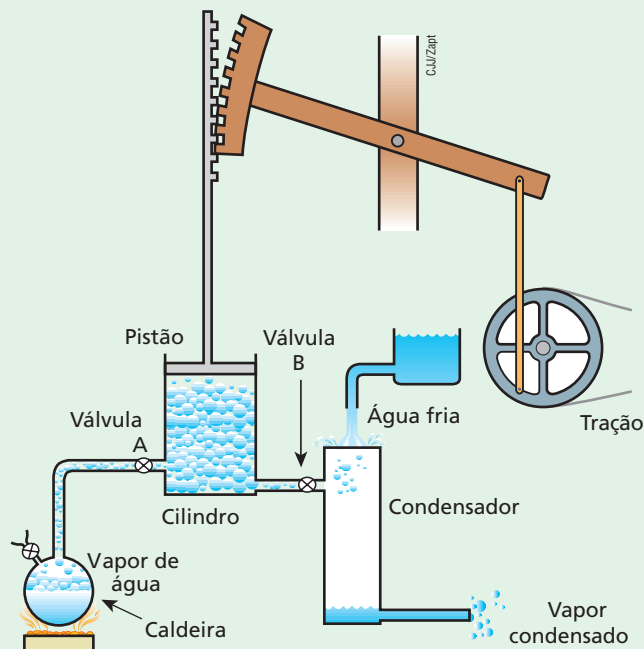
No século XVIII, mais precisamente em 1712, Thomas Newcomen (1662-1729), nascido em Dartmouth, Inglaterra, mecânico de profissão, aperfeiçoou uma máquina inventada por seu sócio (Thomas Savery), que seria utilizada na drenagem de minas. Essa máquina foi instalada com grande sucesso nas minas de carvão em Staffordshire, na Grã-Bretanha, e, por quase cinquenta anos, foi utilizada para evitar a inundação das galerias subterrâneas da área. No entanto, esse dispositivo tinha o inconveniente de gastar muito combustível, sendo usado apenas quando os outros meios de drenagem não estavam em funcionamento.

Em 1765, coube ao engenheiro escocês James Watt (1736-1819) aperfeiçoar a máquina de pistão de Thomas Newcomen, criando um dispositivo mais econômico e prático.

National Portrait Gallery, London/Diomedia

Retrato de James Watt, pintado por Carl Frederick von Breda em 1792. National Portrait Gallery, Londres.

Essa nova máquina a vapor passou a substituir a força animal e humana no funcionamento das máquinas industriais, deflagrando o período histórico denomina-

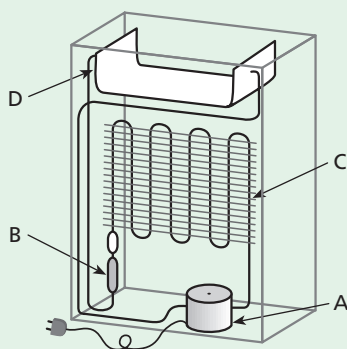
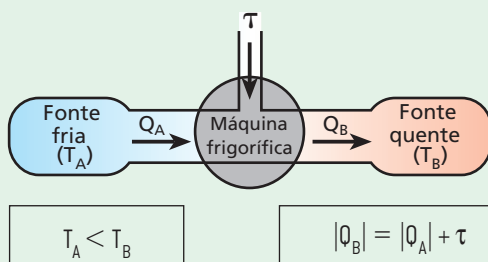
do Revolução Industrial, que transformou toda a estrutura social da Europa. Em 1830, após sua morte, funcionavam, só na Inglaterra, mais de 10 000 máquinas a vapor. Em 1814, o inglês George Stephenson encontrou outra utilidade para as máquinas térmicas de Watt: movimentar uma locomotiva, revolucionando o transporte de pessoas e de bens produzidos pelas indústrias.

Na figura ao lado, podemos observar um esquema que representa uma das primeiras máquinas térmicas idealizada por James Watt. A água aquecida na caldeira entrava em ebulição e o vapor se expandia, provocando o movimento de um pistão que, acoplado a uma roda, desencadeava o movimento de um eixo. Ligadas a esse eixo, várias máquinas industriais funcionavam e, assim, produziam os bens de consumo da época.

## A geladeira

Há evidências de que, desde muito cedo, os seres humanos que viviam em regiões muito frias observaram que o resfriamento dos alimentos conseguia conservá-los por mais tempo. Com o deslocamento das populações pelo mundo, esse conhecimento se espalhou.

Porém, foi somente no século XIX, precisamente em 1834, que Jacob Perkins patenteou um compressor que podia solidificar a água, produzindo gelo artificialmente. A utilização desse compressor possibilitou que algumas indústrias prosperassem, como as cervejarias. Os comerciantes de carne agora podiam mandar seus produtos para os mais distantes países. No início do século XX, em 1902, o americano Willis Carrier instalou em uma gráfica, na cidade de Nova York, o primeiro aparelho de ar condicionado, que permitia resfriar e controlar a umidade do ambiente. No início da década de 1920, surgiram nos Estados Unidos os primeiros refrigeradores domésticos, que logo se popularizaram. Hoje, no Brasil, mais de 80% das residências têm geladeira.

O funcionamento de uma geladeira baseia-se em um processo de transferência de calor de uma fonte fria para uma quente. Esse processo não é espontâneo. É necessária uma energia externa, em forma de trabalho (no compressor), para que essa transferência possa ocorrer. A geladeira possui, portanto, uma fonte fria (o congelador) e outra quente (o radiador), que se encontra na parte externa traseira, em forma de serpentina. O fluido operante usado é o fréon, que vaporiza a baixa pressão no congelador e se condensa a alta pressão no radiador. O mecanismo utilizado para reduzir a pressão no congelador é uma válvula; para aumentar a pressão no radiador, o mecanismo é um compressor, muito parecido com aquele que Perkins inventou. Observe que o fréon retira calor do interior da geladeira ao se vaporizar no congelador e libera calor para o ambiente no radiador, quando se condensa ao ser comprimido pelo compressor.

Ilustrações: CJT/Zapt

As partes principais do mecanismo de uma geladeira:
A. **Compressor:** o fréon entra no estado gasoso com baixa pressão e sai com alta pressão, já condensado.
B. **Válvula:** um tubo estreito (capilar) que diminui a pressão do vapor.
C. **Radiador:** serpentina externa (localizada na parte traseira) na qual o vapor se liquefaz, liberando calor para o ambiente.
D. **Congelador:** o fréon no estado líquido se vaporiza ao absorver calor do interior da geladeira.

Esta ilustração representa a esquematização de uma máquina frigorífica. Espontaneamente, a fonte fria não transfere energia para a fonte quente. Assim, é necessário "forçar" essa transferência pela realização de trabalho sobre o sistema. A energia recebida pela fonte quente é a soma da energia retirada da fonte fria com o trabalho realizado sobre a máquina.

Ricardo Helou

Fotografia de geladeira do final do século XIX. Na parte superior era colocado gelo, que, ao resfriá-la, fazia o papel do atual congelador. Na parte interna útil, o ar que se aquecia retirando calor dos alimentos subia por convecção e era resfriado na face interna superior.

## Exercícios

nível 1

**61.** Leia as afirmações com atenção:
(01) A 1ª Lei da Termodinâmica pode ser traduzida pela seguinte afirmação: "A energia não pode ser criada nem destruída, mas somente transformada de um tipo em outro".
(02) O calor flui espontaneamente de um corpo mais frio para um corpo mais quente.
(04) A energia interna de dada massa de um gás perfeito não depende da temperatura do gás.
(08) O rendimento de uma máquina de Carnot independe das temperaturas da fonte fria e da fonte quente.
(16) É impossível transformar calor em trabalho utilizando apenas duas fontes de calor a temperaturas diferentes.
(32) O termômetro é um aparelho destinado a medir diretamente o calor de um corpo.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

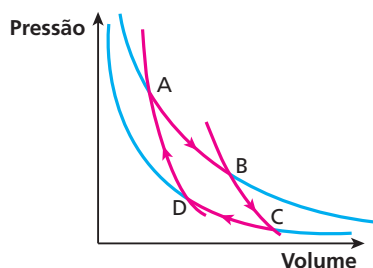
**62.** No século XIX, o jovem engenheiro francês Nicolas L. Sadi Carnot publicou um pequeno livro – *Reflexões sobre a potência motriz do fogo e sobre os meios adequados de desenvolvê-la* –, no qual descrevia e analisava uma máquina ideal e imaginária, que realizaria uma transformação cíclica hoje conhecida como "ciclo de Carnot" e de fundamental importância para a Termodinâmica.
Indique a(s) proposição(ões) correta(s) a respeito do ciclo de Carnot:
(01) Uma máquina térmica, operando segundo o ciclo de Carnot entre uma fonte quente e uma fonte fria, apresenta um rendimento igual a 100%, isto é, todo o calor a ela fornecido é transformado em trabalho.

(02) Nenhuma máquina térmica que opere entre duas determinadas fontes, às temperaturas $T_1$ e $T_2$, pode ter maior rendimento do que uma máquina de Carnot operando entre essas mesmas fontes.
(04) O ciclo de Carnot consiste em duas transformações adiabáticas, alternadas com duas transformações isotérmicas.
(08) O rendimento da máquina de Carnot depende apenas das temperaturas da fonte quente e da fonte fria.
(16) Por ser ideal e imaginária, a máquina proposta por Carnot contraria a segunda lei da Termodinâmica.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**63.** (Vunesp-SP) O ciclo de Carnot, de importância fundamental na Termodinâmica, é constituído de um conjunto de transformações definidas. Num diagrama (p, V), você esboçaria esse ciclo usando:

a) uma isotérmica, uma isobárica, uma adiabática e uma isocórica (isovolumétrica).
b) duas isotérmicas e duas adiabáticas.
c) duas isobáricas e duas isocóricas (isovolumétricas).
d) duas isobáricas e duas isotérmicas.
e) uma isocórica (isovolumétrica), uma isotérmica e uma isobárica.

**64.** (UEL-PR) No gráfico abaixo está representada a evolução de um gás ideal segundo o ciclo de Carnot.

Com relação ao comportamento do gás, é correto afirmar:

a) A temperatura no ponto **A** é maior que no ponto **B**.
b) No trajeto BC, o gás cedeu calor para a fonte fria.
c) No trajeto DA, o trabalho realizado é negativo.
d) A temperatura no ponto **C** é maior que no ponto **B**.
e) No trajeto CD, o gás recebeu calor.

**65. E.R.** Uma máquina térmica teórica opera entre duas fontes térmicas, executando o ciclo de Carnot. A fonte fria encontra-se a 127 °C e a fonte quente, a 427 °C. Qual o rendimento percentual dessa máquina?

**Resolução:**

O rendimento de uma máquina que executa o ciclo de Carnot é dado por:

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

em que $T_A$ é a temperatura absoluta da fonte quente e $T_B$, a da fonte fria.

Sendo:

$$T_B = 127\ °C = 400\ K$$
$$T_A = 427\ °C = 700\ K$$

Substituindo na expressão, obtemos:

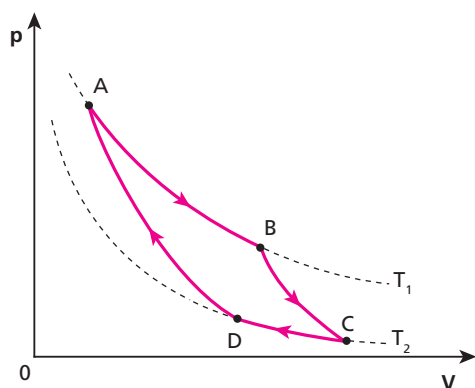
$$\eta = 1 - \frac{400}{700} \Rightarrow \eta = \frac{3}{7} \cong 0{,}43$$

$$\boxed{\eta(\%) \cong 43\%}$$

**66.** Uma máquina térmica, teórica, opera entre duas fontes de calor, executando o ciclo de Carnot. A fonte fria encontra-se à temperatura de 6 °C e a fonte quente, a 347 °C. Qual é o maior rendimento teórico dessa máquina?

**67.** Na leitura de uma revista técnica, um aluno encontrou um artigo que descrevia uma máquina térmica utilizada em uma empresa. Essa máquina operava entre duas fontes térmicas de temperaturas 327 °C e 27 °C, realizando um trabalho equivalente a 200 J, a cada 1 000 J recebidos da fonte quente. Como ele estava estudando na escola a parte de Termodinâmica, calculou o rendimento dessa máquina e achou um pouco baixo. Lembrou-se da máquina de Carnot e calculou o novo rendimento que ela teria se pudesse funcionar segundo o ciclo de Carnot. Percentualmente, qual o novo rendimento (teórico)?

## Exercícios — nível 2

**68.** (UFBA) A figura representa o ciclo de Carnot, para um gás ideal.

Nessas condições, é correto afirmar que:

(01) na compressão adiabática, a energia interna do gás diminui.
(02) na expansão isotérmica, o gás recebe calor de uma das fontes.
(04) na expansão adiabática, a temperatura do gás diminui.
(08) na compressão isotérmica, a energia interna do gás diminui.
(16) na transformação cíclica, o gás atinge o equilíbrio térmico com a fonte quente, antes de iniciar novo ciclo.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**69.** Até 1824, acreditava-se que uma máquina térmica poderia atingir o rendimento de 100% ou algo próximo desse valor. Se isso fosse verdade, poderíamos transformar integralmente, ou quase, a energia térmica recebida pela máquina em trabalho. No entanto, um jovem engenheiro francês, Nicolas Léonard Sadi Carnot, demonstrou a impossibilidade desse rendimento.

Ele propôs uma máquina térmica teórica, que foi chamada de ideal e funcionaria percorrendo um ciclo particular, depois denominado **ciclo de Carnot**, constituído de duas isotermas e duas adiabáticas, intercaladas. Esse dispositivo obedeceria a dois postulados estabelecidos pelo próprio Carnot:

| 1º postulado<br>Nenhuma máquina operando entre duas temperaturas fixadas pode ter rendimento maior que a máquina ideal de Carnot, operando entre essas mesmas temperaturas. |
|---|

| 2º postulado<br>Ao operar entre duas temperaturas, a máquina ideal de Carnot tem o mesmo rendimento, qualquer que seja o fluido operante. |
|---|

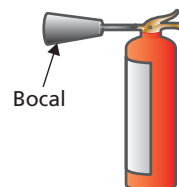
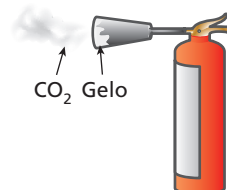
Assim, imagine uma máquina térmica que funciona de acordo com os postulados de Carnot. Em cada ciclo desenvolvido, o trabalho útil fornecido equivale a 2 000 joules. As temperaturas das fontes térmicas são 500 K e 300 K, respectivamente, fonte quente e fonte fria.
Determine:
a) o rendimento dessa máquina;
b) a quantidade de calor retirada da fonte quente;
c) a quantidade de calor rejeitada para a fonte fria.

**70.**

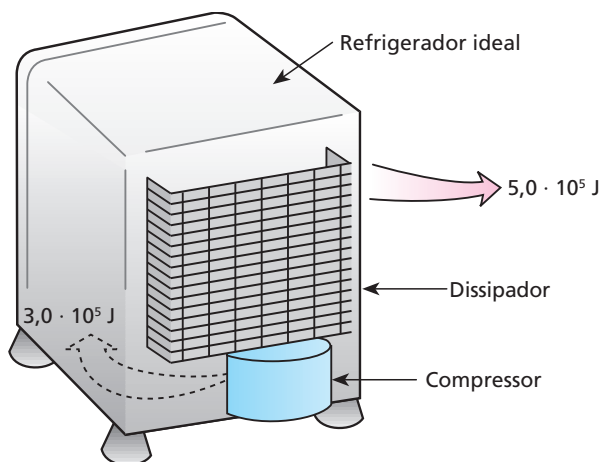
O dispositivo acima é a famosa eolípila, inventada no século primeiro por Heron de Alexandria, considerada a primeira máquina a vapor.
As máquinas a vapor começaram a ser utilizadas, com algum sucesso, no século XVII, apesar de sua história ter começado com Heron, cerca de 100 d.C. Desde então, várias máquinas a vapor de diferentes modelos se destacaram pela produtividade e diversidade de uso. O estudo das máquinas térmicas chamou a atenção dos físicos para uma série de transformações que nunca ocorrem, embora não violem a lei da conservação da energia. Essas "proibições" deram origem à segunda lei da Termodinâmica.
Em uma biblioteca, foi encontrado um livro do final do século XVII, em péssimo estado de conservação. Após a verificação da parte que se podia ler, foram feitas adaptações para a realidade das unidades físicas de hoje. Na página 56, podia-se observar o projeto de uma máquina térmica a vapor que retirava o equivalente a 7 000 J de energia da fonte quente, que se encontrava a uma temperatura de 127 °C, e eram rejeitados 5 250 J para a fonte fria. A temperatura dessa fonte fria estava ilegível. Supondo-se que essa máquina funcionasse como uma máquina de Carnot, o seu rendimento e a temperatura da fonte fria seriam, respectivamente, iguais a:
a) 5% e 47 °C
b) 10% e −27 °C
c) 25% e 27 °C
d) 50% e 77 °C
e) 75% e 27 °C

**71.** (Puccamp-SP) A turbina de um avião tem rendimento de 80% do rendimento de uma máquina ideal de Carnot operando às mesmas temperaturas.
Em voo de cruzeiro, a turbina retira calor da fonte quente a 127 °C e ejeta gases para a atmosfera, que está a –33 °C.
O rendimento dessa turbina é de:
a) 80%. b) 64%. c) 50%. d) 40%. e) 32%.

**72.** (PUC-SP)
a) Um inventor afirmou ter construído uma máquina térmica cujo desempenho atinge 90% daquele de uma máquina de Carnot. Sua máquina, que trabalha entre as temperaturas de 27 °C e 327 °C, recebe, durante certo período, $1,2 \cdot 10^4$ cal e fornece, simultaneamente, um trabalho útil de $1 \cdot 10^4$ J. A afirmação do inventor é verdadeira? Justifique.
**Dado:** 1 cal = 4,186 J
b) Se o trabalho útil da máquina térmica do item anterior fosse exercido sobre o êmbolo móvel de uma ampola contendo um gás ideal, à pressão de 200 Pa, qual seria a variação de volume sofrida pelo gás, caso a transformação fosse isobárica?

**73.** (Ufscar-SP) Importante para o combate a incêndios de categorias **B** e **C**, o extintor de $CO_2$ é nada mais que um recipiente resistente à pressão interna, capaz de armazenar gás $CO_2$ na forma líquida.

Uma alavanca em forma de gatilho expõe o conteúdo do extintor à pressão atmosférica e o $CO_2$ é violentamente expelido pelo bocal, na forma de gás.

Durante sua utilização, verifica-se o surgimento de cristais de gelo sobre o plástico do bocal, resultante da condensação e rápida solidificação da umidade do ar ambiente.
a) Em termos da Termodinâmica, dê o nome da transformação sofrida pelo $CO_2$ ao passar pelo bocal e descreva o processo que associa o uso do extintor com a queda de temperatura ocorrida no bocal.
b) O que deveria ser garantido para que um gás ideal realizasse o mesmo tipo de transformação, num processo bastante lento?

**74.** Uma geladeira retira, por segundo, 1000 kcal do congelador, enviando para o ambiente 1200 kcal. Considere 1 kcal = 4,2 kJ. Qual a potência do compressor da geladeira?

**75.** (UFV-MG) Em um refrigerador ideal, o dissipador de calor (serpentina traseira) transferiu $5{,}0 \cdot 10^5$ J de energia térmica para o meio ambiente, enquanto o compressor produziu $3{,}0 \cdot 10^5$ J de trabalho sobre o fluido refrigerante.

Calcule:
a) a quantidade de calor retirada da câmara interna;
b) o rendimento do sistema de refrigeração.

**76.** (Unifesp-SP) Costuma-se especificar os motores dos automóveis com valores numéricos, 1.0, 1.6, 1.8 e 2.0, entre outros. Esses números indicam também valores crescentes da potência do motor. Pode-se explicar essa relação direta entre a potência do motor e esses valores numéricos porque eles indicam o volume aproximado, em litros,
a) de cada cilindro do motor e, quanto maior esse volume, maior a potência que o combustível pode fornecer.
b) do consumo de combustível e, quanto maior esse volume, maior a quantidade de calor que o combustível pode fornecer.
c) de cada cilindro do motor e, quanto maior esse volume, maior a temperatura que o combustível pode atingir.
d) do consumo de combustível e, quanto maior esse volume, maior a temperatura que o combustível pode fornecer.
e) de cada cilindro do motor e, quanto maior esse volume, maior o rendimento do motor.

**77.** (UFRN) Em um processo adiabático, a pressão **p** e o volume **V** de um gás ideal obedecem à relação $p\,V^{\gamma}$ = constante, em que **γ** é um parâmetro fixo. Considere que uma amostra de gás ideal sofreu uma expansão adiabática na qual o seu volume foi duplicado. A razão entre a temperatura inicial $T_I$ e a temperatura final $T_F$ da amostra é:
a) $T_I/T_F = 2^{\gamma}$.
b) $T_I/T_F = 2^{1-\gamma}$.
c) $T_I/T_F = \gamma$.
d) $T_I/T_F = 2^{\gamma-1}$.
e) $T_I/T_F = \gamma^2$.

**78.** (ITA-SP) Uma bolha de gás metano com volume de 10 cm³ é formada a 30 m de profundidade num lago. Suponha que o metano comporta-se como um gás ideal de calor específico molar $C_V = 3R$ e considere a pressão atmosférica igual a $10^5$ N/m². Supondo que a bolha não troque calor com a água ao seu redor, determine seu volume quando ela atinge a superfície.
**Dados:** densidade da água = $1 \cdot 10^3$ kg/m³
$g = 10$ m/s²
$\sqrt{2} \cong 1{,}4$

**79. E.R.** Determine a variação da entropia (ΔS) de um sistema constituído de 200 g de gelo, a 0 °C, quando essa amostra sofre fusão.
**Dado:** calor latente de fusão do gelo = $336\ \frac{J}{g}$

**Resolução:**

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mL_F}{T}$$

$$\Delta S = \frac{200 \cdot 336}{(0 + 273)}\ \frac{J}{K}$$

$$\boxed{\Delta S \cong 246\ \frac{J}{K}}$$

**80.** (ITA-SP) Calcule a variação de entropia (ΔS) quando, num processo à pressão constante de 1,0 atm, se transformam integralmente em vapor 3,0 kg de água que se encontram inicialmente no estado líquido, à temperaura de 100 °C.
**Dado:** calor de vaporização da água = $5{,}4 \cdot 10^5$ cal/kg

**81.** Num recipiente de capacidade térmica desprezível e termicamente isolado, são misturados 100 g de água a 10 °C com 200 g de água a 40 °C.
**Dado:** calor específico da água = 1 cal/g °C
Pede-se determinar a variação de entropia (ΔS) ocorrida nesse sistema, na transformação termodinâmica, do início da mistura até o equilíbrio térmico final.

## Descubra mais

**1.** Como funcionam os motores de combustão interna, de quatro tempos, utilizados nos automóveis?

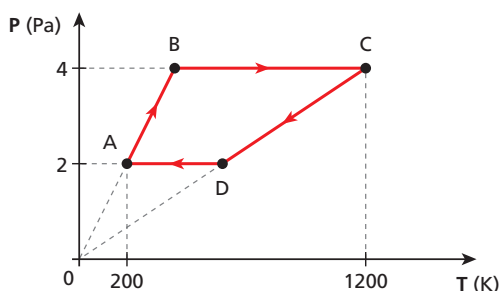
**2.** Por que as geladeiras tipo *frost free* não precisam ser descongeladas? Por que elas não possuem a grade trocadora de calor em sua parte traseira?

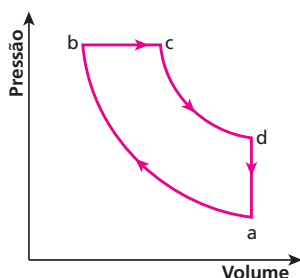
## Exercícios

nível 3

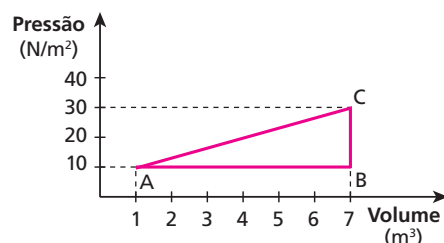
**82.** (UnB-DF) Quanto aos processos sofridos por gases ideais entre dois estados, julgue os itens a seguir:

a) Num processo isotérmico, há troca de calor com o meio exterior.
b) Num processo adiabático, não há transferência de calor para o meio exterior.
c) Um processo adiabático é um processo lento, em que a variação de energia do gás é igual ao trabalho realizado sobre este.
d) Um processo isotérmico é um processo lento, no qual há variação na energia interna do gás.
e) Num processo isotérmico, a energia cinética média das moléculas é a mesma nos estados inicial e final.
f) Num processo isotérmico de compressão de um gás, a pressão exercida sobre as paredes do recipiente que contém o gás aumentará.
g) Num processo adiabático, a variação de energia do gás é nula.
h) A temperatura do gás no estado final depende do processo seguido e da natureza do gás.

**83.** Uma determinada amostra de gás monoatômico, que se comporta como um gás ideal, desenvolve sucessivas transformações retornando à sua situação inicial, percorrendo o ciclo termodinâmico representado no diagrama a seguir.

Sabendo-se que o volume inicial do gás era 1,0 $m^3$, determinar o trabalho realizado ao completar um ciclo.

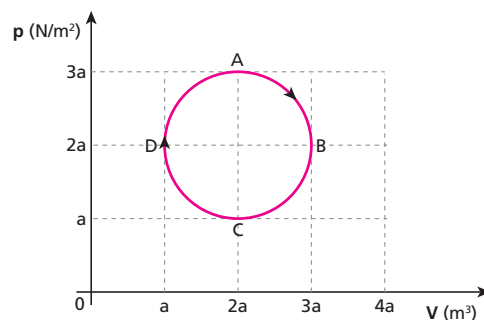
**84.** (UFC-CE) O ciclo *diesel*, mostrado na figura abaixo, representa o comportamento aproximado de um motor *diesel*. A substância de trabalho desse motor pode ser considerada um gás ideal. O processo a $\rightarrow$ b é uma compressão adiabática, o processo b $\rightarrow$ c é uma expansão a pressão constante, o processo c $\rightarrow$ d é uma expansão adiabática e o processo d $\rightarrow$ a é um resfriamento a volume constante.

Com relação a esses processos, a opção correta é:

a) No processo a $\rightarrow$ b a energia interna do sistema não varia.
b) No processo b $\rightarrow$ c a energia interna do sistema diminui.
c) No processo c $\rightarrow$ d a energia interna do sistema diminui.
d) No processo d $\rightarrow$ a a energia interna do sistema aumenta.
e) No ciclo completo a variação da energia interna é positiva.

**85.** (UFMS) Um sistema termodinâmico é levado do estado termodinâmico **A** até outro **B** (ver figura a seguir) e depois trazido de volta ao estado **A** através do estado **C**.

Logo, é correto afirmar que:

(01) o trabalho executado pelo sistema termodinâmico na mudança do estado **B** para o estado **C** é um trabalho não nulo.
(02) supondo que o aumento da energia interna para o percurso do estado termodinâmico **A** para o **C** seja 200 J, a variação da energia interna do percurso do estado termodinâmico **A** para o **B**, e deste para o estado **C**, também sofre um aumento de 200 J.
(04) a variação da energia interna de um sistema termodinâmico depende dos estados termodinâmicos intermediários e não somente dos estados inicial e final.
(08) o trabalho executado pelo sistema termodinâmico no percurso entre os estados de **A** para **B**, e deste para **C**, é de 60 J.
(16) supondo que o aumento da energia interna para o percurso do estado termodinâmico **A** para o **C** seja 200 J, o calor absorvido pelo sistema termodinâmico no percurso do estado termodinâmico **A** para o estado **B**, e deste para **C**, é também de 200 J.
(32) o trabalho executado pelo sistema termodinâmico no ciclo fechado passando pelos estados **A – B – C – A** é de –60 J.
(64) considerando o diagrama apresentado, podemos afirmar que esse diagrama, independentemente da sucessão dos estados **A – B – C – A** ou **A – C – B – A** percorridos pelo sistema termodinâmico, pode representar exclusivamente a sucessão de estados termodinâmicos de uma máquina térmica (motor).

Dê como resposta a soma dos números associados às alternativas corretas.

**86.** (Unip-SP) O gráfico a seguir representa a pressão em função do volume para 1 mol de um gás perfeito.

O gás percorre o ciclo ABCDA, que tem a forma de uma circunferência.

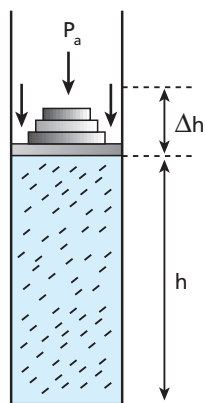
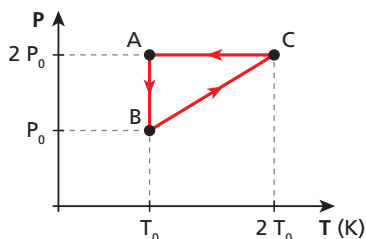
Indique a opção **falsa**.

a) As temperaturas nos estados **A** e **B** são iguais.
b) As temperaturas nos estados **C** e **D** são iguais.

c) O trabalho realizado pelo gás, entre os estados **A** e **C**, é $\frac{4\pi\, a^2}{2}$ joules.
d) O trabalho realizado no ciclo vale ($\pi\, a^2$) joules.
e) Na transformação de **A** para **B**, o gás recebeu uma quantidade de calor de $\left(2+\frac{\pi}{4}\right)a^2$ joules.

**87.** (UFSCar-SP) Mantendo uma estreita abertura em sua boca, assopre com vigor sua mão agora! Viu? Você produziu uma transformação adiabática! Nela, o ar que você expeliu sofreu uma violenta expansão, durante a qual:
a) o trabalho realizado correspondeu à diminuição da energia interna desse ar, por não ocorrer troca de calor com o meio externo.
b) o trabalho realizado correspondeu ao aumento da energia interna desse ar, por não ocorrer troca de calor com o meio externo.
c) o trabalho realizado correspondeu ao aumento da quantidade de calor trocado por esse ar com o meio, por não ocorrer variação da sua energia interna.
d) não houve realização de trabalho, uma vez que o ar não absorveu calor do meio e não sofreu variação de energia interna.
e) não houve realização de trabalho, uma vez que o ar não cedeu calor para o meio e não sofreu variação de energia interna.

**88.** (Ufla-MG) A figura mostra, em corte, um cilindro de paredes adiabáticas (não há troca de calor), provido de um êmbolo superior móvel. No interior do cilindro, encontram-se **n** mols de um gás ideal. A pressão atmosférica $P_a$ local é de 1 atm e a pressão dos pesos sobre o êmbolo móvel é de 5 atm. A área da base do cilindro e do êmbolo móvel é de $5 \cdot 10^{-3}\ m^2$. Na condição de equilíbrio mostrada, h = 16 cm e a temperatura do gás é 300 K.

Considerando 1 atm = $1{,}0 \cdot 10^5\ N/m^2$ e R = 8 J/mol K, calcule:
a) o número de mols (**n**) contido no cilindro;
b) a força em newtons que o gás realiza sobre o êmbolo móvel.
Em seguida, a temperatura do gás é elevada para 420 K, mantendo-se a pressão constante.
Calcule:
c) o deslocamento $\Delta h$ (cm) do êmbolo móvel;
d) o trabalho realizado pelo gás, em joules.

**89.** (IF-UFRJ) Um mol de um gás ideal de capacidade térmica molar a volume constante $C_V = \frac{3R}{2}$ (onde **R** é a constante universal dos gases), descreve o ciclo ABCA esquematizado na figura abaixo no plano (P, T). Sejam $U_X$ a energia interna do gás no estado X, $W_{X \to Y}$ o trabalho realizado pelo gás no processo $X \to Y$ e $Q_{X \to Y}$ o calor fornecido ao gás no processo $X \to Y$.

Marque a afirmativa correta.
(a) O processo **AB** é isotérmico e $Q_{A \to B} = 0$.
(b) O processo **BC** é isovolumétrico e $Q_{B \to C} = \frac{3}{2}\, R\, T_0$.
(c) $W_{B \to C} > 0$ e $V_C = 2V_A$.
(d) $W_{A \to B} < 0$ e $\Delta U$ no ciclo é nulo.

**90.** (Cesgranrio-RJ) Um cafezinho bem quente, se deixado em cima da mesa, cederá calor para o meio ambiente ao seu redor, até que sua temperatura se iguale à do meio. Nesse processo, há diminuição da temperatura do cafezinho a volume constante, permanecendo sempre constante a temperatura do meio. Este é um exemplo de um processo irreversível onde há uma direção temporal permitida pelas Leis da Termodinâmica. A respeito da variação total de entropia nesse processo, é correto afirmar que a entropia:
a) aumenta, considerando o café mais o ambiente, por se tratar de processo irreversível.
b) aumenta no início do processo, tendendo a se estabilizar e a permanecer constante.
c) se mantém constante, sem que se observe qualquer variação nesse caso.
d) diminui, considerando o café mais o ambiente, por se tratar de processo irreversível.
e) diminui, por se tratar de um caso especial.

**91.** Duas salas idênticas estão separadas por uma divisória de espessura L = 5,0 cm, área A = 100 $m^2$ e condutividade térmica k = 2,0 W/m K. O ar contido em cada sala encontra-se, inicialmente, às temperaturas $T_1$ = 47 °C e $T_2$ = 27 °C, respectivamente. Considerando o ar como um gás ideal e o conjunto das duas salas um sistema isolado, calcule a taxa de variação de entropia, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, no sistema no início da troca de calor, explicando o que ocorre com a desordem do sistema.

**92.** Em 1865, Rudolf Clausius usou pela primeira vez o conceito de **entropia** como sendo uma medida de desordem do sistema físico estudado. Ele estabeleceu a variação de entropia ($\Delta S$) de um sistema, quando se agrega uma quantidade de calor (**Q**), mediante um processo reversível a uma temperatura absoluta (**T**), como sendo a razão:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

Assim, considere um sistema constituído de 3,0 kg de água líquida a 100 °C. Mantendo-se a pressão constante em 1,0 atm, calcule a variação de entropia do sistema para transformar essa água em vapor, a 100 °C.
**Dado:** calor de vaporização da água = 540 cal/g

**93.** Numa transformação adiabática reversível, 20 g de um gás ideal evoluem de um estado em que a temperatura vale 77 °C para outro em que a temperatura vale 327 °C. Sendo $c_V = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ cal/g °C e $c_p = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ cal/g °C, qual o trabalho realizado nessa transformação, em joules?
**Dado:** 1 cal = 4,2 J

**94.** (UEM-PR) A temperatura de 500 g de um gás perfeito é aumentada de 20 °C para 140 °C. Se o processo é feito primeiramente a pressão e depois a volume constantes, qual o trabalho realizado pelo gás, em calorias? (Considere para o gás perfeito $c_V$ = 0,18 cal/g °C e $c_p$ = 0,25 cal/g °C.)

**95.** (SEPLAG) As primeiras máquinas térmicas, inventadas no século XVIII, além de bastante precárias, apresentavam rendimentos muito baixos, isto é, consumiam grande quantidade de combustível para produzir trabalho relativamente pequeno.
Por volta de 1770, o inventor escocês James Watt apresentou um novo modelo de máquina térmica, que veio substituir aquelas então existentes. A máquina de Watt foi inicialmente empregada para movimentar moinhos e acionar as bombas que retiravam água de minas subterrâneas e, posteriormente, nas locomotivas e barcos a vapor.
Acerca desse tema, assinale a afirmativa **incorreta**.

a) O cálculo da eficiência térmica ($\varepsilon$) pela expressão $\varepsilon = 1 - \frac{T_F}{T_Q}$, em que $T_F$ é a temperatura da fonte fria e $T_Q$ é a temperatura da fonte quente, aplica-se a qualquer tipo de máquina.
b) O enunciado de Clausius afirma ser impossível um processo cujo único resultado efetivo seja o de retirar calor de um reservatório frio e liberar a mesma quantidade de calor para um reservatório quente.
c) Se, durante cada ciclo, uma máquina térmica absorve 200 J de calor de um reservatório quente, realiza trabalho e libera 160 J para reservatório frio, então o rendimento dessa máquina é de 20%.
d) O teorema de Carnot afirma que nenhuma máquina, trabalhando entre dois reservatórios térmicos, pode ser mais eficiente do que uma máquina reversível que trabalhe entre os dois reservatórios.
e) É impossível para uma máquina térmica, operando em um ciclo, produzir como único efeito o de retirar calor de um único reservatório e realizar uma quantidade equivalente de trabalho.

**96.** (UFC-CE) A eficiência de uma máquina de Carnot que opera entre a fonte de temperatura alta ($T_1$) e a fonte de temperatura baixa ($T_2$) é dada pela expressão

$$\eta = 1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right),$$

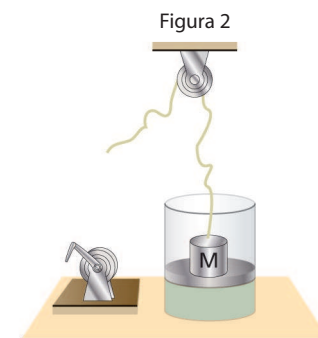
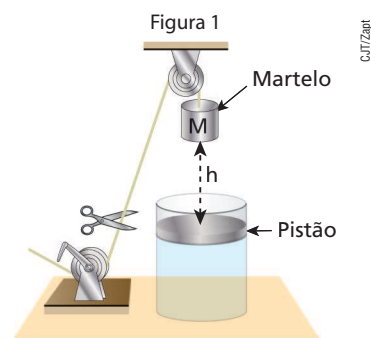
em que $T_1$ e $T_2$ são medidas na escala absoluta ou de Kelvin.
Suponha que você disponha de uma máquina dessas com uma eficiência $\eta = 30\%$. Se você dobrar o valor da temperatura da fonte quente, a eficiência da máquina passará a ser igual a:

a) 40%. b) 45%. c) 50%. d) 60%. e) 65%.

**97.** (Unicamp-SP) Com a instalação do gasoduto Brasil–Bolívia, a quota de participação do gás natural na geração de energia elétrica no Brasil será significativamente ampliada. Ao se queimar 1,0 kg de gás natural obtêm-se $5{,}0 \cdot 10^7$ J de calor, parte do qual pode ser convertido em trabalho em uma usina termoelétrica. Considere uma usina queimando 7200 quilogramas de gás natural por hora, a uma temperatura de 1227 °C. O calor não aproveitado na produção de trabalho é cedido para um rio de vazão 5000 L/s, cujas águas estão inicialmente a 27 °C. A maior eficiência teórica da conversão de calor em trabalho é dada por $\eta = 1 - \frac{T_{mín}}{T_{máx}}$, sendo $T_{máx}$ e $T_{mín}$ as temperaturas absolutas das fontes quente e fria respectivamente, ambas expressas em Kelvin. Considere o calor específico da água $c = 4\,000$ J/kg °C.

a) Determine a potência gerada por uma usina cuja eficiência é metade da máxima teórica.
b) Determine o aumento de temperatura da água do rio ao passar pela usina.

**98.** (Vunesp-SP) Num lugar onde $g = 9{,}8$ m/s², um corpo metálico de massa $m = 2{,}0$ kg cai de 209 m de altura. Supondo que todo o calor produzido no impacto permaneça no corpo, e sabendo que sua temperatura se elevou em 10 °C, qual é, aproximadamente, o calor específico do material do corpo, em cal/g °C?
**Dado:** 1 cal = 4,18 J

**99.** (UFRN) A Figura 1, abaixo, representa o martelo de massa **M**, de um bate-estaca, suspenso por um cabo a uma altura **h**, em relação à superfície superior do êmbolo de um pistão. Em determinado instante, o cabo é cortado, e o martelo cai livremente sobre o pistão. Com o impacto, o êmbolo do pistão comprime adiabaticamente 2 mol de um gás ideal contidos no interior do pistão, conforme Figura 2, também abaixo.

**Dados:**
- expressão da 1ª Lei da Termodinâmica: $\Delta U = Q - W$;
- expressão da variação da energia interna:

$$\Delta U = \left(\frac{3}{2}\right) n R \Delta T.$$

**Considere:**
- aceleração da gravidade: $g = 10$ m/s²;
- massa do martelo do bate-estaca: $M = 5{,}0$ kg;
- altura à qual está suspenso o martelo: $h = 6{,}0$ m;
- constante universal dos gases ideais: $R = 8{,}0$ Joule/mol · K;
- o pistão e o respectivo êmbolo são constituídos de material isolante térmico.

A partir dessas informações,

a) descreva as transformações de energia que ocorreram no sistema, considerando a evolução deste, desde o momento em que o martelo é solto até o instante em que o êmbolo atinge a sua posição final de equilíbrio;
b) calcule a variação de temperatura, $\Delta T$, do gás, supondo que, no instante em que o martelo atinge o êmbolo, 80% da energia deste é usada para comprimir o gás.

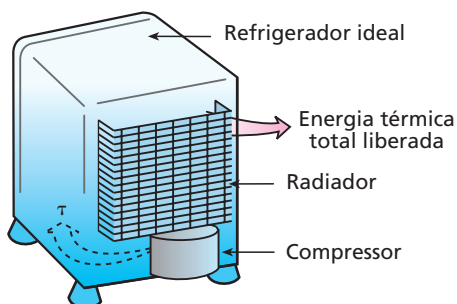
## Para raciocinar um pouco mais

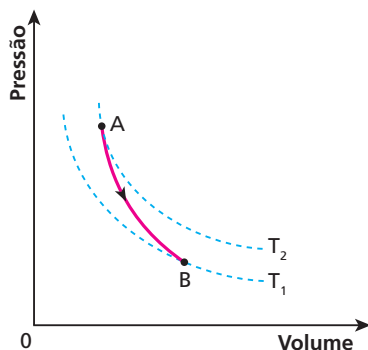
**100.** Um dos aparelhos indispensáveis em uma residência é a geladeira. A refrigeração do seu interior é feita de forma não espontânea. Retira-se energia térmica da parte interna e transfere-se essa energia para o ambiente da cozinha. A transferência de energia térmica só é espontânea quando o calor transita no sentido de temperaturas decrescentes.

Na parte interna da geladeira, há o congelador, no qual, normalmente, a substância fréon se vaporiza a baixa pressão, absorvendo energia térmica. O fréon, no estado gasoso, expande-se até o radiador (serpentina traseira), no qual, sob alta pressão, se condensa, liberando energia térmica para o meio externo. A pressão do fréon é aumentada no radiador devido a um compressor e diminuída no congelador devido a uma válvula.

A eficiência **ε** de uma geladeira é determinada pela razão entre a energia térmica **Q** que é retirada do seu congelador e o trabalho **τ** que o compressor teve de realizar.

$$\varepsilon = \frac{Q}{\tau}$$

A energia térmica que o radiador transfere para o ambiente é a soma da energia térmica retirada do congelador com o trabalho realizado pelo compressor.
O desenho representa uma geladeira doméstica:

Considere uma geladeira ideal cujo compressor tenha potência útil igual a 5,0 kW.
Se, durante cada minuto de funcionamento desse compressor, o radiador (serpentina traseira) transfere para o meio ambiente $4,5 \cdot 10^5$ J de energia térmica, a eficiência do refrigerador é igual a:
a) 33%. b) 50%. c) 67%. d) 75%. e) 100%.

**101.** O gráfico mostra uma expansão adiabática de 1 mol de gás ideal monoatômico, entre as isotermas $T_2 = 127$ °C e $T_1 = 27$ °C. Para a constante universal dos gases perfeitos **R**, use o valor 2 cal/mol K. Sabe-se ainda que o calor específico molar a pressão constante desse gás vale 5 cal/mol K.

Determine:
a) o trabalho realizado pelo gás durante a expansão adiabática;
b) o valor do expoente de Poisson (γ);
c) o valor do calor específico molar a volume constante do gás.

**102.** (UFF-RJ) Considere 4 mols de um gás ideal, inicialmente a 2 °C de temperatura e 8,20 atm de pressão, que se submete ao seguinte ciclo de transformações:
1ª) compressão isotérmica, cedendo 860 J de calor, até o volume de 10 L;
2ª) aquecimento isobárico até a temperatura de 57 °C;
3ª) despressurização isovolumétrica até a pressão de 8,20 atm;
4ª) resfriamento isobárico até retornar às condições iniciais.
a) Represente este ciclo, em um gráfico **p** (atm) × **V** (L), indicando os valores de **p**, **V** e **T** ao final de cada uma das transformações dadas anteriormente.
b) Calcule o trabalho realizado pelo gás no ciclo, em joules.
c) Calcule o calor absorvido pelo gás no ciclo, em joules.
d) Calcule a potência, em watts, de um motor que realiza 10 desses ciclos por segundo.

**Dados:** R (constante dos gases) = 0,082 atm L/mol K;
1 atm = $10^5$ Pa;
0 °C = 273 K.

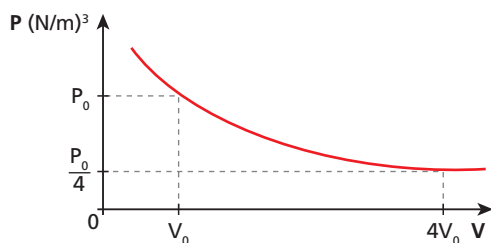
**103.** (Olimpíada Brasileira de Física) Certa quantidade de gás Hélio, inicialmente no estado **A**, em que a pressão e o volume valem $P_A = 32 \cdot 10^5$ N/m² e $V_A = 1$ m³, sofre o processo A → B → C. O processo A → B é isobárico e B → C é adiabático.
Considere o gás ideal e que, para o Hélio, $C_V = \frac{3R}{2}$ e $C_p = \frac{5R}{2}$ são os calores específicos molares a volume e a presssão constantes, respectivamente.
a) Construa o diagrama PV, sabendo que o volume do gás no estado **B** é $V_B = 2$ m³ e a pressão no estado **C** é $P_C = 1 \cdot 10^5$ N/m².
b) Quanto trabalho foi realizado pelo gás na expansão A → C?
c) Qual a variação na energia interna do gás de A → C?

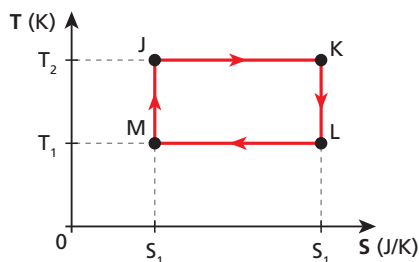
Observação: Num processo adiabático, o trabalho realizado (ou recebido) pelo gás entre os estados 1 → 2 é dado por: $\Delta\tau = \frac{1}{1-\gamma}(P_2V_2 - P_1V_1)$, onde $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ é o fator de Poisson.

**104.** (Olimpíada Brasileira de Física) Imagine que o seguinte processo termodinâmico ocorra espontaneamente: uma sala de aula, fechada e isolada termicamente do ambiente externo, encontra-se inicialmente a uma temperatura $T_0$, pressão $p_0$ e contém ar homogeneamente distribuído por todo o seu volume $V_0$. De repente, as moléculas constituintes do ar deslocam-se, sem realização de trabalho, passando a ocupar apenas uma pequena parte, $V_f = \frac{V_0}{1000}$, do volume total da sala. A pressão final do ar não é conhecida. Considere que o ar da sala é constituído por **n** mols de um gás ideal.
a) Calcule a temperatura final do ar da sala de aula.
b) Calcule a variação da entropia total do ar da sala e do ambiente, considerando que o processo mencionado tenha ocorrido de forma irreversível. Com base em sua resposta, a existência desse processo é possível? Explique.

[**Dado:** A variação de entropia de **n** mols de um gás ideal durante um processo isotérmico reversível com volumes inicial e final respectivamente iguais a $V_i$ e $V_f$ é dada aproximadamente por $\Delta S = 2{,}3\ n\ R\ \log_{10} \frac{V_f}{V_i}$ ,em que **R** é a constante universal dos gases.]

**105.** Em um recipiente de capacidade térmica desprezível e termicamente isolado, são misturados 100 g de água a 10 °C com 200 g de água a 40 °C.
**Dado:** calor específico da água = 1 cal/g °C.
Pede-se determinar a variação de entropia ($\Delta S$) ocorrida nesse sistema, na transformação termodinâmica, do início da mistura até o equilíbrio térmico final.

**106.** (Cesgranrio-RJ) Em uma expansão isotérmica, o volume de gás aumenta quatro vezes e a energia interna não varia, sendo o trabalho realizado pelo gás igual ao calor recebido.

Considerando o gráfico acima, qual a variação de entropia de um mol de um gás ideal, numa expansão isotérmica ($T = C^{te}$) reversível entre os estados inicial e final?
**Dado:** R = 8,31 J/mol · K, ln 4 = 1,4

**107.** (ITA-SP) Uma máquina térmica opera segundo o ciclo **JKLMJ** mostrado no diagrama T-S da figura.

Pode-se afirmar que:

a) processo JK corresponde a uma compressão isotérmica.
b) o trabalho realizado pela máquina em um ciclo é $W = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1)$.
c) o rendimento da máquina é dado por $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.
d) durante o processo LM uma quantidade de calor $Q_{LM} = T_1 (S_2 - S_1)$ é absorvida pelo sistema.
e) outra máquina térmica que opere entre $T_2$ e $T_1$ poderia eventualmente possuir um rendimento maior que a desta.

**108.** (ITA-SP) Considerando um buraco negro como um sistema termodinâmico, sua energia interna **U** varia com a sua massa **M** de acordo com a famosa relação de Einstein: $\Delta U = \Delta M\ c^2$. Stephen Hawking propôs que a entropia **S** de um buraco negro depende apenas de sua massa e de algumas constantes fundamentais da natureza. Dessa forma, sabe-se que uma variação de massa acarreta uma variação de entropia dada por: $\frac{\Delta S}{\Delta M} = 8\pi\ GM \frac{k_B}{h\ c}$. Supondo que não haja realização de trabalho com a variação de massa, indique a alternativa que melhor representa a temperatura absoluta **T** do buraco negro.

a) $T = h\ c^3 / GM\ k_B$
b) $T = 8\pi M\ c^2 / k_B$
c) $T = M\ c^2 / 8\pi\ k_B$
d) $T = h\ c^3 / 8\pi\ GM\ k_B$
e) $T = 8\pi\ h\ c^3 / GM\ k_B$

**109.** (IME-RJ) Um soldado em pé sobre um lago congelado (sem atrito) atira horizontalmente com uma bazuca. A massa total do soldado e da bazuca é 100 kg e a massa do projétil é 1 kg.
Considerando que a bazuca seja uma máquina térmica com rendimento de 5% e que o calor fornecido a ela no instante do disparo é 100 kJ, a velocidade de recuo do soldado é, em m/s,

a) 0,1
b) 0,5
c) 1,0
d) 10,0
e) 100,0

# Tópico 6

# Dilatação térmica dos sólidos e dos líquidos

## Bloco 1

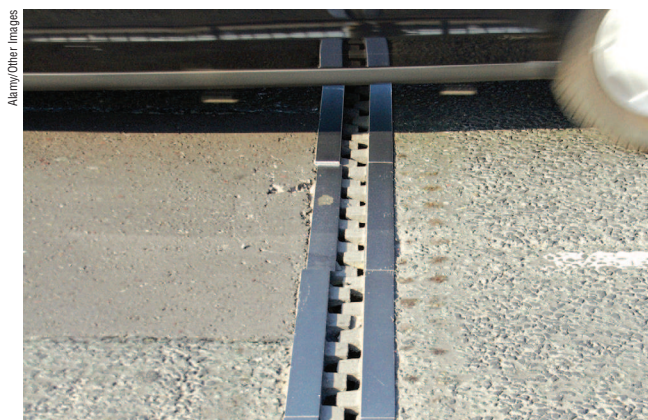
### 1. Introdução

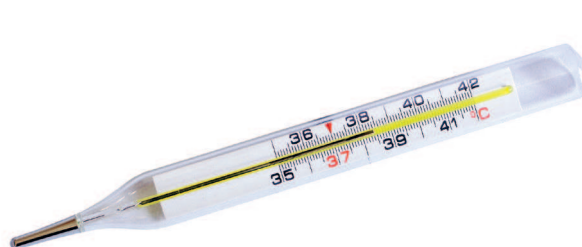
No seu dia a dia, você pode observar que:

- entre trilhos consecutivos de uma estrada de ferro existe um espaçamento;

Yogesh S. More/Grupo Keystone

- nas pontes e nos viadutos, de construção não muito antiga, há fendas de dilatação para possibilitar a expansão da estrutura, evitando assim o aparecimento de trincas;

Alamy/Other Images

- quando se mede a temperatura de uma pessoa, o nível de mercúrio do termômetro varia;

Thinkstock/Getty Images

- nas quadras de esportes que ficam ao ar livre, recebendo radiação solar, o piso é feito em blocos quadrados separados por um material elástico, que possibilita a dilatação do concreto, para que não ocorram trincas.

Thales Trigo

Situações como essas são explicadas pela **dilatação térmica**.

No Tópico 1, a temperatura foi relacionada com o estado de agitação das partículas de um corpo. Um estado de agitação maior indica uma temperatura maior. Assim, ao aquecermos um corpo, aumentamos a agitação de suas partículas e, consequentemente, sua temperatura.

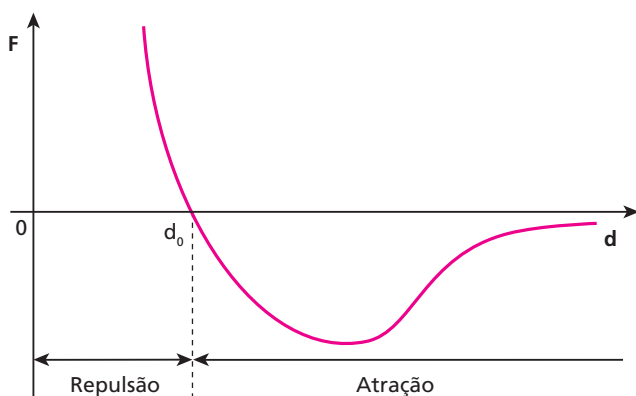
De modo geral, o aumento na temperatura de um corpo provoca um aumento nas suas dimensões, fenômeno denominado **dilatação térmica**. Uma diminuição de temperatura produz, em geral, uma diminuição nas dimensões do corpo, uma **contração térmica**.

Nos sólidos, observamos que o aumento ou a diminuição da temperatura provoca variações em suas dimensões lineares, bem como nas dimensões superficiais e volumétricas. No estudo da dilatação térmica dos sólidos, faremos uma separação em três partes: dilatação linear, dilatação superficial e dilatação volumétrica.

Para os líquidos, estudaremos apenas a dilatação volumétrica.

## 2. Forças intermoleculares explicando a dilatação térmica

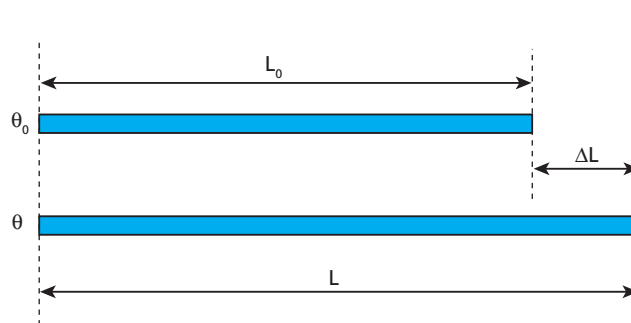
Quando um corpo é aquecido, suas moléculas passam a apresentar um movimento de agitação mais vigoroso. Nesse movimento, as moléculas conseguem afastar-se mais, mas também conseguem aproximar-se mais.

Será, então, que esse maior afastamento e essa maior aproximação não se compensam, de modo a não alterar as dimensões do corpo? Não! Para entender isso, recordemos como a intensidade das forças intermoleculares varia em função da distância entre as moléculas.

É bom lembrar que $\mathbf{d_0}$ é a distância que separa as moléculas na posição de equilíbrio.

Observemos, no gráfico, que o módulo da força de repulsão, na aproximação, cresce mais depressa que o módulo da força de atração no afastamento. Consequentemente, a aproximação é mais dificultada que o afastamento. A ausência de simetria no gráfico mostra que ocorre um aumento da distância média entre as moléculas e a consequente dilatação térmica.

## 3. Dilatação linear dos sólidos

Para o estudo da dilatação linear dos sólidos, consideremos um fio metálico com comprimento $\mathbf{L_0}$ quando a uma temperatura $\theta_0$. Aquecendo esse fio até uma temperatura $\boldsymbol{\theta}$ ($\theta > \theta_0$), observamos que seu comprimento passa a ser **L** ($L > L_0$).

É fácil compreender que, sendo o fio homogêneo, cada unidade de seu comprimento deve sofrer a mesma dilatação por unidade de variação de temperatura. Em outras palavras, todos os “centímetros” do fio devem sofrer os mesmos aumentos de comprimento, quando aquecidos igualmente.

Do exposto, podemos concluir que a variação total de comprimento $\Delta L$ sofrida pelo fio é diretamente proporcional ao seu comprimento inicial $L_0$. Se um fio de 10 metros, ao ser aquecido, aumenta 1 centímetro em seu comprimento, outro de mesmo material, com 20 metros, deve aumentar 2 centímetros ao sofrer a mesma variação de temperatura do primeiro.

É evidente, também, que as partículas se afastam de acordo com a variação de temperatura, isto é, para um maior aquecimento, obtém-se uma maior dilatação. Assim, $\Delta L$ é também diretamente proporcional à variação de temperatura $\Delta\theta$ sofrida pelo sólido (aproximadamente).

Vale, portanto, a relação:

$$\Delta L = L_0 \, \alpha \, \Delta\theta$$

em que $\alpha$ é a “constante” de proporcionalidade, denominada **coeficiente de dilatação linear**. O valor de $\boldsymbol{\alpha}$ é uma característica do material e, na prática, não

é rigorosamente constante, dependendo da pressão, de eventuais tratamentos térmicos e mecânicos e, principalmente, da temperatura. Entretanto, costuma-se usar o valor médio de $\alpha$ entre as temperaturas inicial e final consideradas.

A unidade de $\alpha$ é o inverso da unidade de temperatura, como $°C^{-1}$, $°F^{-1}$ e $K^{-1}$, por exemplo. Tal conclusão é tirada da relação obtida anteriormente:

$$\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta\theta$$

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta\theta}$$

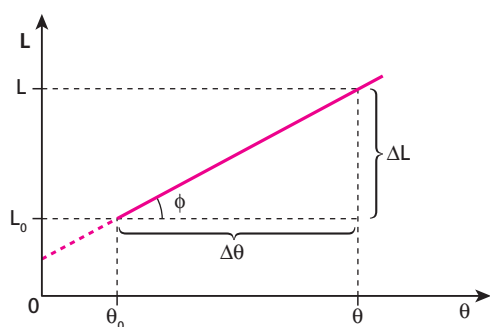
Basta, agora, simplificar as unidades de comprimento relativas a $\Delta L$ e a $L_0$ para obter a unidade de $\alpha$.

É importante observar que o coeficiente de dilatação linear médio é uma característica da substância e indica sua dilatação média por unidade de comprimento, quando sofre a variação de uma unidade na temperatura.

Lembrando que $\Delta L = L - L_0$, podemos obter a expressão de **L** em função de $\Delta\theta$:

$$\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta\theta$$
$$L - L_0 = L_0\, \alpha\, \Delta\theta$$
$$L = L_0 + L_0\, \alpha\, \Delta\theta$$

$$L = L_0(1 + \alpha\, \Delta\theta)$$

A representação gráfica do comprimento **L** em função da temperatura **θ** está feita abaixo.

$$\text{tg}\ \phi = \frac{\Delta L}{\Delta\theta} = L_0\alpha$$

Observemos que o gráfico é um segmento de reta oblíquo (função do 1º grau) que não passa pela origem, já que $L_0$ é diferente de zero.

**Notas:**

- O ângulo $\phi$ de inclinação do gráfico está diretamente relacionado ao produto $L_0\, \alpha$, sendo que $\phi$ será tanto maior quanto maior for o produto $L_0\, \alpha$. De fato, como $\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta\theta$, para um mesmo $\Delta\theta$, $\Delta L$ será tanto maior quanto maior for $L_0\, \alpha$. Consequentemente, também será maior o ângulo $\phi$.
- Um material é considerado **isótropo** em relação à dilatação térmica quando seu coeficiente de dilatação linear é o mesmo em qualquer direção. O vidro, por exemplo, é isótropo. Assim, se um cubo de vidro for aquecido de modo que em todos os seus pontos ocorra a mesma variação de temperatura, ele se dilatará mantendo sua forma cúbica.
- Quando o coeficiente de dilatação linear ($\alpha$) de um material for diferente em diferentes direções, esse material será considerado **anisótropo** em relação à dilatação térmica.
- Salvo declaração em contrário, admitiremos todos os materiais isótropos na dilatação.

A tabela a seguir fornece os coeficientes de dilatação linear ($\alpha$) de alguns sólidos:

| Substância | $\alpha$ em $°C^{-1}$ |
|---|---|
| Zinco | $26 \cdot 10^{-6}$ |
| Alumínio | $24 \cdot 10^{-6}$ |
| Latão | $20 \cdot 10^{-6}$ |
| Prata | $19 \cdot 10^{-6}$ |
| Bronze | $18 \cdot 10^{-6}$ |
| Cobre | $16 \cdot 10^{-6}$ |
| Ouro | $14 \cdot 10^{-6}$ |
| Ferro | $13 \cdot 10^{-6}$ |
| Concreto | $12 \cdot 10^{-6}$ |
| Platina | $9 \cdot 10^{-6}$ |
| Vidro comum | $8 \cdot 10^{-6}$ |
| Vidro pirex | $4 \cdot 10^{-6}$ |
| Porcelana | $3 \cdot 10^{-6}$ |
| *Invar** | $1 \cdot 10^{-6}$ |

* Liga de níquel e ferro. *Invar* é redução do francês *invariable* (invariável), por causa de seu baixo coeficiente de dilatação térmica.

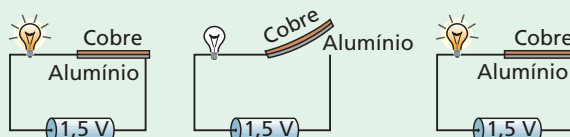
# Leitura

## Lâminas bimetálicas

Você já deve ter visto uma árvore de Natal enfeitada com muitas lâmpadas pisca-pisca. Também já deve ter notado que de tempos em tempos a geladeira se desliga automaticamente, voltando a funcionar após alguns minutos.

Nessas duas situações, é uma lâmina bimetálica que liga e desliga os circuitos elétricos.

A lâmina bimetálica é constituída de duas lâminas de materiais diferentes, "coladas" uma à outra, que inicialmente possuem comprimentos iguais. Quando a corrente elétrica passa pela lâmina bimetálica, ela se aquece, o que provoca dilatações diferentes nos metais. Por exemplo, se usássemos alumínio ($\alpha = 24 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$) em uma das faces e cobre ($\alpha = 16 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$) na outra, teríamos uma dilatação maior para o alumínio. A lâmina iria se encurvar, e o alumínio ficaria na face convexa. Isso seria suficiente para interromper a corrente elétrica, apagando as lâmpadas ou desligando a geladeira.

Após algum tempo, a lâmina esfria, diminuindo de tamanho devido à contração térmica. O metal que se dilata mais ao ser aquecido é aquele que se contrai mais ao ser esfriado. Ao voltar ao comprimento inicial, a lâmina fecha o circuito, que volta a ser percorrido por corrente elétrica, até que um novo aquecimento provoque curvatura na lâmina.

# Faça você mesmo

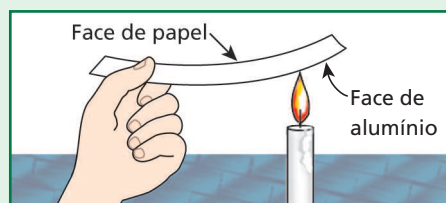
Pegue uma folha que tenha uma face de alumínio e outra de papel. Folhas como essa você encontra em algumas embalagens de bombons. Recorte uma tira retangular e alise-a de modo a ficar razoavelmente plana.

Segurando com um prendedor de roupa a tira horizontalmente **com a face de alumínio voltada para baixo**, aproxime-a da chama de uma vela com cuidado.

Você observará a tira se encurvar, voltando a concavidade para cima.

Qual a explicação para esse comportamento?

O coeficiente de dilatação do alumínio é bem maior que o do papel. Assim, como no início o comprimento da face de papel é igual ao da face de alumínio, para o mesmo aquecimento, o alumínio sofre dilatação maior, e a tira se encurva.

Observe que, após a dilatação, a face de alumínio fica ligeiramente mais comprida que a do papel na tira encurvada.

## Exercícios

nível 1

**1.** Griselda, uma dona de casa, resolveu fazer uma salada para o jantar com seu marido. Ao tentar abrir o vidro de palmito, que tem tampa metálica, não conseguiu. Porém, lembrando-se de suas aulas de Física do Ensino Médio, mergulhou a tampa da embalagem em água quente durante alguns segundos. Ao tentar novamente abrir a tampa observou que a mesma se soltou facilmente. Isso provavelmente ocorreu porque:

a) reduziu-se a força de coesão entre as moléculas do metal e do vidro.
b) reduziu-se a pressão do ar no interior do recipiente.
c) houve redução da tensão superficial existente entre o vidro e o metal.
d) o coeficiente de dilatação do metal é maior que o do vidro.
e) o coeficiente de dilatação do vidro é maior que o do metal.

**2. E.R.** Uma barra de cobre, homogênea e uniforme, mede 20 m, a 0 °C. Calcule a variação do comprimento dessa barra, em milímetros, quando aquecida a 50 °C.
**Dado:** coeficiente de dilatação linear do cobre = $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$

**Resolução:**
Usando a **equação da dilatação linear**, temos:

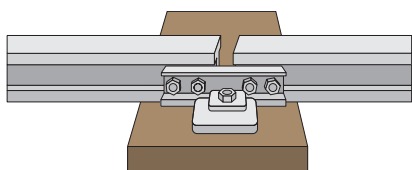
$$\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta\theta$$

Substituindo os valores fornecidos, vem:

$$\Delta L = 20 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot (50 - 0)$$

$$\boxed{\Delta L = 0{,}016 \text{ m} = 16 \text{ mm}}$$

**3.** Uma régua de alumínio tem comprimento de 200,0 cm a 20 °C. Qual o valor, em centímetros, do seu comprimento a 60 °C?
**Dado:** coeficiente de dilatação linear do alumínio = $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ K$^{-1}$

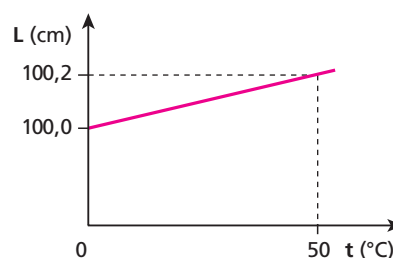
**4.** A primeira ferrovia a funcionar no Brasil foi inaugurada em abril de 1854, ligando o Porto de Mauá a Fragoso, no Rio de Janeiro, com 14,5 km de extensão, construída pelo Visconde de Mauá.
Um dos cuidados que se deve ter na colocação dos trilhos em uma ferrovia é deixar uma pequena distância entre dois deles para possibilitar a dilatação térmica que pode ocorrer com a variação de temperatura.

Normalmente os trilhos utilizados possuem 20 m de comprimento. Em sua fixação sobre dormentes, uma distância de 5 mm é deixada entre as peças consecutivas, são as juntas de dilatação que evitam que os trilhos se espremam em dias muito quentes. Considerando um local em que a temperatura varia aproximadamente 25 °C entre a mínima no período da noite e a máxima durante o dia, determine o valor do coeficiente de dilatação linear do material dos trilhos, supondo que o espaço deixado é exatamente o necessário.

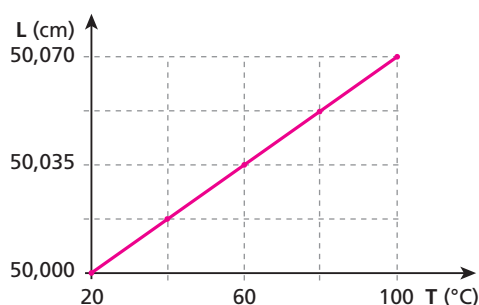
**5.** Uma barra metálica, inicialmente à temperatura de 20 °C, é aquecida até 260 °C e sofre uma dilatação igual a 0,6% de seu comprimento inicial. Qual o coeficiente de dilatação linear médio do metal nesse intervalo de temperatura?

**6.** Um fio de cobre, com 1,000 m de comprimento a 20 °C, foi colocado em um forno, dilatando-se até atingir 1 012 mm. Qual é a temperatura do forno, suposta constante?
**Dado:** coeficiente de dilatação linear do cobre = $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$

**7.** (FEI-SP) Um dispositivo que aciona a refrigeração do ambiente é composto de uma barra metálica de 5,0 cm engastada em uma extremidade, e a outra extremidade está a 0,5 mm do contato quando a temperatura é 20 °C. Sabendo-se que o coeficiente de dilatação linear da barra é $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$ °C$^{-1}$ e desprezando-se a dilatação do contato, em qual temperatura o dispositivo irá acionar o sistema?

a) 22,5 °C  b) 25,0 °C  c) 25,5 °C  d) 27,5 °C  e) 30,0 °C

**8.** A figura abaixo representa o comprimento de uma barra metálica em função de sua temperatura.

Qual o valor do coeficiente de dilatação linear do material dessa barra?

**9.** (Unilasalle) Em uma experiência para medir o coeficiente de dilatação linear médio de um pedaço de metal desconhecido, obteve-se o seguinte gráfico do comprimento em função da temperatura:

Abaixo segue uma tabela com os coeficientes de dilatação linear média, $\alpha$, para alguns metais:

| Metal | $\alpha$ (°C$^{-1}$) |
|---|---|
| Aço | $11 \cdot 10^{-6}$ |
| Ouro | $14{,}3 \cdot 10^{-6}$ |
| Cobre | $17{,}0 \cdot 10^{-6}$ |
| Alumínio | $23{,}0 \cdot 10^{-6}$ |
| Chumbo | $29{,}0 \cdot 10^{-6}$ |

Calculando-se o coeficiente de dilatação linear $\alpha$ a partir dos dados experimentais (gráfico), inferimos que o metal em questão se trata provavelmente do:

a) chumbo;
b) alumínio;
c) cobre;
d) ouro;
e) aço.

## Exercícios — nível 2

**10.** (Olimpíada Paulista de Física) É muito comum acontecer, quando copos iguais são empilhados, colocando-se um dentro do outro, de dois deles ficarem emperrados, tornando-se difícil separá-los. Considerando o efeito da dilatação térmica, pode-se afirmar que é possível retirar um copo de dentro do outro se:

a) os copos emperrados forem mergulhados em água bem quente.
b) no copo interno for despejada água quente e o copo externo for mergulhado em água bem fria.
c) os copos emperrados forem mergulhados em água bem fria.
d) no copo interno for despejada água fria e o copo externo for mergulhado em água bem quente.
e) não é possível separar os dois copos emperrados considerando o efeito da dilatação térmica.

**11. E.R.** Uma trena de alumínio foi graduada corretamente a uma temperatura de 30 °C, quando seu comprimento total apresentou 50,000 m. Essa trena possui graduação até o milímetro. Qual a máxima distância que a trena é capaz de medir, num local onde a temperatura ambiente é −20 °C?
**Dado:** coeficiente de dilatação linear do alumínio = $24 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$

**Resolução:**

Chamemos de $u_0$ a unidade em metros na temperatura a que a trena foi graduada e de **u** a unidade, também em metros, a uma temperatura qualquer.

Observemos que, se elevarmos a temperatura da trena, ela se dilatará e $u > u_0$; porém, se diminuirmos a temperatura, a trena se contrairá e $u < u_0$.

Usando a expressão da dilatação linear:

$$u = u_0(1 + \alpha\Delta\theta)$$

e sendo $u_0$ a unidade correta (seu valor é 1,000 m), temos:

$$u = 1{,}000 \cdot [1 + 24 \cdot 10^{-6}\,(-50)]$$
$$u = 1{,}000 \cdot [1 - 0{,}0012]$$
$$u = 0{,}9988 \text{ m}$$

À temperatura de −20 °C, devido à contração do alumínio, a distância entre duas marcas, que a 30 °C era 1,000 m, passa a ser 0,9988 m. Como a trena possui 50 intervalos de metro, podemos afirmar que a máxima distância possível de ser medida com essa trena, a −20 °C, é:

$$Z = 50u = 50 \cdot 0{,}9988 \Rightarrow \boxed{Z = 49{,}94 \text{ m}}$$

**12.** Uma trena de aço foi graduada corretamente, com precisão, a 0 °C, possuindo comprimento total de 20,000 m. Em um dia muito quente, sob Sol intenso, ela se aquece a 40 °C, sendo utilizada para fazer medidas.
Coeficiente de dilatação linear do aço = $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$
Determinar:

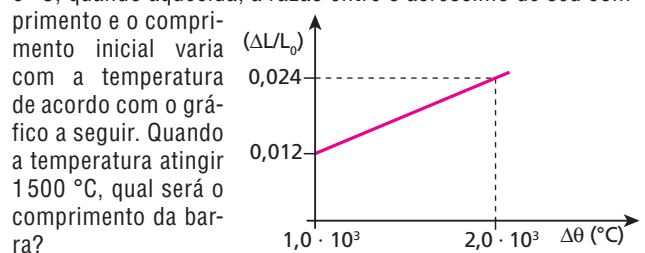
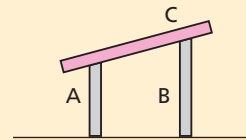
a) A dilatação sofrida pela trena no referido aquecimento.
b) O erro percentual cometido em sua utilização a 40 °C.

**13.** Sabendo que o coeficiente de dilatação linear médio do concreto é $12 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$, estime a variação anual da altura de um prédio de 10 andares em uma cidade do litoral de São Paulo, uma região temperada, devido à variação de temperatura entre o inverno e o verão.

**14.** Kevin, um engenheiro americano, foi convidado para projetar sobre um rio uma ponte metálica com 2,0 km de comprimento. Nessa região, a amplitude anual de temperaturas vai de aproximadamente −40 °F até 110 °F. O coeficiente de dilatação linear do material da ponte é $12 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$. Considerando os efeitos de contração e expansão térmica do metal da ponte, qual a máxima variação esperada em sua extensão?

**15.** (Mack-SP) A 20 °C, o comprimento de uma haste **A** é 99% do comprimento de outra haste **B**, à mesma temperatura. Os materiais das hastes **A** e **B** têm alto ponto de fusão e coeficientes de dilatação linear respectivamente iguais a $\alpha_A = 10 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$ e $\alpha_B = 9{,}1 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$.
A temperatura em que as hastes terão o mesmo comprimento será:

a) 970 °C
b) 1 120 °C
c) 1 270 °C
d) 1 770 °C
e) 1 830 °C

**16.** (UFBA-BA) Uma barra tem 100,0 cm de comprimento, a 0 °C; quando aquecida, a razão entre o acréscimo de seu comprimento e o comprimento inicial varia com a temperatura de acordo com o gráfico a seguir. Quando a temperatura atingir 1 500 °C, qual será o comprimento da barra?

**17. E.R.** (FEI-SP) As barras **A** e **B** da figura têm, respectivamente, 1 000 mm e 1 001 mm de comprimento a 20 °C. Seus coeficientes de dilatação linear são:
$\alpha_A = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$ e $\alpha_B = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$.

Qual é a temperatura em que a barra **C** ficará na posição horizontal?

**Resolução:**

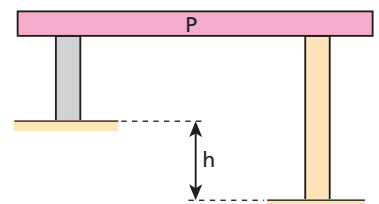
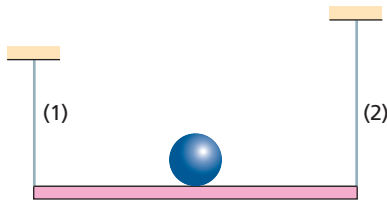
Quando a barra **C** estiver na horizontal, os comprimentos das barras **A** e **B** serão iguais:

$$L_A = L_B$$

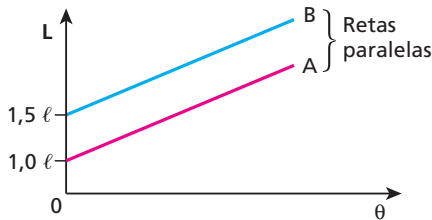
Como: $L = L_0\,(1 + \alpha\,\Delta\theta)$,
temos: $L_{0_A}\,(1 + \alpha_A\,\Delta\theta) = L_{0_B}\,(1 + \alpha_B\,\Delta\theta)$

$$1000 \cdot (1 + 3{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta\theta) = 1001 \cdot (1 + 1{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta\theta)$$
$$1000 + 3000 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta\theta = 1001 + 1001 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta\theta$$
$$1999 \cdot 10^{-5}\,\Delta\theta = 1$$
$$\Delta\theta \cong 50 \text{ °C}$$
$$\theta - 20 \cong 50 \Rightarrow \boxed{\theta \cong 70 \text{ °C}}$$

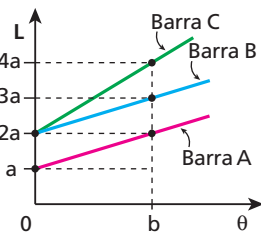
**18.** Uma plataforma **P** foi apoiada em duas colunas, conforme a figura ao lado:
Devido a um desnível do terreno, para manter a plataforma sempre na horizontal a qualquer temperatura, foi preciso fazer uma das colunas de concreto e a outra de ferro.

Qual o valor do desnível **h**, sabendo-se que a maior coluna é de concreto e mede 7,8 m a 0 °C?
**Dados:** $\alpha_{concreto} = 12 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$; $\alpha_{ferro} = 13 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$.

**19.** A figura mostra uma pequena esfera em repouso sobre a barra horizontal, sustentada por dois fios metálicos de materiais diferentes 1 e 2, de comprimentos desiguais $L_1$ e $L_2$, a 0 °C.

Sendo $\alpha_1$ e $\alpha_2$ os respectivos coeficientes de dilatação lineares dos fios (1) e (2), qual das relações a seguir representa a condição para que a bola continue equilibrada sobre a barra, ao variar a temperatura?

a) $\alpha_1 = \alpha_2$
b) $\alpha_1 L_1 = \alpha_2 L_2$
c) $\alpha_1 L_2 = \alpha_2 L_1$
d) $L_1 L_2 = \alpha_1 \alpha_2$
e) $L_2 = L_1 \alpha_1 \alpha_2$

**20.** Estão representados, a seguir, os comprimentos de duas barras **A** e **B** em função da temperatura:

Determine a razão entre os coeficientes de dilatação linear dessas barras.

**21.** Considere três barras metálicas homogêneas **A**, **B** e **C**. O gráfico ao lado representa o comprimento das barras em função da temperatura.
Os coeficientes de dilatação linear das barras **A**, **B** e **C** valem, respectivamente, $\alpha_A$, $\alpha_B$ e $\alpha_C$.
A relação entre $\alpha_A$, $\alpha_B$ e $\alpha_C$ é:

a) $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C$.
b) $\alpha_A = \alpha_B = \dfrac{\alpha_C}{2}$.
c) $\alpha_A = \alpha_B = 2\alpha_C$.
d) $\alpha_A = \alpha_C = 2\alpha_B$.
e) $\alpha_A = \alpha_C = \dfrac{\alpha_B}{2}$.

**22. E.R.** Duas barras **A** e **B**, de coeficientes de dilatação linear $\alpha_A$ e $\alpha_B$ e comprimentos $L_A$ e $L_B$, são emendadas de modo que constitua uma única barra de comprimento $(L_A + L_B)$. Qual é o coeficiente de dilatação linear dessa nova barra?

**Resolução:**
O coeficiente de dilatação linear de uma barra é dado pela expressão:

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta\theta}$$

Em um aquecimento $\Delta\theta$ qualquer, temos:

$$\Delta L_A = L_A\, \alpha_A\, \Delta\theta$$

$$\Delta L_B = L_B\, \alpha_B\, \Delta\theta$$

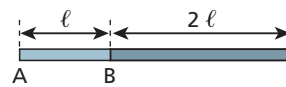
$$\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta\theta$$

Portanto:

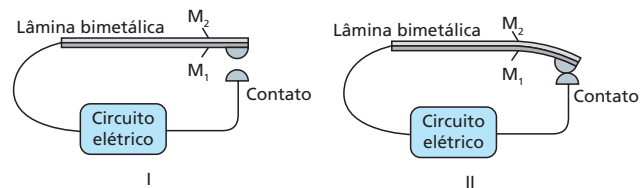
$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta\theta} = \frac{\Delta L_A + \Delta L_B}{(L_A + L_B)\Delta\theta} = \frac{L_A\alpha_A\Delta\theta + L_B\alpha_B\Delta\theta}{(L_A + L_B)\Delta\theta}$$

$$\alpha = \frac{L_A\alpha_A + L_B\alpha_B}{L_A + L_B}$$

Observemos que o coeficiente de dilatação linear dessa nova barra é a média ponderada dos coeficientes de dilatação linear das barras **A** e **B**, sendo os "pesos" os respectivos comprimentos iniciais.

**23.** (UEL-PR) A barra da figura é composta de dois segmentos: um de comprimento $\ell$ e coeficiente de dilatação linear $\alpha_A$ e outro de comprimento $2\,\ell$ e coeficiente de dilatação linear $\alpha_B$. Pode-se afirmar que o coeficiente de dilatação linear dessa barra, **α**, é igual a:

a) $\dfrac{\alpha_A + \alpha_B}{2}$.
b) $\dfrac{2\alpha_A + \alpha_B}{3}$.
c) $\dfrac{\alpha_A + 2\alpha_B}{3}$.
d) $\alpha_A + 2\alpha_B$.
e) $3(\alpha_A + \alpha_B)$.

**24.** Três bastões de mesmo comprimento $\ell$, um de alumínio ($\alpha_{Al} = 24 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$), outro de latão ($\alpha_{latão} = 20 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$) e o terceiro de cobre ($\alpha_{Cu} = 16 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$), são emendados de modo que constituam um único bastão de comprimento $3\,\ell$. Determine o coeficiente de dilatação linear do bastão resultante.

**25.** (UFMG) Uma lâmina bimetálica é constituída de duas placas de materiais diferentes, $M_1$ e $M_2$, presas uma à outra. Essa lâmina pode ser utilizada como interruptor térmico para ligar ou desligar um circuito elétrico, como representado, esquematicamente, na figura I:
Quando a temperatura das placas aumenta, elas dilatam-se e a lâmina curva-se, fechando o circuito elétrico, como mostrado na figura II.

Esta tabela mostra o coeficiente de dilatação linear **α** de diferentes materiais:

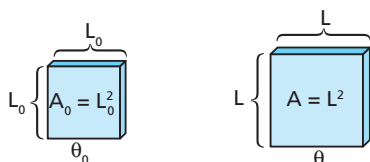
| Material | α ($10^{-6} \cdot °C^{-1}$) |
|---|---|
| Aço | 11 |
| Alumínio | 24 |
| Bronze | 19 |
| Cobre | 17 |
| Níquel | 13 |

Considere que o material $M_1$ é cobre e o outro, $M_2$, deve ser escolhido entre os listados nessa tabela.
Para que o circuito seja ligado com o menor aumento de temperatura, o material da lâmina $M_2$ deve ser o:

a) aço. b) alumínio. c) bronze. d) níquel.

# Bloco 2

## 4. Dilatação superficial dos sólidos

Para facilitar o estudo da dilatação superficial dos sólidos, vamos considerar uma placa metálica de forma quadrada, com lado $L_0$, a uma temperatura $\theta_0$ e de material cujo coeficiente de dilatação linear vale $\alpha$.

Aquecendo-se a placa até uma temperatura $\theta$ ($\theta > \theta_0$), o aumento de suas dimensões lineares produz um aumento na área de sua superfície, que, no entanto, permanece quadrada.

No início, a área da placa é dada por:

$$A_0 = L_0^2 \qquad \text{(I)}$$

Após o aquecimento, tornou-se:

$$A = L^2 \qquad \text{(II)}$$

Mas podemos relacionar **L** e $L_0$ por:

$$L = L_0(1 + \alpha\,\Delta\theta)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação, temos:

$$L^2 = L_0^2(1 + \alpha\,\Delta\theta)^2 \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$A = A_0(1 + \alpha\,\Delta\theta)^2$$

que, desenvolvendo, fica na forma:

$$A = A_0(1 + 2\alpha\,\Delta\theta + \alpha^2\,\Delta\theta^2)$$

Como a ordem de grandeza de $\alpha$ é $10^{-5}$, ao ser elevado ao quadrado teremos $10^{-10}$, que é desprezível se comparado com $10^{-5}$, pois é cem mil vezes menor que $10^{-5}$. É bom lembrar que $\Delta\theta$ em geral não ultrapassa a ordem de $10^3$ °C, com o corpo ainda no estado sólido. Portanto, o termo $\alpha^2\,\Delta\theta^2$ é desprezível em comparação com $2\alpha\,\Delta\theta$.

Assim, a equação da dilatação superficial assume a forma aproximada:

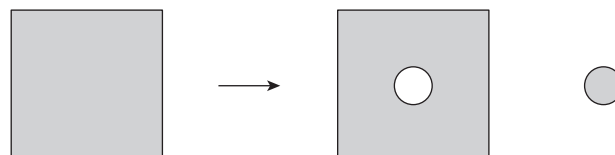
$$A = A_0(1 + 2\alpha\,\Delta\theta)$$

Fazendo-se $2\alpha = \beta$, que chamaremos de **coeficiente de dilatação superficial** do material, segue que:

$$A = A_0(1 + \beta\,\Delta\theta) \quad \text{ou} \quad \Delta A = A_0\,\beta\,\Delta\theta$$

Essa equação pode ser usada para a dilatação superficial, mesmo que a superfície em questão não seja quadrada, podendo ser retangular, circular ou de qualquer outra forma.

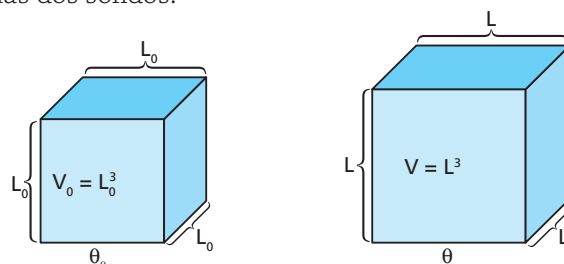
### Como se comportam os buracos em uma dilatação?

Imagine uma placa metálica, quadrada, de zinco, por exemplo, material usado para a confecção de calhas de uma residência. Com uma tesoura adequada vamos cortar uma parte, no meio dessa placa.

Vamos agora colocar as duas partes no interior de um forno preaquecido. Depois de alguns minutos, usando luvas térmicas apropriadas, tentaremos encaixar no orifício a parte que foi retirada. O que será que vai acontecer? É claro que a parte que foi retirada encaixará certinho no orifício da placa. Isso ocorre porque, na placa, o aquecimento provocará uma dilatação “para fora”, isto é, tudo se passa como se o buraco estivesse preenchido do material da placa. Assim, o pedaço retirado irá se dilatar e o buraco também e, a qualquer temperatura que se aqueça o conjunto, placa e pedaço retirado, o encaixe ocorrerá.

Do exposto acima podemos concluir que, no aquecimento, os orifícios encontrados em placas ou blocos aumentarão de tamanho e, no resfriamento, diminuirão de tamanho. Tudo acontecendo como se a placa ou o bloco tivessem os buracos preenchidos do mesmo material existente ao seu redor.

Nos cálculos para se determinar comprimentos, larguras, áreas ou volumes de buracos, usaremos as equações da dilatação e iremos considerar o coeficiente de dilatação do material do corpo que forma o buraco.

## 5. Dilatação volumétrica dos sólidos

Também aqui, para facilitar o entendimento, consideraremos um sólido de forma particular: um cubo. Depois, generalizaremos para as demais formas dos sólidos.

Assim, vamos considerar um cubo metálico de aresta $L_0$, à temperatura $\theta_0$ e feito de um material de coeficiente de dilatação linear igual a $\alpha$.

Aquecendo-se esse cubo até uma temperatura $\theta$ ($\theta > \theta_0$), o aumento das suas dimensões lineares provoca, também, um aumento no seu volume. No entanto, o sólido continua com forma cúbica.

No início, o volume do cubo é dado por:

$$V_0 = L_0^3 \qquad \text{(I)}$$

Após o aquecimento, passa a ser **V**, tal que:

$$V = L^3 \qquad \text{(II)}$$

Elevando os dois membros da equação da dilatação linear ao cubo, temos:

$$L^3 = L_0^3\,(1 + \alpha\,\Delta\theta)^3 \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), vem:

$$V = V_0(1 + \alpha\,\Delta\theta)^3$$

Desenvolvendo o binômio, temos:

$$V = V_0(1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \alpha\,\Delta\theta + 3 \cdot 1 \cdot \alpha^2\,\Delta\theta^2 + \alpha^3\,\Delta\theta^3)$$

Pelo já exposto no item anterior, $3\alpha^2\,\Delta\theta^2$ e $\alpha^3\,\Delta\theta^3$ são desprezíveis em comparação com $3\alpha\,\Delta\theta$. Assim, a relação passa a ter a forma aproximada:

$$V = V_0(1 + 3\alpha\,\Delta\theta)$$

Fazendo-se $3\alpha = \gamma$, que chamaremos de **coeficiente de dilatação volumétrica** ou **cúbica** do material, obtemos as expressões:

$$V = V_0(1 + \gamma\,\Delta\theta) \quad \text{ou} \quad \Delta V = V_0\,\gamma\,\Delta\theta$$

A relação entre os coeficientes de dilatação é dada por:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3}$$

Da mesma forma que na dilatação superficial, a equação da dilatação volumétrica é válida para todos os sólidos, quaisquer que sejam suas formas.

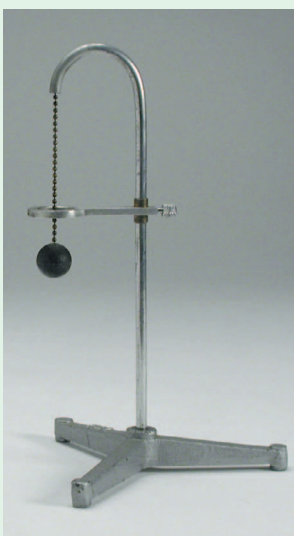
Se o sólido em questão possuir uma cavidade, com o aquecimento, ela se dilatará, como se estivesse preenchida pela substância de que é constituído o sólido. Portanto, o volume interno de um frasco de vidro irá variar, no aquecimento ou no resfriamento, como se fosse um bloco maciço de vidro. O mesmo ocorre com uma placa que tenha um orifício, que se dilatará ou se contrairá junto da placa, no aquecimento e no resfriamento, como se estivesse preenchido do mesmo material da placa.

## Leitura

### Experimento de Gravezande

Para observarmos a dilatação volumétrica de um corpo, podemos repetir o clássico experimento de Gravezande. Para isso, utilizamos uma esfera metálica maciça, presa na extremidade de uma corrente, um anel metálico de diâmetro um pouco maior que o da esfera e um bico de Bunsen.

Aquecemos a esfera e, em seguida, tentamos fazê-la atravessar o anel. Vamos observar que, devido à dilatação térmica, isso será impossível, pois o diâmetro da esfera ficou maior que o diâmetro interno do anel.

Imagens: Thales Trigo

Antes de ser aquecida, a esfera passa folgadamente pelo anel, já que seu diâmetro é menor que o diâmetro interno do anel.

Com o aquecimento, a esfera dilata-se e seu diâmetro aumenta, o que a impede de passar pelo anel.

## A dilatação térmica em nossa vida

Você já deve ter observado no seu dia a dia algumas situações que envolvem a dilatação térmica. Por exemplo, se uma porção de chá muito quente é colocada no interior de um copo de vidro comum, ele pode trincar. Isso ocorre porque a parte interna do copo é aquecida e se dilata. Como o vidro é péssimo condutor de calor, a face externa do copo demora para ser aquecida. É essa diferença de dilatação entre as partes interna e externa que provoca o trincamento do vidro.

Thales Trigo

Nas calçadas de cimento, um pedreiro sempre deve dividir o espaço usando ripas de madeira, pois, se a superfície for grande, com o tempo irá apresentar rachaduras, devido à dilatação do concreto. Nas quadras esportivas com piso de cimento também há juntas de dilatação. É comum lajes de concreto apresentarem infiltrações. Isso ocorre porque a laje sofre dilatação quando a temperatura aumenta e contração quando a temperatura diminui. Podem surgir fissuras na laje, por onde a água entra quando chove.

Nas pontes e nos viadutos, devem ser previstas fendas de dilatação para que a estrutura possa dilatar-se quando a temperatura aumenta.

Thales Trigo

As divisões de madeira permitem a dilatação das placas de concreto.

Nem todas as pessoas sabem que líquidos muito gelados e comida muito quente podem provocar sérios danos aos dentes. Como os materiais usados nas obturações e os dentes possuem coeficientes de dilatação diferentes, nas variações de temperatura a dilatação ocorre de forma diversa. Se o material da obturação dilatar mais, poderá ocorrer quebra do dente, se dilatar menos irá se afastar do dente, provocando infiltrações e, consequentemente, cáries.

Nas ferrovias, é deixado um pequeno espaço entre dois trilhos consecutivos para permitir sua expansão térmica. Na fotografia da direita, você pode observar que um grande aumento de temperatura distorceu os trilhos, impossibilitando a passagem dos trens.

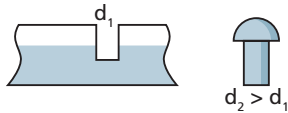
SPL/Latinstock

As obturações metálicas se expandem e se contraem mais do que os dentes. Isso pode provocar fraturas ou infiltrações, quando são ingeridos líquidos muito gelados ou comidas muito quentes.

Joe Armao/The AGE/Fairfax Media via Getty Images

Com o aquecimento, os trilhos sofreram uma grande expansão térmica.

## Exercícios nível 1

**26.** (Olimpíada Brasileira de Física) A figura ilustra uma peça de metal com um orifício de diâmetro $d_1$ e um pino de diâmetro $d_2$ ligeiramente maior que o orifício $d_1$, quando à mesma temperatura. Para introduzir o pino no orifício, pode-se:

a) aquecer ambos: o orifício e o pino.
b) resfriar o pino.
c) aquecer o pino e resfriar o orifício.
d) resfriar o orifício.
e) resfriar ambos: o orifício e o pino.

**27.** Os materiais usados para a obturação de dentes e os dentes possuem coeficientes de dilatação térmica diferentes. Assim, do ponto de vista físico, por que pode ser prejudicial aos dentes ingerirmos bebidas muito quentes ou muito geladas?

**28.** Uma substância tem coeficiente de dilatação superficial **A** e coeficiente de dilatação volumétrica **B**. Assim, o coeficiente de dilatação linear é igual a:

a) 2A. b) $\frac{B}{2}$. c) $\frac{A}{3}$. d) $\frac{AB}{6}$. e) $\frac{3AA}{4B}$.

**29. E.R.** Uma moeda, fabricada com níquel puro, está à temperatura ambiente de 20 °C. Ao ser levada a um forno, ela sofre um acréscimo de 1% na área de sua superfície. Qual a temperatura do forno?
**Dado:** coeficiente de dilatação linear do níquel = $12,5 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$

**Resolução:**
A expressão simplificada da dilatação superficial é:

$$\Delta A = A_0\, \beta\, \Delta\theta$$

Sendo:

$$\Delta A = 0{,}01 A_0$$
$$\beta = 2\alpha = 25 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$$
$$\Delta\theta = \theta - 20$$

temos:

$$0{,}01\ A_0 = A_0\ 25 \cdot 10^{-6}\ (\theta - 20)$$

$$400 = \theta - 20 \Rightarrow \boxed{\theta = 420\ °C}$$

**30.** À temperatura de 15 °C, encontramos uma chapa de cobre com superfície de área 100,0 cm$^2$. Que área terá essa superfície se a chapa for aquecida até 515 °C?
**Dado:** coeficiente de dilatação superficial do cobre = $3,2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$

**31.** Em uma placa de ouro, há um pequeno orifício, que a 30 °C tem superfície de área $5 \cdot 10^{-3}$ cm$^2$. A que temperatura devemos levar essa placa para que a área do orifício aumente o correspondente a $6 \cdot 10^{-5}$ cm$^2$?
**Dado:** coeficiente de dilatação linear do ouro = $15 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$

**32. E.R.** Numa chapa de latão, a 0 °C, fez-se um orifício circular de 20,0 cm de diâmetro. Determine o acréscimo de área que o orifício sofre quando a temperatura da chapa é elevada a 250 °C.
**Dado:** coeficiente de dilatação linear do latão = $2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$

**Resolução:**
Como o orifício é de forma circular, a 0 °C sua área é calculada por:

$$A_0 = \pi R_0^2 \Rightarrow A_0 = 3{,}14 \cdot 10{,}0^2$$
$$A_0 = 314\ cm^2$$

Usando a expressão simplificada da dilatação superficial:

$$\Delta A = A_0\, \beta\, \Delta\theta$$

e sendo:

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \beta = 4 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$$

temos:

$$\Delta A = 314 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 250$$

$$\boxed{\Delta A = 3{,}14\ cm^2}$$

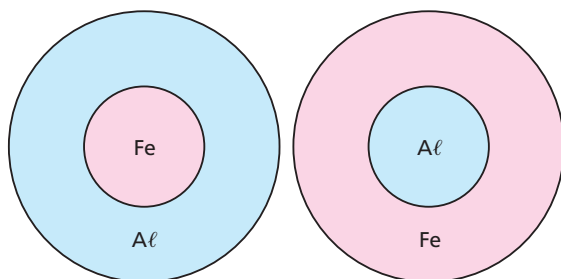
**33.** Uma estatueta de ouro foi aquecida de 25 °C a 75 °C, observando-se um aumento de 2,1 cm$^3$ em seu volume. Sendo $14 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$ o coeficiente de dilatação linear do ouro, qual era o volume inicial dessa estatueta?

**34.** Uma panela de alumínio possui, a 0 °C, uma capacidade de 1 000 cm$^3$ (1 L). Se levarmos a panela com água ao fogo, até que ocorra ebulição da água, sob pressão normal, qual será a nova capacidade da panela?
**Dados:** coeficiente de dilatação linear do alumínio = $24 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$;
coeficiente de dilatação cúbica da água = $1,3 \cdot 10^{-4}$ °C$^{-1}$.

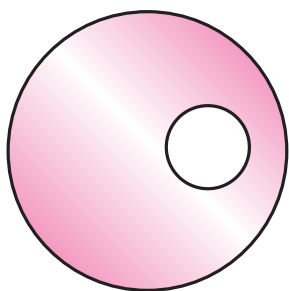
**35.** O coeficiente de dilatação linear do alumínio é $2,2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$. Um cubo de alumínio com volume de 5 L é aquecido de 40 °F até 76 °F. Qual é a variação aproximada do volume do cubo?

## Exercícios nível 2

**36.** Uma chapa de alumínio possui um furo em sua parte central. Sendo aquecida, observamos que:
a) tanto a chapa como o furo tendem a diminuir suas dimensões.
b) o furo permanece com suas dimensões originais e a chapa aumenta.
c) a chapa e o furo permanecem com suas dimensões originais.
d) a chapa aumenta e o furo diminui.
e) tanto a chapa como o furo tendem a aumentar suas dimensões.

**37.** (UFMG-MG) O coeficiente de dilatação térmica do alumínio (Aℓ) é, aproximadamente, duas vezes o coeficiente de dilatação térmica do ferro (Fe). A figura mostra duas peças em que um anel feito de um desses metais envolve um disco feito do outro. À temperatura ambiente, os discos estão presos aos anéis.

Se as duas peças forem aquecidas uniformemente, é correto afirmar que:

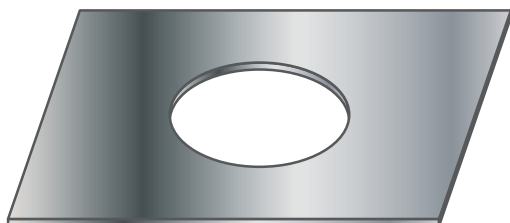
a) apenas o disco de Aℓ se soltará do anel de Fe.
b) apenas o disco de Fe se soltará do anel de Aℓ.
c) os dois discos se soltarão dos respectivos anéis.
d) os discos não se soltarão dos anéis.

**38.** Um disco de latão de 50,0 $cm^2$ de área é perfurado, ficando com um furo circular de 10,0 $cm^2$ na posição indicada na figura:

O coeficiente de dilatação linear do latão é de $2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$ e essas áreas se referem à temperatura ambiente. Se o disco for colocado em um forno e à temperatura elevada de 100 °C, a área do furo:

a) diminuirá de 0,12 $cm^2$.
b) aumentará de 0,02 $cm^2$.
c) diminuirá de 0,16 $cm^2$.
d) aumentará de 0,04 $cm^2$.
e) não sofrerá alteração.

**39.** Uma placa metálica de dimensões 10 cm × 20 cm × 0,5 cm tem em seu centro um furo cujo diâmetro é igual a 1,00 cm quando a placa está à temperatura de 20 °C. O coeficiente de dilatação linear do metal da placa é $20 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$. Quando a temperatura é de 520 °C, a área do furo:

a) aumenta 1%.
b) diminui 1%.
c) aumenta 2%.
d) diminui 2%.
e) não se altera.

**40.** (UFSE-SE) Uma placa retangular de ferro possui, a 20 °C, dimensões de 20 cm × 10 cm e um furo central, circular, de raio 2,5 cm.

Na mesma temperatura de 20 °C, dispõe-se de duas esferas, uma de ferro e outra de zinco, ambas com diâmetro de 5,0 cm. Sabendo que os coeficientes de dilatação linear do ferro e do zinco valem, respectivamente, $1,2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$ e $3,0 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$, analise as afirmações que seguem.

0 0 – Aquecendo a placa de ferro a 70 °C ela sofre uma dilatação superficial de 0,12 $cm^2$.
1 1 – Aquecendo a placa de ferro a 70 °C o furo sofre uma contração de aproximadamente 0,09 $cm^2$.
2 2 – Aquecendo as esferas a 70 °C, seus diâmetros passam a ter uma diferença de $4,5 \cdot 10^{-3}$ cm.
3 3 – Aquecendo-se a placa e as esferas a 70 °C, apenas a esfera de ferro passa pelo furo.
4 4 – Resfriando a placa e as esferas a 0 °C, as duas esferas passam pelo furo.

**41. E.R.** Ao aquecermos um sólido de 20 °C a 80 °C, observamos que seu volume experimenta um aumento correspondente a 0,09% em relação ao volume inicial. Qual é o coeficiente de dilatação linear do material de que é feito o sólido?

**Resolução:**

O volume inicial $V_0$ corresponde a 100% e a variação de volume $\Delta V$, a 0,09%. Assim, podemos escrever a relação:

$$\Delta V = \frac{0,09\,V_0}{100}$$

Como: $\Delta V = V_0\,\gamma\,\Delta\theta$,

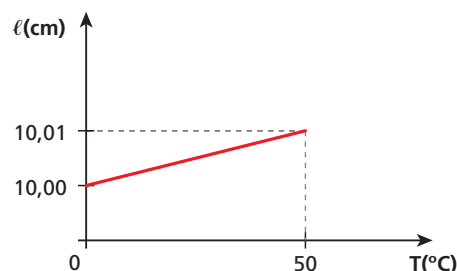
então: $\dfrac{0,09\,V_0}{100} = V_0\,\gamma\,\Delta\theta$

Mas $\gamma = 3\alpha$

Portanto:

$$\frac{0,09}{100} = 3\alpha(80 - 20)$$

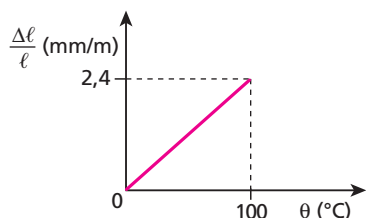
$$\boxed{\alpha = 5 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}}$$

**42.** (UFJF-MG) O gráfico mostra a variação do comprimento ℓ da aresta de um cubo em função da temperatura **T**. Quando a temperatura varia de 0 °C a 100 °C, o volume do cubo deve variar de:

a) 3,0 $cm^3$
b) 2,0 $cm^3$
c) 5,0 $cm^3$
d) 6,0 $cm^3$
e) 1,0 $cm^3$

**43.** Uma barra de estanho tem a forma de um prisma reto de 4,0 $cm^2$ de área da base e 1,0 m de comprimento, quando na temperatura inicial de 68 °F. Sabendo que o coeficiente de dilatação linear do estanho é igual a $2,0 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$, determine o comprimento e o volume dessa barra quando ela atinge a temperatura de 518 °F.

**44.** (Mack-SP) Uma chapa metálica de área 1 $m^2$, ao sofrer certo aquecimento, dilata 0,36 $mm^2$. Com a mesma variação de temperatura, um cubo de mesmo material, com volume inicial de 1 $dm^3$, dilatará:

a) 0,72 $mm^3$
b) 0,54 $mm^3$
c) 0,36 $mm^3$
d) 0,27 $mm^3$
e) 0,18 $mm^3$

**45.** (UMC-SP) A figura mostra a variação relativa do comprimento de uma barra metálica em função da temperatura.

Se um cubo de aresta **a**, feito desse metal, for submetido à variação de temperatura de 100 °C, sua dilatação volumétrica será:

a) $\Delta V = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ a^3$.
b) $\Delta V = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\ a^3$.
c) $\Delta V = 5{,}6 \cdot 10^{-3}\ a^3$.
d) $\Delta V = 4{,}8 \cdot 10^{-3}\ a^3$.
e) $\Delta V = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ a^3$.

**46.** (Mack-SP) Uma esfera de certa liga metálica, ao ser aquecida de 100 °C, tem seu volume aumentado de 4,5%. Uma haste dessa mesma liga metálica, ao ser aquecida de 100 °C, terá seu comprimento aumentado de:

a) 1,0%.
b) 1,5%.
c) 2,0%.
d) 3,0%.
e) 4,5%.

# Bloco 3

## 6. Dilatação térmica dos líquidos

Um líquido, devido às suas características, precisa estar no interior de um recipiente sólido para que possamos determinar seu volume.

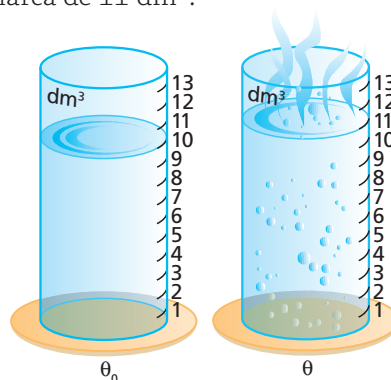
Assim, podemos estudar o que ocorre com o volume de um líquido, no aquecimento ou no resfriamento, se ele estiver em uma proveta graduada, por exemplo.

Cristina Xavier

Água no interior de uma proveta graduada. O volume da água é lido na escala.

Imaginemos um recipiente de vidro transparente, graduado corretamente em $dm^3$, a uma temperatura $\theta_0$.

Um líquido, também à temperatura $\theta_0$, é colocado no interior desse frasco até a marca de 10 $dm^3$. Como o frasco foi graduado corretamente a essa temperatura $\theta_0$, podemos dizer com certeza que o recipiente contém 10 $dm^3$ de líquido.

Agora, aquecendo o conjunto frasco-líquido até uma temperatura $\boldsymbol{\theta}$ ($\theta > \theta_0$), notamos que o líquido atinge a marca de 11 $dm^3$.

Qual foi a dilatação sofrida por esse líquido?

À primeira vista, pode-se pensar que o líquido dilatou 1 $dm^3$. Mas será que foi 1 $dm^3$ mesmo?

Na verdade, esse líquido dilatou mais do que 1 $dm^3$, pois, como **o frasco também dilatou**, entre duas marcas consecutivas da graduação do frasco temos agora uma capacidade maior do que 1 $dm^3$. Assim, à temperatura $\boldsymbol{\theta}$, temos o líquido ocupando 11 unidades da graduação do frasco, sendo que cada unidade corresponde a um volume maior do que 1 $dm^3$. Daí termos mais de 11 $dm^3$ de líquido e, em consequência, uma dilatação real maior do que 1 $dm^3$.

Lembre-se de que esse problema é inevitável, já que o líquido tem de estar no interior de um frasco sólido, que também dilata.

É por isso que se observam dois tipos de dilatação para os líquidos: uma **real** (que não depende do frasco) e outra **aparente** (afetada pela dilatação do frasco).

Em líquidos, só existe interesse no estudo da dilatação volumétrica, que é regida pela mesma equação da dilatação volumétrica dos sólidos:

$$V = V_0(1 + \gamma\,\Delta\theta)$$

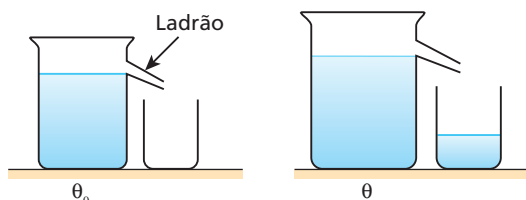
Os coeficientes de dilatação real dos líquidos são, em geral, maiores do que os dos sólidos.

Veja, na tabela a seguir, os coeficientes de dilatação real de alguns líquidos:

| Líquido | $\gamma_{real}$ em °C$^{-1}$ |
|---|---|
| Éter | $16{,}6 \cdot 10^{-4}$ |
| Álcool etílico | $11 \cdot 10^{-4}$ |
| Petróleo | $9 \cdot 10^{-4}$ |
| Glicerina | $4{,}8 \cdot 10^{-4}$ |
| Água* | $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ |
| Mercúrio | $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ |

* Por volta de 20 °C.

Para entendermos melhor as dilatações real e aparente, consideremos um frasco totalmente cheio com um líquido. Ao aquecermos o conjunto, notamos que ocorre um extravasamento parcial do líquido.

Note que após o aquecimento o recipiente continua cheio. A quantidade de líquido extravasado representa a aparente dilatação do líquido, pois o **recipiente também dilatou**, aumentando sua capacidade.

Assim, a dilatação real do líquido corresponde à variação da capacidade do frasco mais o volume do líquido extravasado:

$$\Delta V_{real} = \Delta V_{frasco} + \Delta V_{aparente}$$

Entretanto, $\Delta V = V_0\,\gamma\,\Delta\theta$; como, no início, o volume real do líquido é igual ao aparente e, ainda, igual à capacidade do frasco, temos:

$$V_0\,\gamma_r\,\Delta\theta = V_0\,\gamma_f\,\Delta\theta + V_0\,\gamma_a\,\Delta\theta$$

Daí:

$$\gamma_r = \gamma_f + \gamma_a$$

O coeficiente de dilatação real do líquido é igual à soma do seu coeficiente de dilatação aparente com o coeficiente de dilatação do frasco que o contém.

Observemos que a dilatação real depende somente do líquido, enquanto a dilatação aparente depende também do frasco em que foi medida. Um mesmo líquido apresenta dilatações aparentes diferentes quando medidas em dois frascos de materiais diferentes, pois o frasco que dilata menos provoca maior extravasamento e maior dilatação aparente.

## 7. Temperatura e massa específica

Vamos agora observar a influência da temperatura na massa específica de uma substância.

Define-se **massa específica** ou **densidade absoluta** ($\mu$) de uma substância como o quociente de sua massa (**m**) pelo respectivo volume (**V**):

$$\mu = \frac{m}{V}$$

Com a variação de temperatura, a massa da substância considerada permanece inalterada, porém seu volume varia, o que provoca alteração em sua massa específica.

Assim, a uma temperatura $\theta_0$, temos:

$$\mu_0 = \frac{m}{V_0} \Rightarrow m = \mu_0\,V_0 \quad \text{(I)}$$

À temperatura $\theta$, temos, para a densidade da substância:

$$\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu\,V \quad \text{(II)}$$

Igualando (I) e (II), podemos escrever:

$$\mu_0\,V_0 = \mu\,V \qquad \text{(III)}$$

Substituindo em (III) a expressão da dilatação volumétrica:

$$V = V_0(1 + \gamma\,\Delta\theta)$$

Obtemos:

$$\mu_0\,V_0 = \mu\,V_0(1 + \gamma\,\Delta\theta)$$

$$\mu_0 = \mu(1 + \gamma\,\Delta\theta)$$

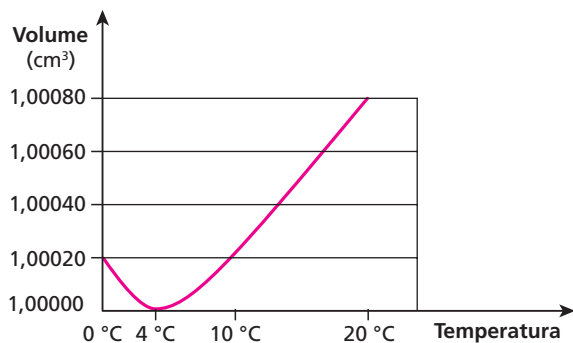
$$\mu = \frac{\mu_0}{(1 + \gamma\Delta\theta)}$$

Observe, na relação, que a massa específica de um líquido diminui com o aumento da temperatura.

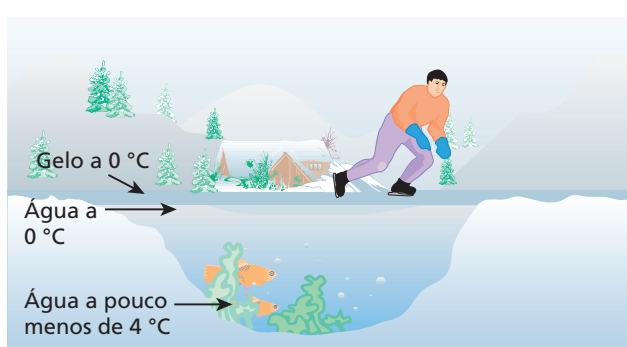
## 8. A dilatação anormal da água

Em geral, um líquido, quando aquecido, sempre dilata, aumentando de volume. No entanto, a água

constitui uma exceção a essa regra, pois, ao ser aquecida de 0 °C a 4 °C, tem seu volume diminuído. Apenas para temperaturas acima de 4 °C a água dilata normalmente ao ser aquecida.

Para melhor ilustrar, vejamos o gráfico abaixo, que representa a variação de volume de 1 g de água pura em função da sua temperatura.

É importante observar que a 4 °C o volume da água é mínimo e, portanto, sua massa específica é máxima.

Esse tipo de dilatação anormal da água explica por que um lago congela apenas na superfície. Durante o resfriamento da água da superfície, até 4 °C a densidade aumenta, e essa água desce, produzindo a subida da água mais quente do fundo (convecção). Isso ocorre até que toda a água do lago atinja 4 °C, pois, a partir daí, quando a temperatura da água da superfície diminui, seu volume aumenta, diminuindo a densidade. Em consequência, essa água mais fria não desce mais e acaba solidificando. Esse gelo formado na superfície isola o restante da água, fazendo com que a temperatura no fundo do lago se conserve acima de 0 °C.

Layne Kennedy/CORBIS/Latinstock

A dilatação anormal da água faz com que apenas a superfície de um lago se solidifique. O gelo formado isola o restante da água (o gelo é péssimo condutor de calor), fazendo com que a temperatura no fundo do lago seja superior a 0 °C e, desse modo, preserve a vida animal e vegetal lá existente.

## Exercícios

nível 1

**47.** Ao abastecer o carro num posto de gasolina, você compra o combustível por volume e não por massa, isto é, você compra "tantos litros" e não "tantos quilogramas" de combustível. Assim, qual o melhor horário do dia para abastecer o carro se você quer fazer economia?

**48.** Um posto recebeu 5 000 L de gasolina num dia muito frio, em que a temperatura era de 10 °C. No dia seguinte, a temperatura aumentou para 30 °C, situação que durou alguns dias, o suficiente para que a gasolina fosse totalmente vendida. Se o coeficiente de dilatação volumétrica da gasolina é igual a $11 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$, determine o lucro do proprietário do posto, em litros.

**49. E.R.** Um frasco de vidro, graduado em cm³ a 0 °C, contém mercúrio até a marca de 100,0 cm³, quando ainda a 0 °C. Ao se aquecer o conjunto a 120 °C, o nível de mercúrio atinge a marca de 101,8 cm³. Determine o coeficiente de dilatação linear do vidro.

**Dado:** coeficiente de dilatação do mercúrio:

$$\gamma_{Hg} = 18 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$$

**Resolução:**

A diferença de leitura corresponde à dilatação aparente do líquido, pois não podemos nos esquecer de que o frasco também dilatou:

$$\Delta V_{aparente} = 101{,}8 - 100{,}0$$
$$\Delta V_{aparente} = 1{,}8\ cm^3$$

Usamos a expressão da dilatação aparente dos líquidos:

$$\Delta V_{aparente} = V_{0A}\gamma_{aparente}\,\Delta\theta$$

Temos:

$$1{,}8 = 100{,}0 \cdot \gamma_a \cdot 120$$
$$\gamma_a = 15 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1},$$

porém:

$$\gamma_a = \gamma_r - \gamma_f \quad e \quad \gamma_f = 3\alpha_f$$

Portanto:

$$15 \cdot 10^{-5} = 18 \cdot 10^{-5} - 3\alpha_f$$
$$3\alpha_f = 3 \cdot 10^{-5}$$

$$\boxed{\alpha_f = \alpha_{vidro} = 1 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}}$$

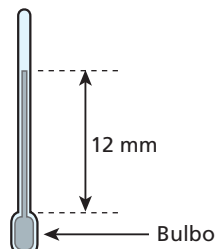
**50.** Um recipiente de volume **V** está cheio de um líquido a 20 °C. Aquecendo-se o conjunto a 70 °C, transbordam 5,0 $cm^3$ de líquido. Esses 5,0 $cm^3$ correspondem:
a) à dilatação real do líquido.
b) à dilatação aparente do líquido.
c) à soma da dilatação real com a dilatação aparente do líquido.
d) à diferença entre a dilatação real e a dilatação aparente do líquido.
e) a três vezes a dilatação real do líquido.

**51.** Num recipiente de porcelana, graduado corretamente em centímetros cúbicos a 30 °C, é colocado petróleo a 30 °C até a marca 500 $cm^3$. Em seguida, eleva-se a temperatura do conjunto a 70 °C.
**Dados:** coeficiente de dilatação cúbica do petróleo $= 9{,}1 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$;
coeficiente de dilatação linear da porcelana $= 3{,}3 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$.
Determine:
a) o coeficiente de dilatação aparente do petróleo, quando medido no frasco de porcelana.
b) a marca atingida pelo petróleo no frasco, após o aquecimento.
c) a dilatação real sofrida pelo petróleo.

**52.** (AFA-RJ) Um recipiente tem capacidade de 3 000 $cm^3$ a 20 °C e está completamente cheio de um determinado líquido. Ao aquecer o conjunto até 120 °C, transbordam 27 $cm^3$. O coeficiente de dilatação aparente desse líquido, em relação ao material de que é feito o recipiente é, em $°C^{-1}$, igual a:
a) $3{,}0 \cdot 10^{-5}$
b) $9{,}0 \cdot 10^{-5}$
c) $2{,}7 \cdot 10^{-4}$
d) $8{,}1 \cdot 10^{-4}$

**53.** (Olimpíada Paulista de Física) Um recipiente de vidro, cujo coeficiente de dilatação térmica é $5 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$, tem volume igual a 100 $dm^3$ e está completamente cheio de um líquido à temperatura ambiente (20 °C). Ao ser aquecido até 60 °C nota-se que foram derramados 0,20 $dm^3$ do líquido aquecido. Calcule a dilatação real do líquido.
a) 0,30 $dm^3$
b) 0,15 $dm^3$
c) 0,11 $dm^3$
d) 0,22 $dm^3$
e) 0,32 $dm^3$

## Exercícios nível 2

**54.** (Fuvest-SP) Um termômetro especial, com líquido dentro de um recipiente de vidro, é constituído de um bulbo de 1 $cm^3$ e um tubo com secção transversal de 1 $mm^2$. À temperatura de 20 °C, o líquido preenche completamente o bulbo até a base do tubo. À temperatura de 50 °C, o líquido preenche o tubo até uma altura de 12 mm. Considere desprezíveis os efeitos da dilatação do vidro e da pressão do gás acima da coluna do líquido. Podemos afirmar que o coeficiente de dilatação volumétrica médio do líquido vale:
a) $3 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.
b) $4 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.
c) $12 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.
d) $20 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.
e) $36 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.

**55.** (Vunesp-SP) Nos últimos anos temos sido alertados sobre o aquecimento global. Estima-se que, mantendo-se as atuais taxas de aquecimento do planeta, haverá uma elevação do nível do mar causada, inclusive, pela expansão térmica, causando inundação em algumas regiões costeiras. Supondo, hipoteticamente, os oceanos como sistemas fechados e considerando que o coeficiente de dilatação volumétrica da água é aproximadamente $2 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$ e que a profundidade média dos oceanos é de 4 km, um aquecimento global de 1 °C elevaria o nível do mar, devido à expansão térmica, em, aproximadamente:
a) 0,3 m. b) 0,5 m. c) 0,8 m. d) 1,1 m. e) 1,7 m.

**56.** (UFPA-PA) Um recipiente de vidro encontra-se completamente cheio de um líquido a 0 °C. Quando o conjunto é aquecido até 80 °C, o volume do líquido que transborda corresponde a 4% do volume que o líquido possuía a 0 °C. Sabendo que o coeficiente de dilatação volumétrica do vidro é de $27 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$, determine o coeficiente de dilatação real do líquido.

**57.** Um recipiente de 200 $cm^3$ de capacidade, feito de um material de coeficiente de dilatação volumétrica de $100 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$, contém 180 $cm^3$ de um líquido de coeficiente de dilatação cúbica de $1000 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$. A temperatura do sistema é de 20 °C. Qual a temperatura-limite de aquecimento do líquido sem que haja transbordamento?

**58.** Um frasco de vidro, cujo volume é 2 000 $cm^3$ a 0 °C, está completamente cheio de mercúrio a esta temperatura. Sabe-se que o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é $1{,}8 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$ e o coeficiente de dilatação linear do vidro de que é feito o frasco é $1{,}0 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$. O volume de mercúrio que irá entornar, em $cm^3$, quando o conjunto for aquecido até 100 °C, será:
a) 6,0 b) 18 c) 36 d) 30

**59.** (Enem) A gasolina é vendida por litro, mas em sua utilização como combustível a massa é o que importa. Um aumento da temperatura do ambiente leva a um aumento no volume da gasolina. Para diminuir os efeitos práticos dessa variação, os tanques dos postos de gasolina são subterrâneos. Se os tanques não fossem subterrâneos:
I. Você levaria vantagem ao abastecer o carro na hora mais quente do dia, pois estaria comprando mais massa por litro de combustível.
II. Abastecendo com a temperatura mais baixa, você estaria comprando mais massa de combustível para cada litro.
III. Se a gasolina fosse vendida por kg em vez de ser vendida por litro, o problema comercial decorrente da dilatação da gasolina estaria resolvido.
Dessas considerações, somente:
a) I é correta.
b) II é correta.
c) III é correta.
d) I e II são corretas.
e) II e III são corretas.

**60.** (UFGO-GO) Num dia quente em Goiânia, 32 °C, uma dona de casa coloca álcool em um recipiente de vidro graduado e lacra-o bem para evitar evaporação. De madrugada, com o termômetro acusando 12 °C, ela nota, surpresa, que, apesar de o vidro estar bem fechado, o volume de álcool reduziu-se. Sabe-se que o seu espanto não se justifica, pois se trata do fenômeno da dilatação térmica. A diminuição do volume foi de:

a) 1,1%. b) 2,2%. c) 3,3%. d) 4,4%. e) 6,6%.

> Considere o coeficiente de dilatação térmica volumétrica do álcool: $\gamma_{álcool} = 1,1 \cdot 10^{-3}\ °C^{-1} >> \gamma_{vidro}$

**61. E.R.** A 4 °C, a massa específica da água vale 1,0 g/cm³. Se o coeficiente de dilatação volumétrica real da água vale $2,0 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$, qual é sua massa específica, na temperatura de 84 °C?

**Resolução:**

A **densidade absoluta** ou **massa específica** de uma substância varia com a temperatura, de acordo com a seguinte função:

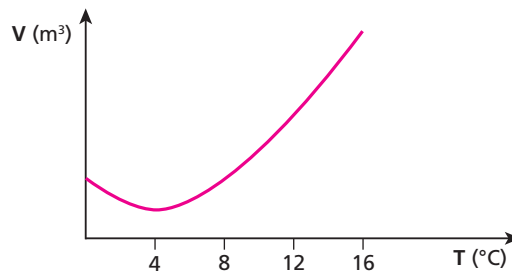
$$\mu = \frac{\mu_0}{(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)}$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$\mu = \frac{1,0}{1 + 2,0 \cdot 10^{-4} \cdot 80} \Rightarrow \boxed{\mu \cong 0,98\ g/cm^3}$$

**62.** A densidade absoluta de um material a 20 °C é 0,819 g/cm³ e seu coeficiente de dilatação volumétrica vale $5 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$. A que temperatura devemos levar esse corpo para que sua densidade absoluta torne-se igual a 0,780 g/cm³?

**63.** Uma substância tem massa específica de 0,78 g/cm³ a 25 °C e 0,65 g/cm³ a 425 °C. Qual o seu coeficiente de dilatação volumétrica?

**64.** (Ufop-MG) Na figura, esboçou-se o gráfico do volume em função da temperatura para determinada massa de água líquida.

Por que não é possível medir a temperatura no intervalo entre 0 °C e 16 °C com um termômetro de água, usando a densidade como propriedade termométrica?

## Descubra mais

**1.** O que faz a água apresentar uma dilatação diferente em relação às demais substâncias?

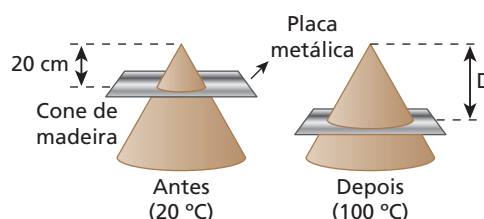
## Exercícios nível 3

**65.** (Mack-SP) O coeficiente de dilatação linear de certo material é $3,6 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$. Utilizando como unidade de temperatura o grau Fahrenheit, o valor do coeficiente de dilatação linear desse material será:

a) $2,0 \cdot 10^{-6}\ °F^{-1}$.
b) $3,6 \cdot 10^{-6}\ °F^{-1}$.
c) $4,0 \cdot 10^{-6}\ °F^{-1}$.
d) $5,6 \cdot 10^{-6}\ °F^{-1}$.
e) $6,3 \cdot 10^{-6}\ °F^{-1}$.

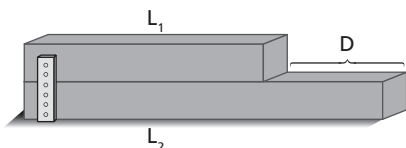
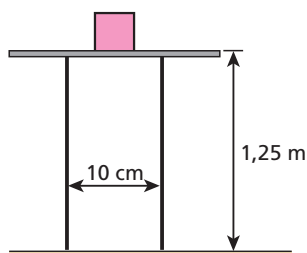
**66.** (PUC-SP) Uma barra de alumínio, inicialmente a 20 °C, tem, a essa temperatura, uma densidade linear de massa igual a $2,8 \cdot 10^{-3}$ g/mm. A barra é aquecida sofrendo uma variação de comprimento de 3 mm. Sabe-se que o coeficiente de dilatação linear térmica do alumínio é $2,4 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$ e seu calor específico é 0,2 cal/g °C. A quantidade de calor absorvida pela barra é:

a) 35 cal. b) 70 cal. c) 90 cal. d) 140 cal. e) 500 cal.

**67.** (UFABC-SP) Uma placa metálica de espessura desprezível tem um orifício circular e está encaixada horizontalmente num cone de madeira, como mostra a figura. À temperatura de 20 °C, a distância do plano que contém a placa ao vértice do cone é 20 cm. A placa é, então, aquecida a 100 °C e, devido à dilatação térmica, ela escorrega até uma nova posição, onde ainda continua horizontal. Sendo o coeficiente de dilatação linear do material da placa igual a $5 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$ e desconsiderando a dilatação do cone, determine, em cm, a nova distância **D** do plano que contém a placa ao vértice do cone a 100 °C.

**68.** (UFBA-BA) *Impossibilitados de medir a longitude em que se encontravam, os navegadores que tomaram parte nas grandes explorações marítimas se viam literalmente perdidos no mar tão logo perdessem contato visual com a terra. Milhares de vidas e crescente riqueza das nações dependiam de uma solução.* (SOBEL, 1997.)

A determinação da longitude ao longo de viagens marítimas é feita pela comparação entre a hora local e a hora no porto de origem. Portanto, é necessário que se tenha, no navio, um relógio que seja ajustado antes de zarpar e marque, precisamente, ao longo de toda a viagem, a hora do porto de origem. Os relógios de pêndulo daquela época não serviam a esse propósito, pois o seu funcionamento sofria influência de muitos fatores, inclusive das variações de temperatura, devido à dilatação e à contração da haste do pêndulo.

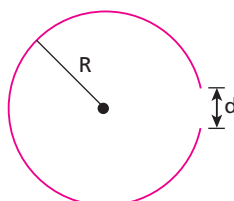
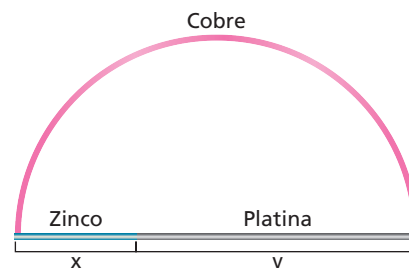
A longitude pôde finalmente ser determinada através de um relógio, no qual o problema das variações de temperatura foi resolvido com a utilização de tiras de comprimentos diferentes, feitas de materiais de coeficientes de dilatação diferentes.

Com base nesse mesmo princípio físico, considere um conjunto formado por duas barras de comprimento $L_1 = 10,0$ cm e $L_2 = 15,0$ cm fixadas em uma das extremidades, inicialmente submetido à temperatura $T_0$. Supondo que o conjunto tenha sua temperatura aumentada para $T = T_0 + \Delta T$, determine a relação entre os coeficientes de dilatação linear, $\alpha_1$ e $\alpha_2$, das barras, para a qual a distância D = 5,0 cm não se altera com a variação de temperatura.

**69.** (Mack-SP) A figura a seguir mostra duas barras verticais, uma de cobre e outra de zinco, fixas na parte inferior. Elas suportam uma plataforma horizontal onde está apoiado um corpo. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e a plataforma é 0,01, e os coeficientes de dilatação linear do zinco e do latão valem $2,6 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$ e $1,8 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$, respectivamente. Qual a menor variação de temperatura capaz de provocar o deslizamento do corpo sobre a plataforma?

**70.** (ITA-SP) Um relógio de pêndulo simples é montado no pátio de um laboratório em Novosibirsk, na Sibéria, utilizando um fio de suspensão de coeficiente de dilatação $1 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$. O pêndulo é calibrado para marcar a hora certa em um bonito dia de verão de 20 °C. Em um dos menos agradáveis dias do inverno, com a temperatura a −40 °C, o relógio:

a) adianta 52 s por dia.
b) adianta 26 s por dia.
c) atrasa 3 s por dia.
d) atrasa 26 s por dia.
e) atrasa 52 s por dia.

**71.** (UFBA-BA) A haste de um pêndulo é feita com um material cujo coeficiente de dilatação vale $4,375 \cdot 10^{-3}$ °C. Colocando-se esse pêndulo em uma câmara frigorífica, verifica-se o seu período de oscilação $T_1 = 0,75T_0$, sendo $T_0$ o período medido num laboratório. Determine a diferença de temperatura que há entre o laboratório e a câmara frigorífica. Expresse sua resposta em $10^2$ °C.

**72.** (Univest-SP) Um arame é encurvado em forma de um aro circular de raio **R**, tendo, porém, uma folga **d** entre suas extremidades, conforme indica a figura abaixo. Aquecendo-se esse arame, é correto afirmar que a medida de **R** e a medida de **d**, respectivamente:

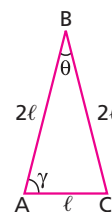
a) aumentará — não se alterará.
b) aumentará — aumentará.
c) aumentará — diminuirá.
d) não se alterará — aumentará.
e) não se alterará — diminuirá.

**73.** Uma barra de cobre foi recurvada tomando a forma de uma semicircunferência. As extremidades foram unidas por uma outra barra reta constituída por dois metais: uma parte, de comprimento **x**, era de zinco e a outra, de comprimento **y**, de platina.

São dados os coeficientes de dilatação lineares:
cobre = $17 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$;
zinco = $29 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$;
platina = $9 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$.

Para que o arco de cobre conserve sua forma semicircular, a qualquer temperatura a que seja levado, a razão $\frac{x}{y}$ entre os comprimentos iniciais **x** e **y** dos segmentos de zinco e platina deve ser:

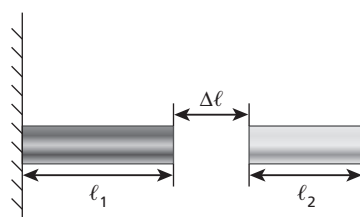
a) $\frac{1}{5}$.   b) $\frac{2}{5}$.   c) $\frac{3}{5}$.   d) $\frac{1}{3}$.   e) $\frac{2}{3}$.

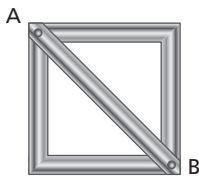
**74.** (PUC-SP) Três barras – AB, BC e AC – são dispostas de modo que formem um triângulo isósceles. O coeficiente de dilatação linear de AB e BC é **$\alpha$**, e o de AC é $2\alpha$. A 0 °C, os comprimentos de AB e BC valem $2\ \ell$ e o de AC vale **$\ell$**.
Aquecendo-se o sistema à temperatura **t**, observa-se que:



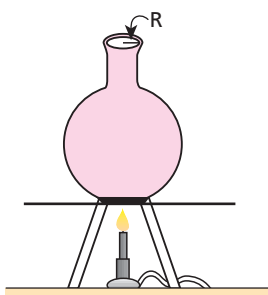
a) o triângulo torna-se equilátero.
b) o triângulo deixa de ser isósceles.
c) não há alteração dos ângulos **$\theta$** e **$\gamma$**.
d) as barras AB e BC dilatam-se o dobro de AC.
e) as três barras sofrem dilatações iguais.

**75.** Uma régua de latão, com coeficiente de dilatação linear $2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$, foi graduada corretamente a 20 °C. Ao ser aquecida, atingiu uma temperatura **$\theta$**, à qual as medidas apresentam um erro de 0,1%. Qual é essa temperatura **$\theta$**?

**76.** (Vunesp-SP) Uma régua de aço de coeficiente de dilatação linear $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$ foi calibrada a certa temperatura, de tal modo que o erro máximo em cada divisão de milímetro é de $6,0 \cdot 10^{-5}$ mm. Qual é o intervalo máximo de temperaturas em que essa régua pode ser usada, em torno da temperatura de calibração, se se pretende conservar aquela precisão?

**77.** (Olimpíada Brasileira de Física) Considere duas barras delgadas, de comprimentos $\ell_1$ e $\ell_2$, feitas de materiais cujos coeficientes de dilatação linear são, respectivamente, $\alpha_1$ e $\alpha_2$. As barras estão dispostas de modo a estarem separadas por uma distância $\Delta\ell$, conforme mostra a figura.
A que variação de temperatura deve ser submetido o sistema para que o espaçamento $\Delta\ell$, entre as duas barras, seja completamente preenchido?
Considere que apenas as barras sofram influência dessa variação de temperatura.

**78.** (FGV-SP) Um serralheiro monta, com o mesmo tipo de vergalhão de ferro, a armação esquematizada.

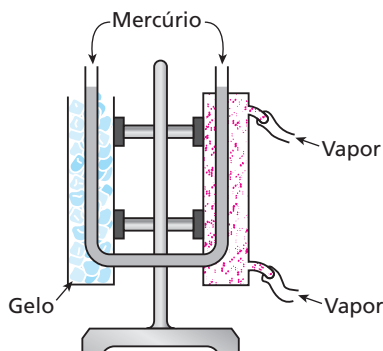
A barra transversal que liga os pontos **A** e **B** não exerce forças sobre esses pontos. Se a temperatura da armação for aumentada, a barra transversal

a) continua não exercendo forças sobre os pontos **A** e **B**.
b) empurrará os pontos **A** e **B**, pois ficará $\sqrt{2}$ vezes maior que o novo tamanho que deveria assumir.
c) empurrará os pontos **A** e **B**, pois ficará $\ell_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$ vezes maior que o novo tamanho que deveria assumir.
d) tracionará os pontos **A** e **B**, pois ficará $\sqrt{2}$ vezes menor que o novo tamanho que deveria assumir.
e) tracionará os pontos **A** e **B**, pois ficará $\ell_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$ vezes menor que o novo tamanho que deveria assumir.

**79.** (UFG) Deseja-se acoplar um eixo cilíndrico a uma roda com um orifício circular. Entretanto, como a área da seção transversal do eixo é 2,0% maior que a do orifício, decide-se resfriar o eixo e aquecer a roda. O eixo e a roda estão inicialmente à temperatura de 30°C. Resfriando-se o eixo para −20°C, calcule o acréscimo mínimo de temperatura da roda para que seja possível fazer o acoplamento. O eixo e a roda são de alumínio, que tem coeficiente de dilatação superficial de $5{,}0 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$.

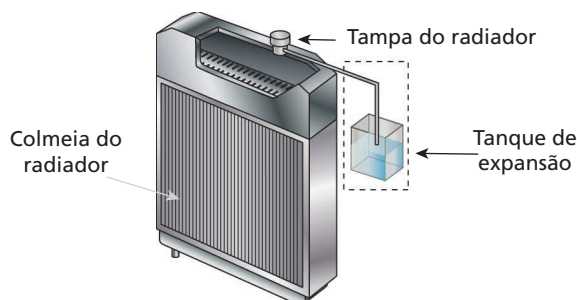
**80.** (UFBA-BA) A figura representa um balão, de volume $V_0$, feito de material isótropo de coeficiente de dilatação linear $\boldsymbol{\alpha}$. O balão está completamente cheio de um líquido de coeficiente de dilatação volumétrica $\boldsymbol{\gamma}$ e de massa específica $\mu_0$, à temperatura $\theta_0$. Quando a temperatura do balão é aumentada em $\Delta\theta$, extravasa o volume $V_e$ do líquido.

Nessas condições, pode-se afirmar:

(01) O raio **R** diminui quando a temperatura do balão aumenta.
(02) O balão se dilata como se fosse maciço.
(04) O coeficiente de dilatação aparente do líquido é expresso por $\gamma + 3\alpha$.
(08) Após a variação de temperatura $\Delta\theta$, a massa específica do líquido passa a ser expressa por $\mu_0(1 + \gamma\,\Delta\theta)^{-1}$.
(16) A dilatação do balão é $V_0\,\gamma\,\Delta\theta - V_e$.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmativas corretas.

**81.** A figura seguinte mostra um dispositivo utilizado para medir o coeficiente de dilatação cúbica de um líquido. Um dos ramos verticais do tubo em forma de **U**, que contém o líquido em estudo, é esfriado com gelo a 0 °C, enquanto o outro ramo é aquecido utilizando-se vapor de água a 100 °C.

Esse dispositivo foi usado por Dulong-Petit para a obtenção do coeficiente de dilatação do mercúrio. Na experiência realizada, uma das colunas apresentava 250,0 mm e a outra 254,5 mm de líquido. Após os cálculos, o valor encontrado para o coeficiente de dilatação cúbica do mercúrio foi:

a) $4{,}5 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.
b) $1{,}8 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.
c) $1{,}2 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.
d) $1{,}8 \cdot 10^{-3}\ °C^{-1}$.
e) $1{,}2 \cdot 10^{-3}\ °C^{-1}$.

**82.** (Olimpíada Brasileira de Física) Conectado ao radiador por uma mangueira, existe o tanque de expansão (veja figura abaixo).

Esse tanque tem, também, o papel de acumular o excesso de água, que está inicialmente a 10 °C e que vazará quando subir a temperatura da água colocada no radiador, devido às explosões do combustível nos cilindros do motor. Suponha que nesta ocasião a água esteja a 90 °C e tenha o coeficiente de expansão volumétrico $\gamma = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$ e que o radiador seja feito de cobre com coeficiente linear de expansão $\alpha = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$ preenchido totalmente com 20 litros de água. A quantidade de água que vazará será de

a) 629 $cm^3$.
b) 544 $cm^3$.
c) 822 $cm^3$.
d) 472 $cm^3$.
e) 252 $cm^3$.

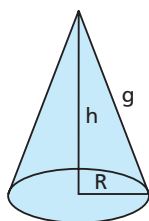
**83.** (Mack-SP) Como sabemos, a água apresenta dilatação anômala, pois quando resfriada a partir da temperatura de 4 °C o seu volume aumenta. Assim, quando determinada massa de água a 20 °C (calor específico = 1,0 cal/g °C, densidade = 1,0 g/$cm^3$) é resfriada, transformando-se em gelo a 0 °C (calor latente de fusão = 80 cal/g, densidade = 0,9 g/$cm^3$), tem seu volume aumentado de 20 $cm^3$. A quantidade de calor retirada dessa massa de água é de:

a) 18 000 cal.
b) 14 400 cal.
c) 10 800 cal.
d) 7 200 cal.
e) 3 600 cal.

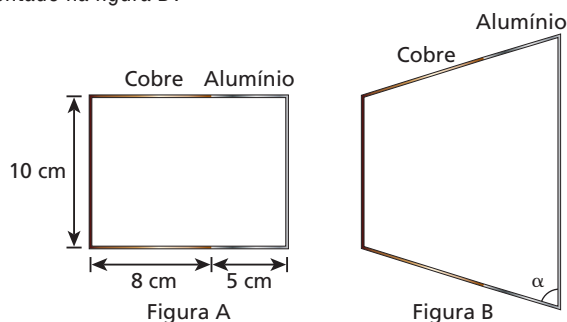
**84.** (UFSCar-SP) Para completar a higienização, uma mãe ferve o bico da mamadeira e, depois de retirá-lo da água, aguarda que ela retome a fervura. Verte, então, 250 mL dessa água dentro do copo da mamadeira, que mantém enrolado em um pano a fim de "conservar o calor". Aguarda o equilíbrio térmico e então joga fora a água.

a) No passado, o copo das mamadeiras era feito de vidro. Em uma sequência de ações, como a descrita para escaldar a mamadeira, ao preencher parcialmente recipientes de vidro com água quente, esses podem se partir em dois pedaços, nitidamente separados na altura em que estava o nível d'água: um pedaço contendo a água aquecida e o outro seco. Qual o nome do processo físico relacionado? Explique a razão da ruptura de frascos de vidro submetidos a essas condições.
b) Em determinado dia quente, a mãe inicia um dos seus "processos de esterilização". Dentro do copo da mamadeira, que já se encontrava a 32 °C – temperatura ambiente –, derrama a água fervente que, devido à localização geográfica de seu bairro, ferve a 98 °C. Considerando que não houve perda de calor para o meio externo, se após o equilíbrio a água derramada estava a 92 °C e sabendo que a densidade da água é 1 g/mL e o calor específico é 1 cal/(g °C), determine a capacidade térmica do copo da mamadeira.

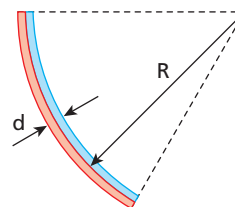
## Para raciocinar um pouco mais

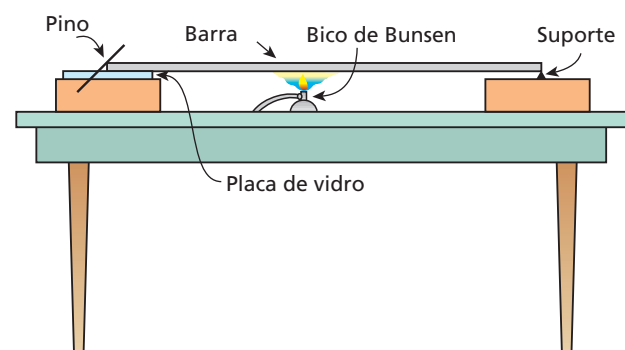
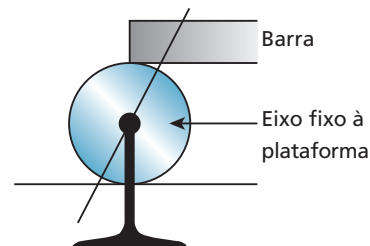
**85.** A figura representa um sólido maciço e homogêneo, feito de alumínio e na forma de um cone.
São dadas as seguintes informações:
I. O coeficiente de dilatação linear (**α**) do alumínio é $2,4 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$.
II. A área de um círculo de raio **R** é dada por $\pi R^2$.
III. A área total da superfície externa de um cone é dada por $\pi R (g + R)$, em que **R** é o raio do círculo da base do cone e **g**, a sua geratriz (veja a figura).
IV. O volume de um cone é dado por $\frac{\pi R^2 h}{3}$, em que **R** é o raio do círculo da base e **h** é a altura do cone.

Aquecendo-se esse cone de alumínio de $\Delta\theta$, observa-se que o raio da base **R** sofre uma dilatação correspondente a 2,0% de seu valor inicial.
Nessas condições, os aumentos percentuais da área total externa e do volume desse cone serão, respectivamente, de:
a) 2,0% e 2,0%.
b) 4,0% e 8,0%.
c) 2,0% e 4,0%.
d) 6,0% e 8,0%.
e) 4,0% e 6,0%.

**86.** (UEL-PR) Um retângulo é formado por um fio de cobre e outro de alumínio, como mostra a figura A. Sabendo-se que o coeficiente de dilatação linear do cobre é de $17 \times 10^{-6}$ °C$^{-1}$ e o do alumínio é de $24 \times 10^{-6}$ °C$^{-1}$, qual o valor do ângulo $\alpha$ se a temperatura do retângulo for elevada de 100 °C, como está apresentado na figura B?

Figura A
Figura B

a) 89,98°
b) 30°
c) 15°
d) 0,02°
e) 60°

**87.** (UFC) Um triângulo retângulo isósceles é montado com arames de materiais distintos, de modo que nos catetos o material possui coeficiente de dilatação térmica linear $A\sqrt{2}$ °C$^{-1}$, enquanto na hipotenusa o material possui coeficiente de dilatação térmica linear $\frac{A}{\sqrt{2}}$ °C$^{-1}$. Determine a variação de temperatura para que o triângulo torne-se equilátero.

**88.** (Olimpíada Brasileira de Física) Uma lâmina bimetálica é constituída por uma junção de duas lâminas retilíneas que têm o mesmo comprimento quando estão à temperatura **T**. Ao aumentar sua temperatura para $T + \Delta T$ a lâmina se curva, formando um arco de circunferência de espessura total **d** (veja figura). Supondo que os coeficientes de dilatação linear das lâminas sejam respectivamente iguais a $\alpha_2$ e $\alpha_1$, com $\alpha_2 > \alpha_1$, e que as espessuras de cada lâmina, após a dilatação, sejam iguais, deduza a expressão do raio de curvatura **R** da junção entre as lâminas.

**89.** (Mack-SP) As rodas de uma locomotiva são discos metálicos e feitos de um material cujo coeficiente de dilatação linear é $20 \cdot 10^{-6}$ °C$^{-1}$. Quando essa locomotiva faz certo percurso, com as rodas à temperatura de 50 °C, cada uma delas realiza 40 000 voltas completas. Se as rodas da locomotiva estivessem à temperatura de 0 °C, o número de voltas inteiras que cada uma daria, quando a locomotiva realizasse esse mesmo percurso, seria
a) 40 030.
b) 40 040.
c) 40 050.
d) 40 060.
e) 40 070.

**90.** Em um experimento de dilatação térmica dos sólidos usou-se uma barra de alumínio de 1,0 metro de comprimento a uma temperatura inicial de 20 °C, conforme o esquema a seguir.

Aquecendo-se a barra, ela se expande e faz o pino cilíndrico (de 5,0 mm de raio) rolar em torno do eixo fixo, movendo o ponteiro.

A extremidade presa ao suporte se mantém fixa.
A que temperatura deve ser aquecida a barra para que o ponteiro gire 45° a partir de sua posição inicial?
**Dados:** coeficiente de dilatação linear do alumínio $= 2 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$;
$\pi = 3,2$.
a) 220 °C.
b) 150 °C.
c) 200 °C.
d) 45 °C.
e) 520 °C.

**91.** (ITA-SP) Um relógio de pêndulo, construído de um material de coeficiente de dilatação linear $\alpha$, foi calibrado a uma temperatura de 0 °C para marcar um segundo exato ao pé de uma torre, de altura **h**. Elevando-se o relógio até o alto da torre, observa-se certo atraso, mesmo mantendo-se a temperatura constante. Considerando **R** o raio da Terra, **L** o comprimento do pêndulo a 0 °C e que o relógio permaneça ao pé da torre, então a temperatura para a qual se obtém o mesmo atraso é dada pela relação:

a) $\frac{2h}{\alpha R}$

b) $\frac{h(2R + h)}{\alpha R^2}$

c) $\frac{(R + h)^2 - LR}{\alpha L R}$

d) $\frac{R(2h + R)}{\alpha (R + h)^2}$

e) $\frac{2R + h}{\alpha R}$

**92.** (ITA-SP) Um relógio tem um pêndulo de 35 cm de comprimento. Para regular seu funcionamento, ele possui uma porca de ajuste que encurta o comprimento do pêndulo de 1 mm a cada rotação completa à direita e alonga este comprimento de 1 mm a cada rotação completa à esquerda. Se o relógio atrasa um minuto por dia, indique o número aproximado de rotações da porca e sua direção necessários para que ele funcione corretamente.

a) 1 rotação à esquerda

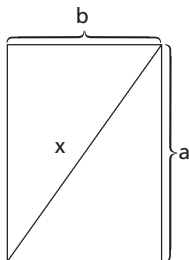
b) $\frac{1}{2}$ rotação à esquerda

c) $\frac{1}{2}$ rotação à direita

d) 1 rotação à direita

e) 1 e $\frac{1}{2}$ rotações à direita.

**93.** (UFU-MG) Uma armação apresenta um formato retangular de lados **a** e **b**, sendo o lado **a** duas vezes maior do que o lado **b**, conforme a figura a seguir. Os coeficientes de dilatação linear dos lados **a** e **b** são iguais a $\alpha_a$ e $\alpha_b$, respectivamente. Ao longo da diagonal da armação retangular, é fixada uma barra de comprimento **x** feita de certo material, com coeficiente de dilatação linear $\alpha_x$.

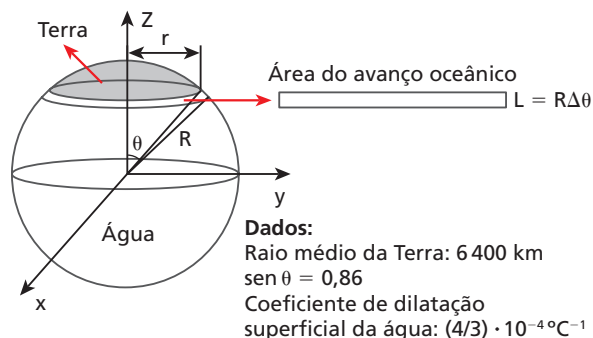
Determine o coeficiente de dilatação linear $\alpha_x$ em função dos coeficientes de dilatação $\alpha_a$ e $\alpha_b$, de forma que a barra não fique nem tensionada nem comprimida devido às variações de temperatura.

**94.** (UFU-MG) Uma barra de 10 kg de um determinado metal a 600 °C é colocada dentro de um recipiente com paredes adiabáticas de volume 273 L. Inicialmente, dentro do recipiente, há 1 000 g de certo gás perfeito à pressão de 1 atmosfera e à temperatura de 0 °C.

Nessas condições, determine:

a) A temperatura final da barra de metal, sabendo-se que o calor específico do metal e do gás são dados, respectivamente, por $c_M = 0{,}1$ cal/g °C e $c_{gás} = 0{,}2$ cal/g °C.

b) A variação de volume da barra de metal, dado que o seu coeficiente de dilatação linear e a sua densidade inicial são, respectivamente, $\alpha_M = \left(\frac{10}{3}\right) \cdot 10^{-4}$ °C$^{-1}$ e $\rho_M = 1 \cdot 10^2$ kg/m$^3$.

c) A pressão final do gás (aproximada até a primeira casa decimal), admitindo que o volume do recipiente não se altera.

**95.** (UFG-GO) Tem-se atribuído o avanço dos oceanos sobre a costa terrestre ao aquecimento global. Um modelo para estimar a contribuição da dilatação térmica é considerar apenas a dilatação superficial da água dos oceanos, onde toda superfície terrestre está agrupada numa calota de área igual a 25% da superfície do planeta e o restante é ocupado pelos oceanos, conforme ilustra a figura.

De acordo com o exposto, calcule a variação de temperatura dos oceanos responsável por um avanço médio de L = 6,4 m sobre a superfície terrestre.

**96.** (Fundação Carlos Chagas) Um pequeno recipiente de porcelana está completamente cheio de mercúrio, a 0 °C. Nessa temperatura o recipiente contém 136 g de mercúrio. Aquecendo-se o conjunto a 100 °C extravasam 0,40 g de mercúrio. Nestas condições, o coeficiente de dilatação linear da porcelana, em °C$^{-1}$, vale aproximadamente:

a) $1{,}0 \cdot 10^{-6}$

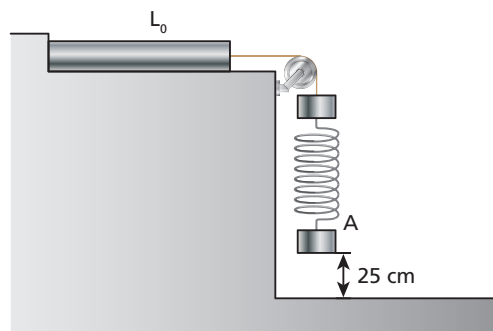
b) $5{,}0 \cdot 10^{-6}$

c) $1{,}0 \cdot 10^{-5}$

d) $5{,}0 \cdot 10^{-5}$

e) $1{,}0 \cdot 10^{-4}$

**Dados:** Coeficiente de dilatação do mercúrio = $1{,}80 \cdot 10^{-4}$ °C$^{-1}$.
Densidade do mercúrio a 0 °C = 13,6 g/cm$^3$

**97.** O sistema observado a seguir encontra-se inicialmente em equilíbrio. A barra metálica de coeficiente de dilatação linear igual a $8 \cdot 10^{-4}$ °C$^{-1}$ tem comprimento inicial de 6,25 metros. O fio e a mola são ideais, de massas desprezíveis, sendo a constante elástica da mola igual a 400 N/m. o bloco A tem massa de 10 kg e a aceleração da gravidade no local vale 10 m/s$^2$.

Quanto deve ser aquecida (somente) a barra metálica para que o bloco A encoste no solo e a mola, de comprimento natural igual a 0,50 metro, não experimente deformação?

# Parte II

Thinkstock/Getty Images

# Ondulatória



Henry Guttmann/Getty Images

Heinrich Rudolf Hertz
(1857-1894)

# Tópico 1

# Movimento harmônico simples

## Bloco 1

### 1. Introdução

O estudo dos movimentos oscilatórios, dentre os quais se enquadram os chamados movimentos harmônicos simples, tem importantes aplicações.

Com ele, pode-se entender, por exemplo, que um lustre suspenso, balançando num movimento de vaivém, nos permite determinar a duração aproximada de um intervalo de tempo. Para isso, basta que se conheça o comprimento do lustre, o valor da aceleração da gravidade local e o número de vaivéns que o lustre realiza nesse intervalo de tempo.

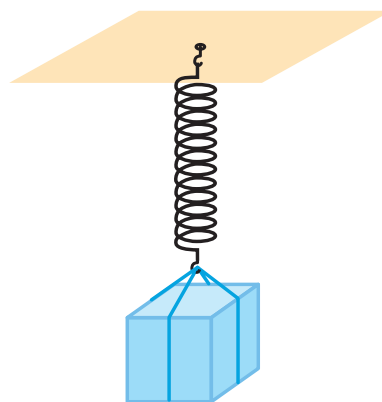
Thales Trigo

Se já forem conhecidos o tempo de duração de cada vaivém e o comprimento do lustre, será possível estimar o valor da aceleração da gravidade.

Note que o lustre se comporta como o pêndulo de um relógio.

Thales Trigo

Em alguns relógios de pêndulo, o mecanismo opera devido à energia potencial elástica armazenada quando alguém lhes dá corda. Em outros, a operação é mantida em virtude da energia potencial de gravidade de massas suspensas, que vão descendo com o passar das horas.

Com o estudo dos movimentos oscilatórios, também poderemos entender que uma mola e um cronômetro permitem a determinação da massa de um corpo, independentemente da gravidade local, que pode até ser nula, ou aparentemente nula, como no interior de uma nave em órbita. Para isso, basta conhecer a constante elástica da mola e o intervalo de tempo que o corpo, nela suspenso, demora para completar um vaivém.

Também é importante conhecer os conceitos estudados neste Tópico para que, nos Tópicos seguintes, possamos fazer um estudo mais consistente de Ondulatória.

## 2. Movimento periódico

Um movimento é **periódico** quando a posição, a velocidade e a aceleração do móvel (estado cinemático) repetem-se em intervalos de tempo iguais. O movimento elíptico de translação de um planeta em relação ao Sol é um exemplo de movimento periódico.

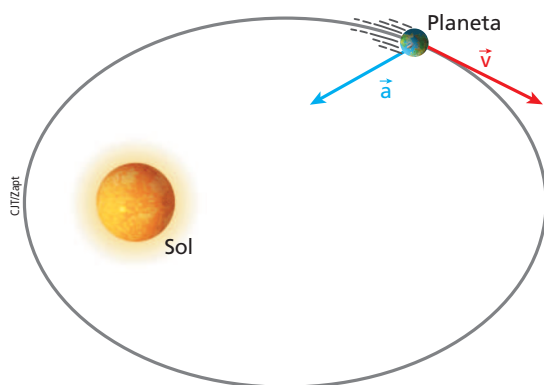



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.

A cada volta que o planeta completa a partir da posição indicada na figura, sua posição, sua velocidade vetorial ($\vec{v}$) e sua aceleração vetorial ($\vec{a}$) repetem-se.

Também são exemplos de movimentos periódicos o movimento de rotação da Terra e os realizados pelos ponteiros de um relógio.

O intervalo de tempo necessário para que ocorra uma repetição do movimento é denominado **período** do movimento (**T**). Assim, se ocorrerem **n** repetições do movimento num intervalo de tempo $\Delta t$, seu período será:

$$T = \frac{\Delta t}{n} \qquad \text{(I)}$$

O período pode ser medido em qualquer unidade de tempo. No SI, sua unidade é o **segundo** (**s**).

Outra grandeza a ser destacada num movimento periódico é sua **frequência** (**f**), que corresponde ao número de vezes que esse movimento se repete na unidade de tempo. Assim, ocorrendo **n** repetições do movimento no intervalo de tempo $\Delta t$, sua frequência é:

$$f = \frac{n}{\Delta t} \qquad \text{(II)}$$

Comparando as expressões (I) e (II), temos:

$$f = \frac{1}{T}$$

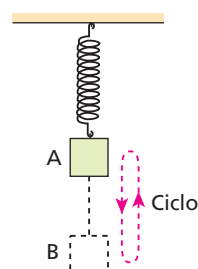
A unidade de frequência, no SI, é o **hertz** (**Hz**). A frequência de 1 Hz significa que o movimento repete-se uma vez por segundo.

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

## 3. Movimento oscilatório

Um movimento é **oscilatório** (ou vibratório) quando ocorre com alternâncias de sentido, porém na mesma trajetória para os dois sentidos.

É o caso, por exemplo, do movimento do pêndulo de um relógio de parede.

A figura abaixo representa o movimento de um bloco que oscila periodicamente entre os pontos **A** e **B**.

Desprezada a dissipação de energia mecânica, o movimento do bloco é periódico e oscilatório.

Quando o bloco repete uma situação inicial, dizemos que completou um **ciclo**, uma **vibração** ou uma **oscilação**. É o que acontece quando ele sai de **A**, vai até **B** e volta a **A**.

O intervalo de tempo decorrido num ciclo é o **período** do movimento e o número de ciclos completados na unidade de tempo é a **frequência**.

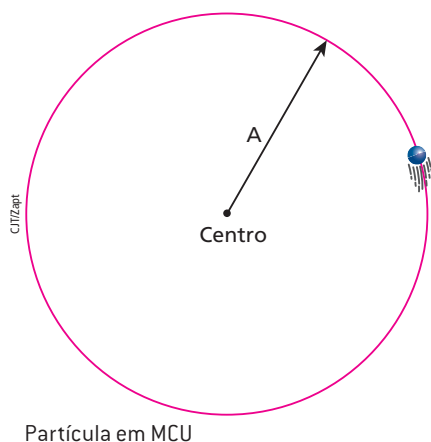
Veja, na tabela, os períodos de oscilação de alguns sistemas mecânicos:

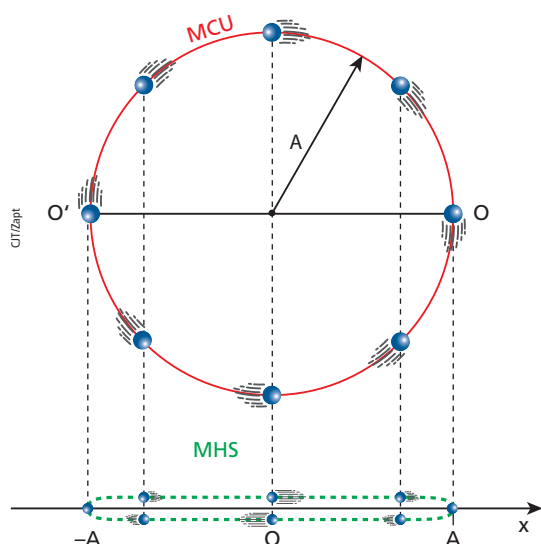
| Sistema | Período |
|---|---|
| Grandes estruturas (como pontes e edifícios) | maior que 1 s |
| Cordas vocais | de $10^{-2}$ s a $10^{-3}$ s |
| Colunas de ar em instrumentos musicais de sopro | de $10^{-2}$ s a $10^{-3}$ s |
| Cordas de instrumentos musicais | de $10^{-2}$ s a $10^{-4}$ s |

## 4. Movimento harmônico simples

Certos movimentos oscilatórios e periódicos, descritos por funções horárias harmônicas (funções seno ou cosseno), são denominados **movimentos harmônicos simples** (**MHS**).

Para simplificar o estudo desses movimentos, podemos partir do movimento circular e uniforme (MCU).

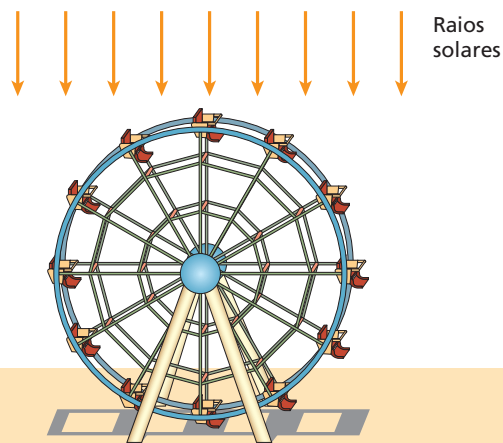
Observe a figura a seguir, que representa uma partícula em movimento circular e uniforme numa circunferência de raio **A**.

Partícula em MCU

Agora, vamos fazer a projeção desse MCU sobre um eixo Ox, paralelo ao diâmetro OO' da circunferência e contido no plano dela:

Com isso, podemos observar que, enquanto a partícula em MCU desloca-se do ponto **O** até o ponto **O'**, sua projeção desloca-se do ponto de abscissa $x = A$ até o ponto de abscissa $x = -A$. Da mesma maneira, enquanto a partícula em MCU desloca-se de **O'** até **O**, a projeção desloca-se de $x = -A$ até $x = A$.

Esse movimento retilíneo da projeção também é periódico e oscilatório. Além disso, o período desse movimento da projeção é igual ao período do movimento circular e uniforme. O movimento da projeção do MCU sobre o eixo Ox é um movimento harmônico simples (MHS).

No MHS, a abscissa (espaço) **x** é medida a partir do ponto médio da trajetória e denomina-se **elongação**.

Observe, então, que no ponto médio da trajetória temos $x = 0$ (elongação nula) e nos pontos extremos da trajetória temos $x = -A$ (**elongação mínima**) e $x = A$ (**elongação máxima**).

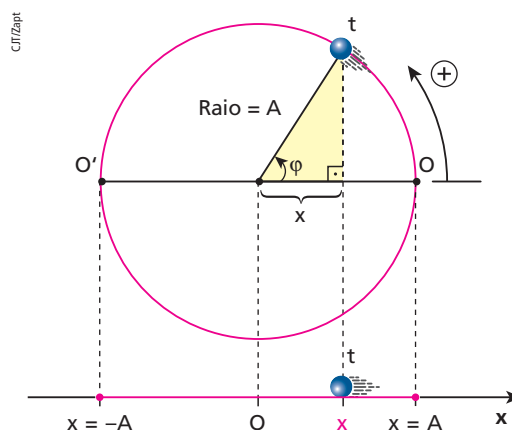
A grandeza **A**, que corresponde ao raio da circunferência e é também a elongação máxima do MHS, denomina-se **amplitude** do MHS.

Com o Sol a pino e a roda-gigante em rotação uniforme, a sombra de cada cadeira, projetada no chão, realiza um MHS.

**Nota:**

- O movimento oscilatório do bloco preso a uma mola, mostrado no item 3 deste Tópico, é um movimento harmônico simples, como provaremos mais adiante. Observe, então, que a existência de um MHS não implica necessariamente a existência **concreta** do MCU gerador. Este último pode ser fictício.

## 5. Função horária da elongação no MHS

Na figura a seguir, destacamos a posição ocupada no instante **t** por uma partícula em MCU numa circunferência de raio **A**, bem como a posição de sua projeção sobre o eixo Ox, paralelo ao diâmetro OO' e contido no plano da circunferência.

TF2-P2T1_169a197_5P.indd 172 17/08/12 18:23

Seja $\omega$ a velocidade angular da partícula em MCU.

O ângulo $\varphi$, denominado **fase** do movimento, estabelece a posição da partícula em relação ao ponto **O** da circunferência e é dado por:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

No triângulo retângulo destacado, temos:

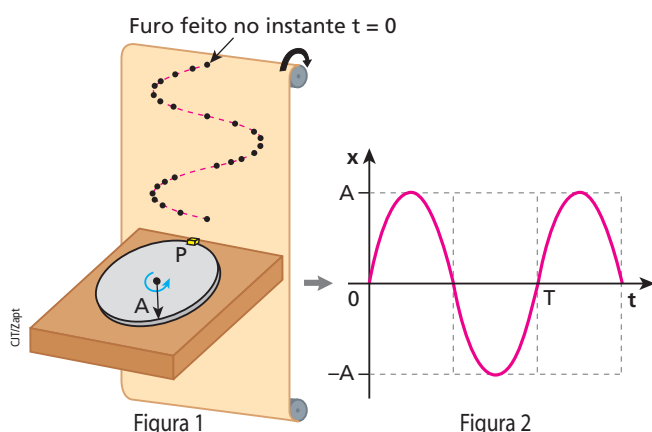
$$x = A \cos \varphi \qquad \text{(I)}$$

Como $\varphi = \omega t + \varphi_0$, obtemos, de (I):

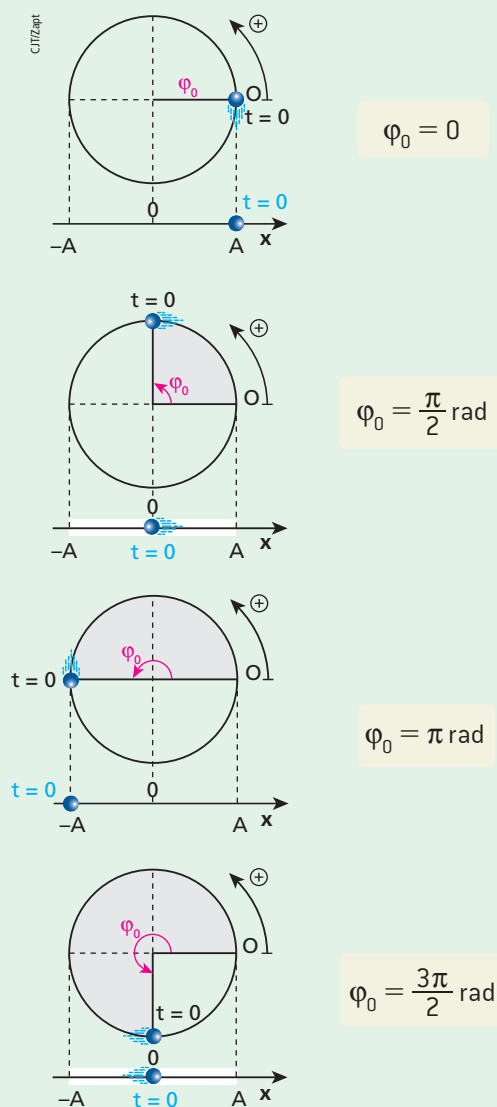
$$x = A \cos (\omega t + \varphi_0)$$

Sobre essa expressão, que é a **função horária da elongação** no MHS, é importante observar que:

- a constante **A** (raio da circunferência em que ocorre o MCU) é a amplitude do MHS;
- a constante $\omega$ (velocidade angular da partícula em MCU) é denominada **pulsação** ou **frequência angular** do MHS;
- a constante $\varphi_0$ é a **constante de fase** ou **fase inicial**, isto é, o valor da fase $\varphi$ no instante $t = 0$. Para valores fixados de **A** e $\omega$, a fase inicial $\varphi_0$ determina as características do MHS em $t = 0$.

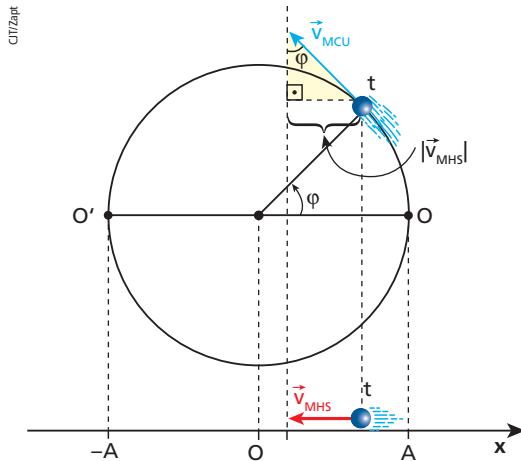
A ilustração a seguir mostra como poderia ser obtida uma representação gráfica da elongação **x** em função do tempo **t**.

A figura 1 representa um toca-discos. O prato, de raio **A**, está em movimento de rotação uniforme de período **T**. Suponha que o dispositivo **P**, acoplado à periferia do prato, atire projéteis periodicamente, sempre numa direção perpendicular a uma fita que sobe com velocidade constante, perfurando-a. Se o intervalo de tempo entre dois tiros consecutivos for bem menor que **T**, as perfurações da fita determinarão uma linha sinusoidal, que corresponde ao gráfico da elongação **x** em função do tempo **t** para o MHS gerado pela projeção do MCU (figura 2).

## Fase inicial do MHS ($\varphi_0$)

As figuras a seguir ilustram alguns valores notáveis de $\varphi_0$.

A fase inicial caracteriza o MHS em $t = 0$. Para cada situação possível do MHS, em $t = 0$, temos um valor de $\varphi_0$ ($0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad), que pode ser determinado facilmente fazendo a correspondência do MHS com um MCU que seja capaz de gerá-lo por projeção. Assim, para cada situação inicial possível do MHS existe uma situação particular do MCU. Para determinar $\varphi_0$, admitimos um sentido para o MCU (no caso dos exemplos, sentido anti-horário). A partir do ponto **O** da circunferência, cuja projeção cai em $x = A$, medimos $\varphi_0$ no mesmo sentido admitido para o MCU. Esse procedimento é válido para qualquer outra direção do MHS.

## 6. Função horária da velocidade escalar instantânea

No item anterior, determinamos a posição no MHS pela projeção da posição no MCU.

A velocidade instantânea no MHS também é determinada pela projeção da velocidade no MCU sobre a trajetória em que se dá o MHS. Essa projeção está ilustrada na figura a seguir.

No triângulo retângulo destacado, temos:

$$|\vec{v}_{MHS}| = |\vec{v}_{MCU}| \text{ sen } \varphi$$

Lembrando que:

$$|\vec{v}_{MCU}| = \omega A \quad \text{e} \quad \varphi = \omega t + \varphi_0$$

obtemos:

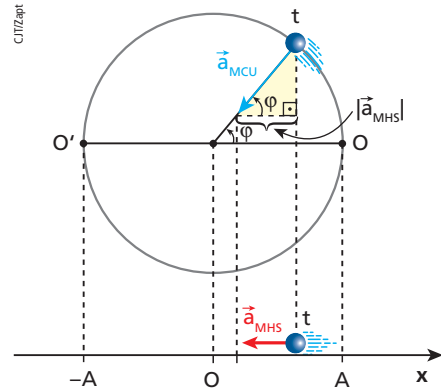
$$|\vec{v}_{MHS}| = \omega A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$$

Como o MHS tem sentido contrário ao do eixo Ox (movimento retrógrado) no instante **t**, obtemos a seguinte expressão da velocidade escalar instantânea **v** para esse movimento:

$$v = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$$

Essa é a função horária da velocidade escalar instantânea em um MHS.

## 7. Função horária da aceleração escalar instantânea

A aceleração instantânea no MHS é determinada também pela projeção da aceleração no MCU, que é centrípeta, sobre a trajetória em que ocorre o MHS. Essa projeção está representada na figura a seguir.

No triângulo destacado na figura, temos:

$$|\vec{a}_{MHS}| = |\vec{a}_{MCU}| \cos \varphi$$

Como:

$$|\vec{a}_{MCU}| = \omega^2 A \quad \text{e} \quad \varphi = \omega t + \varphi_0$$

obtemos:

$$|\vec{a}_{MHS}| = \omega^2 A \cos (\omega t + \varphi_0)$$

Observando que o MHS é acelerado no instante **t**, concluímos que nesse instante a velocidade escalar e a aceleração escalar devem ter o mesmo sinal. Sendo negativa a velocidade escalar, deduzimos que a aceleração escalar também é negativa. Obtemos, então, para o MHS, a função horária da aceleração escalar instantânea **α**, como segue:

$$\alpha = -\omega^2 A \cos (\omega t + \varphi_0)$$

## 8. Velocidade escalar no MHS em função da elongação

Já vimos como a velocidade escalar no MHS varia em função do **tempo** (**t**). Veremos agora como essa velocidade relaciona-se com a **elongação** (**x**). Para isso, temos:

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \cos (\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A}$$

$$v = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \text{sen } (\omega t + \varphi_0) = \frac{-v}{\omega A}$$

Lembrando que a soma do quadrado do seno com o quadrado do cosseno de um mesmo ângulo é sempre igual a 1, temos:

$$\left(\frac{-v}{\omega A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

E assim:

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

Observe que, nessa expressão, a velocidade escalar é dada em função da elongação (**x**) e não em função do tempo (**t**).

### Velocidade escalar nos pontos de inversão e no ponto central

Os **pontos de inversão** do movimento harmônico simples são as extremidades da trajetória, ou seja, os pontos de elongação $x = A$ e $x = -A$. Substituindo esses valores de **x** na expressão deduzida, obtemos:

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - A^2) = 0 \Rightarrow v = 0$$

Assim, concluímos que a velocidade é nula nos pontos de inversão, como era esperado.

No **ponto central** da trajetória do MHS, a elongação é nula. Substituindo $x = 0$ naquela expressão, obtemos:

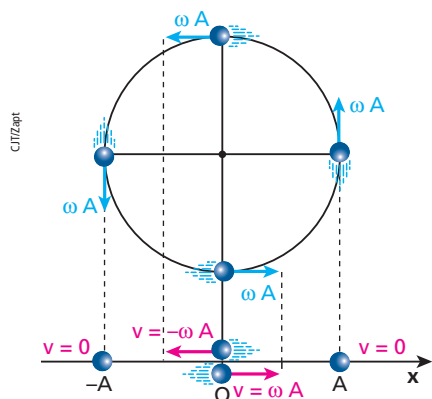
$$v^2 = \omega^2 (A^2 - 0) = \omega^2 A^2 \Rightarrow v = \pm \omega A$$

(máxima, em valor absoluto)

Assim, concluímos que a velocidade escalar no ponto central é igual a $+\omega A$, quando o movimento ocorre no sentido da trajetória, e $-\omega A$, quando ocorre em sentido oposto.

Observe, então, que:

> A **velocidade escalar máxima** no MHS é dada pelo produto da pulsação pela amplitude, ocorrendo no ponto central da trajetória:
>
> $$v_{máx} = \omega A$$

Também podemos chegar a esses resultados pela projeção direta da velocidade no MCU sobre a trajetória do MHS, como ilustra a figura abaixo.

## 9. Aceleração escalar no MHS em função da elongação

Já obtivemos uma expressão que relaciona a aceleração escalar no MHS com o **tempo** (**t**). É muito importante, porém, relacioná-la também com a **elongação** (**x**).

Para tanto, usaremos as seguintes expressões, já deduzidas:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{(I)}$$

$$\alpha = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\alpha = -\omega^2 x$$

### Aceleração escalar nos pontos de inversão e no ponto central

Nos **pontos de inversão** do MHS, temos $x = A$ e $x = -A$.

Em $x = A$: $\alpha = -\omega^2 A$ (valor mínimo)

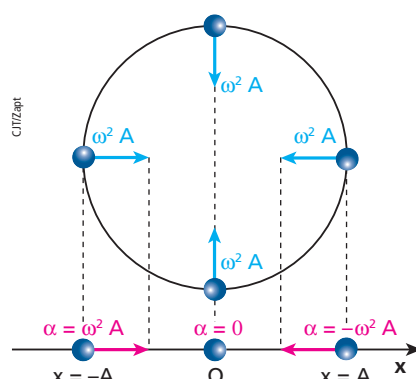
Em $x = -A$: $\alpha = \omega^2 A$ (valor máximo)

No **ponto central** da trajetória do MHS, temos $x = 0$. Consequentemente, a aceleração escalar é nula nesse ponto:

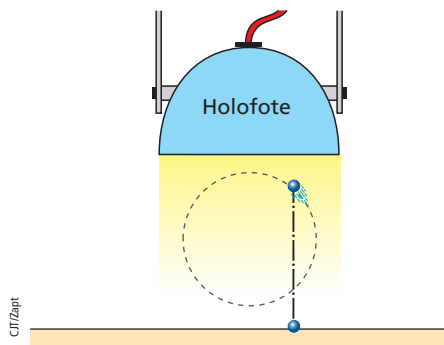
$$\alpha = 0$$

Destaquemos que:

> A **aceleração escalar máxima** no MHS é dada pelo produto do quadrado da pulsação pela amplitude, ocorrendo no ponto de inversão em que a elongação é $x = -A$:
>
> $$\alpha_{máx} = \omega^2 A$$

Também podemos obter esses resultados pela projeção da aceleração no MCU sobre a trajetória do MHS, como ilustra a figura abaixo.

## Exercícios

nível 1

**1.** Um holofote emite um feixe cilíndrico e vertical de luz dirigido contra o solo, plano e horizontal. Uma pequena esfera opaca executa movimento circular e uniforme no interior desse feixe. A trajetória da esfera está contida num plano vertical.

Analise as afirmações a seguir:

I. O movimento da sombra projetada pela esfera é periódico e oscilatório.
II. O movimento da sombra tem o mesmo período do movimento da esfera.
III. Enquanto a esfera descreve uma semicircunferência, a sombra completa uma oscilação.
IV. A amplitude do movimento da sombra é igual ao diâmetro da circunferência descrita pela esfera.
V. O movimento da sombra é harmônico simples.

Indique a alternativa verdadeira.

a) Se apenas I e V forem corretas.
b) Se apenas I, II, IV e V forem corretas.
c) Se apenas I, II e V forem corretas.
d) Se apenas V for correta.
e) Se todas forem corretas.

**2.** (ITA-SP) Uma nave espacial está circundando a Lua em uma órbita circular de raio **R** e período **T**. O plano da órbita dessa nave é o mesmo que o plano da órbita da Lua ao redor da Terra.
Nesse caso, para um observador terrestre, se ele pudesse enxergar a nave (durante todo o tempo), o movimento dela, em relação à Lua, pareceria:

a) um movimento circular uniforme de raio **R** e período **T**.
b) um movimento elíptico.
c) um movimento periódico de período 2T.
d) um movimento harmônico simples de amplitude **R**.
e) diferente dos citados acima.

**3. E.R.** Uma partícula move-se ao longo de um eixo Ox, obedecendo à função $x = 2 \cos \pi t$ (SI), em que **x** é a elongação e **t** é o tempo.
Obtenha:

a) a amplitude, a pulsação, o período, a frequência e a fase inicial do movimento;
b) os valores máximos da velocidade escalar e da aceleração escalar da partícula;
c) o gráfico da elongação em função do tempo, no intervalo de t = 0 a t = 2 s.

**Resolução:**

a) Temos:
$x = 2 \cos \pi t$ e $x = A \cos (\omega t + \varphi_0)$
Comparando essas expressões, termo a termo, temos:

$$\boxed{A = 2\text{ m}} \text{ (amplitude)}$$

$$\boxed{\omega = \pi \text{ rad/s}} \text{ (pulsação)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T = 2\text{ s}} \text{ (período)}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{f = 0{,}5\text{ Hz}} \text{ (frequência)}$$

$$\boxed{\varphi_0 = 0} \text{ (fase inicial)}$$

b) Temos:

$$v_{máx} = \omega A \quad \text{e} \quad \alpha_{máx} = \omega^2 A$$

Então:

$$v_{máx} = \pi \cdot 2 \Rightarrow \boxed{v_{máx} = 2\pi \text{ m/s}}$$

$$\alpha_{máx} = \pi^2 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{máx} = 2\pi^2 \text{ m/s}^2}$$

c) Vamos calcular a elongação nos instantes t = 0, t = 0,5 s, t = 1 s, t = 1,5 s e t = 2 s:

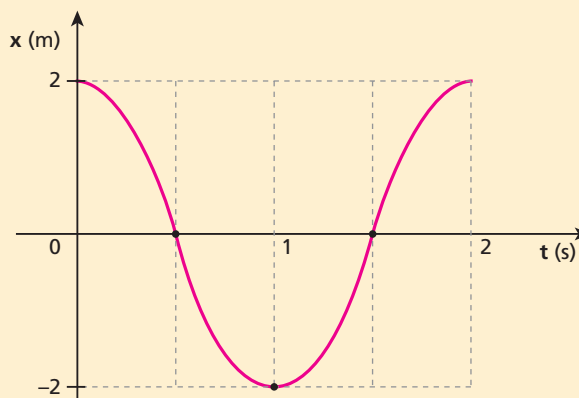
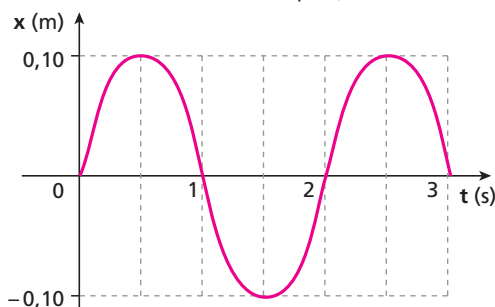
$t = 0 \Rightarrow x = 2 \cos (\pi \cdot 0) \Rightarrow x = 2$ m

$t = 0{,}5$ s $\Rightarrow x = 2 \cos (\pi \cdot 0{,}5) \Rightarrow x = 0$

$t = 1$ s $\Rightarrow x = 2 \cos (\pi \cdot 1) \Rightarrow x = -2$ m

$t = 1{,}5$ s $\Rightarrow x = 2 \cos (\pi \cdot 1{,}5) \Rightarrow x = 0$

$t = 2$ s $\Rightarrow x = 2 \cos (\pi \cdot 2) \Rightarrow x = 2$ m

Agora, vamos construir o gráfico pedido:

**4.** (Vunesp-SP) A partir do gráfico a seguir, que representa as posições ocupadas por um móvel em função do tempo quando oscila em movimento harmônico simples, determine:

a) a frequência e a amplitude do movimento;
b) os instantes, durante os três primeiros segundos, em que a velocidade se anulou.

**5.** (Mack-SP) Uma partícula realiza um MHS (movimento harmônico simples) segundo a equação $x = 0{,}2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)$, no SI. A partir da posição de elongação máxima, o menor tempo que esta partícula gastará para passar pela posição de equilíbrio é:
a) 8 s.
b) 4 s.
c) 2 s.
d) 1 s.
e) 0,5 s.

## Exercícios nível 2

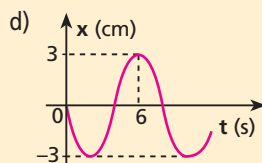
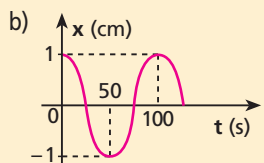
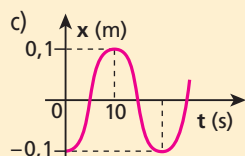
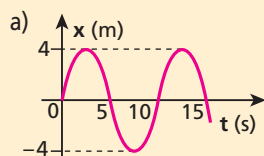
**6.** Uma partícula move-se obedecendo à função horária $x = 2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, com **x** em metros e **t** em segundos.
Determine:
a) o período do movimento;
b) a velocidade escalar da partícula em t = 1 s;
c) a aceleração escalar da partícula em t = 5 s.

**7. E.R.** Observe as quatro representações gráficas da elongação em função do tempo, para movimentos harmônicos simples:

a) 


c) 


b) 


d) 


Em cada caso, expresse analiticamente a elongação em função do tempo [x = f(t)].

**Resolução:**

a) Do gráfico, temos:

A = 4 m

$T = 10 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$

Em t = 0, a elongação **x** é **nula** e **crescente**. Por isso,

$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ rad.

Lembrando que $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, obtemos:

$$x = 4 \cos\left(\frac{\pi}{5} t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{(SI)}$$

b) Do gráfico, temos:

A = 1 cm

$T = 100 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{100} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{50} \text{ rad/s}$

Em t = 0, a elongação **x** é igual à amplitude **A**. Por isso, $\varphi_0 = 0$.

Então:

$$x = 1 \cos \frac{\pi}{50} t$$ (**x** em cm e **t** em s)

c) A = 0,1 m

$T = 20 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$

Em t = 0, temos x = –A. Por isso, $\varphi_0 = \pi$ rad.

Assim, temos:

$$x = 0{,}1 \cos\left(\frac{\pi}{10} t + \pi\right) \quad \text{(SI)}$$

d) A = 3 cm

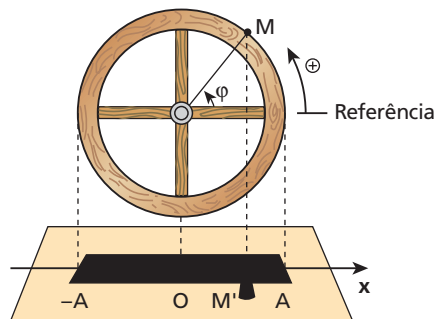
$T = 8 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$

Em t = 0, a elongação **x** é **nula** e **decrescente**. Por isso,

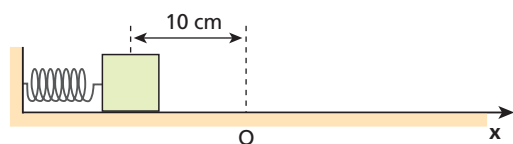
$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Obtemos, então:

$$x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{2}\right)$$ (**x** em cm e **t** em s)

**8.** Uma roda munida de uma manivela **M** é iluminada pela luz do Sol a pino, projetando sombra em solo plano e horizontal. A roda executa movimento de rotação uniforme no sentido anti-horário em relação ao leitor, com frequência igual a 120 rpm. O raio da roda vale 0,5 m.

Determine a função horária da elongação correspondente ao movimento da sombra **M'** da manivela ao longo do eixo Ox nos seguintes casos:

a) no instante $t = 0$, **M'** está em $x = A$;
b) no instante $t = 0$, $M' \equiv O$ e o movimento de **M'** é retrógrado;
c) em $t = 0$, **M'** está no ponto médio entre $x = 0$ e $x = A$, em movimento progressivo.

**9.** A figura a seguir representa um corpo mantido em repouso, preso a uma mola ideal e apoiado em uma superfície plana e horizontal.

A mola está comprimida de 10 cm.
No instante $t = 0$, o corpo é abandonado e passa a realizar um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio **O**, que é a origem do eixo Ox, completando duas oscilações por segundo.
A função horária da velocidade escalar (**v**) desse corpo, no SI, é:

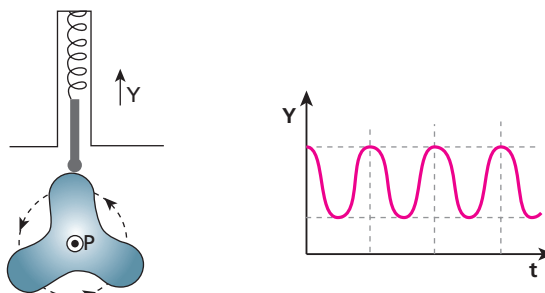
a) $v = -0{,}8\pi \cos (4\pi t + \pi)$.
b) $v = -0{,}4\pi \cos (4\pi t)$.
c) $v = -0{,}8\pi \text{ sen } (4\pi t + \pi)$.
d) $v = -0{,}4\pi \text{ sen } (4\pi t + \pi)$.
e) $v = -0{,}4\pi \text{ sen } (4\pi t)$.

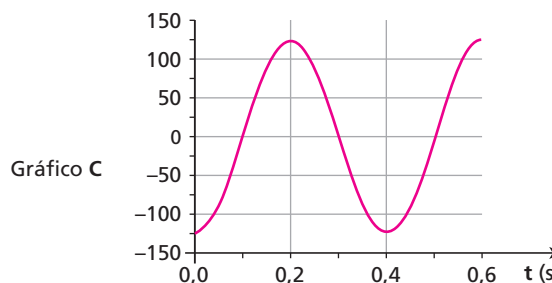
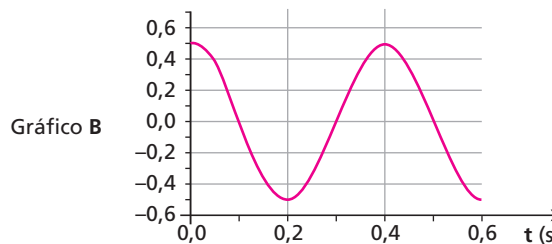
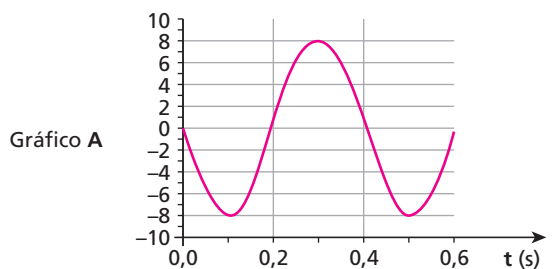
**10.** (ITA-SP) Uma partícula em movimento harmônico simples oscila com frequência de 10 Hz entre os pontos **L** e **–L** de uma reta. No instante $t_1$, a partícula está no ponto $\sqrt{3}\,\frac{L}{2}$, caminhando em direção a valores inferiores, e atinge o ponto $-\sqrt{2}\,\frac{L}{2}$ no instante $t_2$. O tempo gasto nesse deslocamento é:

a) 0,021 s.
b) 0,029 s.
c) 0,15 s.
d) 0,21 s.
e) 0,29 s.

**11.** Uma partícula executa MHS de frequência igual a 2 Hz e amplitude igual a 5 m. Calcule:

a) a velocidade escalar da partícula, quando ela está a 4 m do ponto de equilíbrio;
b) a aceleração escalar da partícula nos extremos da trajetória.

**12.** (Fuvest-SP) Uma peça, com a forma indicada, gira em torno de um eixo horizontal **P**, com velocidade angular constante e igual a $\pi$ rad/s. Uma mola mantém uma haste apoiada sobre a peça, podendo a haste mover-se **apenas** na vertical. A forma da peça é tal que, enquanto ela gira, a extremidade da haste sobe e desce, descrevendo, com o passar do tempo, um movimento harmônico simples Y(t) como indicado no gráfico. Assim, a frequência do movimento da extremidade da haste será de:

a) 3,0 Hz
b) 1,5 Hz
c) 1,0 Hz
d) 0,75 Hz
e) 0,5 Hz

**13.** (UFG-GO) Os gráficos **A**, **B**, **C** abaixo representam, em ordem aleatória, a posição (em m), a velocidade (em m/s) e a aceleração (em m/s²), em função do tempo (em s), de um corpo executando um movimento harmônico simples, sob a ação de uma força do tipo $F = -k\,x$.

Com base nos gráficos **A**, **B** e **C**:

a) identifique qual deles se refere à posição, qual à velocidade e qual à aceleração. Justifique sua resposta.
b) determine o deslocamento máximo do corpo em relação à origem (amplitude) e a frequência desse movimento.

# Bloco 2

## 10. Força no movimento harmônico simples

Vamos buscar aqui um critério que permita decidir se um corpo realiza ou não um MHS, a partir do conhecimento das forças que nele atuam.

No item anterior, você viu que a aceleração escalar de uma partícula em MHS em função da elongação é dada por:

$$\alpha = -\omega^2 x$$

O valor algébrico da força resultante que atua em uma partícula de massa **m** executando esse movimento retilíneo fica determinado pela expressão:

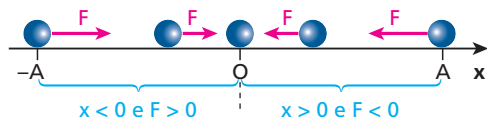
$$F = m\,\alpha \;\Rightarrow\; F = -m\,\omega^2 x$$

Como a massa **m** e a pulsação **ω** são constantes em um determinado MHS, podemos substituir **m ω²** por uma única constante **K**, denominada **constante de força** do MHS.

Obtemos, então:

$$F = -K\,x$$

Essa expressão revela que o valor algébrico da força resultante que atua em uma partícula em MHS é **proporcional** à elongação, tendo **F** e **x** sinais opostos. É essa característica que se deve ter em mente quando é preciso decidir se determinado movimento é ou não um movimento harmônico simples.

A força resultante num corpo em MHS é denominada **força restauradora**, porque ela atua de modo a garantir o prosseguimento das oscilações: toda vez que o corpo passa pela posição central, a força entra em ação para retardá-lo e, depois, trazê-lo de volta. Esse fato pode ser observado na análise de sinais na expressão $F = -K\,x$. Quando a elongação (**x**) é positiva, o valor algébrico da força (**F**) é negativo, o que significa que a força tem sentido oposto ao do eixo Ox. Quando, porém, a elongação é negativa, o valor algébrico da força é positivo, o que significa que a força tem o mesmo sentido do eixo Ox.

### Ponto de equilíbrio do MHS

No ponto central da trajetória do MHS, a elongação (**x**) é nula. O mesmo ocorre, consequentemente, com a força resultante.

Em qualquer movimento, o ponto da trajetória em que a força resultante se anula denomina-se **ponto de equilíbrio** do movimento.

A partir disso concluímos que:

> O **ponto de equilíbrio** de um MHS é o ponto central da trajetória, isto é, o ponto de elongação **x** igual a zero.

## 11. Período do MHS

Na maioria dos casos, a importância prática do MHS está no conhecimento de seu **período** (**T**), porque a partir dele podemos determinar outras grandezas.

Vamos, então, deduzir a expressão do período do MHS.

No item anterior, definimos a constante de força do MHS como sendo:

$$K = m\omega^2$$

Obtemos, daí, uma expressão para a pulsação do MHS:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Lembrando que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, temos:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Observe que o período (**T**) do MHS não depende da amplitude das oscilações, mas apenas da **massa** (**m**) oscilante e da **constante de força** (**K**).

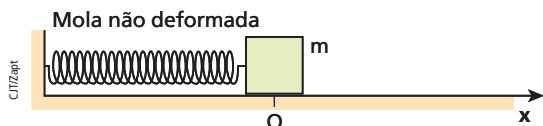
Como a frequência (**f**) é igual ao inverso do período, temos:

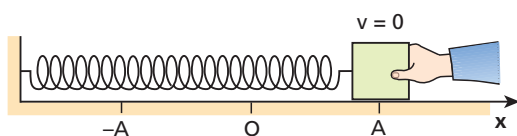
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Observe que, fixando o valor de **K**, a frequência é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa.

O exemplo a seguir, embora não se trate, de fato, de um movimento harmônico simples, é considerado útil para ilustrar a relação entre frequência e massa: um automóvel em movimento em uma estrada danificada chacoalha com uma frequência maior quando está com pouca carga (massa total menor).

## 12. Oscilador massa-mola horizontal

Considere um bloco de massa **m**, em repouso num plano horizontal suposto perfeitamente liso, preso a uma mola, como mostra a figura a seguir. A mola é supostamente de massa desprezível e sua constante elástica é **K**.

Observe que a posição do bloco é de equilíbrio, pois a mola não está deformada. Assim, a força resultante nele é nula. Um eixo Ox está associado ao plano horizontal, com a origem na posição de equilíbrio e na mesma direção do eixo da mola.

Vamos afastar o bloco da posição de equilíbrio, deslocando-o, por exemplo, para a direita até a posição $x = A$, e deixá-lo aí, como mostra a figura a seguir:

Supondo que a mola opere em regime de elasticidade perfeita e desprezando qualquer influência do ar, concluímos que o bloco executará, se solto, um movimento oscilatório e periódico entre $x = A$ e $x = -A$ (sistema conservativo).

Nesse movimento, a elongação é a própria deformação da mola. Além disso, a força elástica da mola é a força resultante sobre o bloco. Lembrando que a força elástica é proporcional à deformação da mola, obtemos a seguinte expressão para o valor algébrico da força resultante:

$$F = -K\,x$$

Isso prova que o movimento em questão é um movimento harmônico simples. Sendo assim, o período de oscilação é dado por:

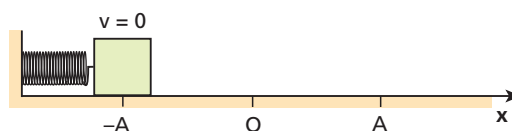
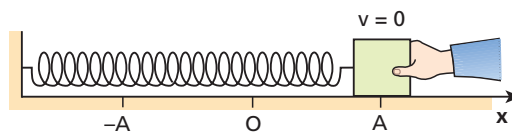
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Observe, mais uma vez, que o período não depende da amplitude, ou seja, da posição em que o bloco é abandonado para oscilar, desde que oscile nas condições ideais consideradas.

Podemos resumir as principais informações sobre o oscilador massa-mola em plano horizontal e em condições ideais da seguinte forma:

- O corpo preso à mola executa MHS.
- A elongação no MHS é, em módulo, a própria deformação (distensão ou contração) da mola.
- A força resultante no corpo é a própria força elástica aplicada pela mola.
- No ponto de equilíbrio, a força elástica (força resultante) é nula, e a mola não está deformada.

### Análise energética

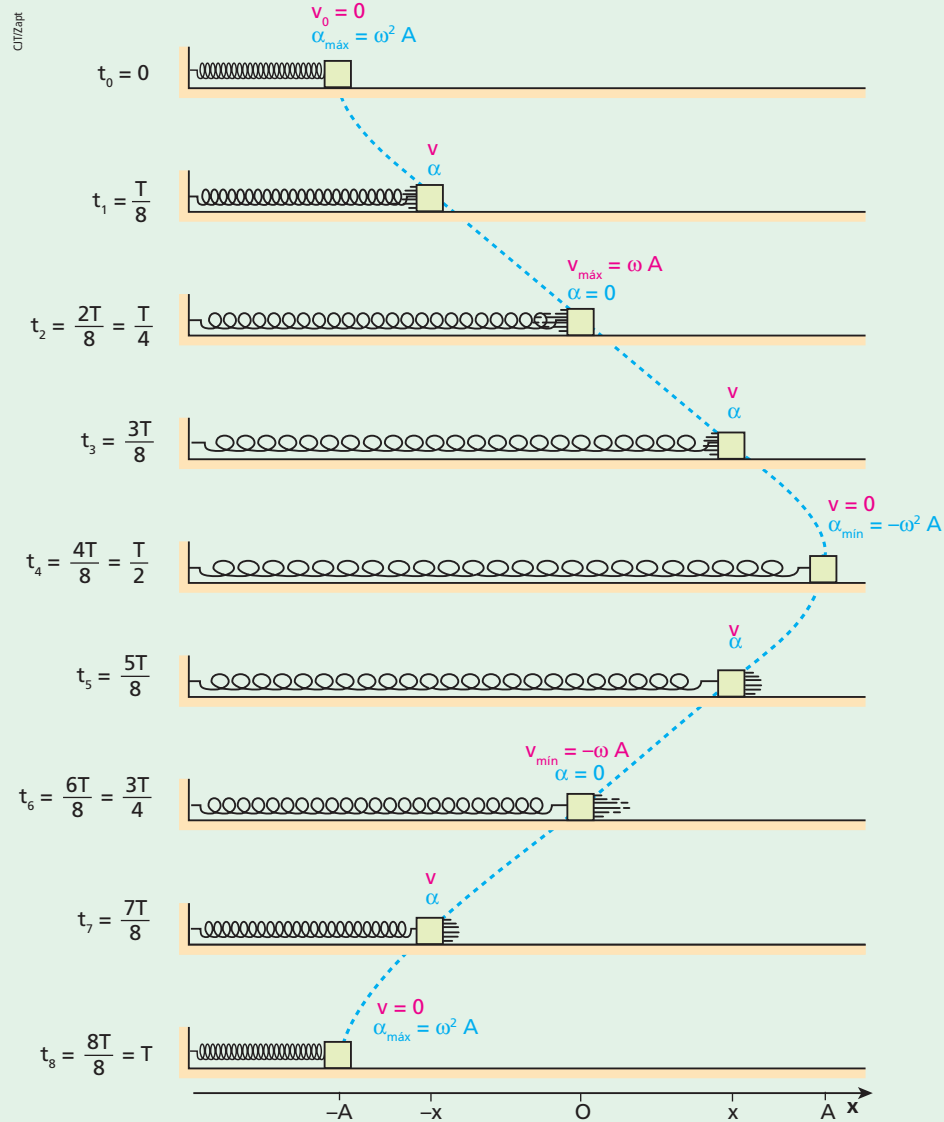
Vamos agora analisar a energia mecânica do oscilador descrito:

Na posição $x = A$, a energia potencial elástica ($E_p$) armazenada e a energia cinética ($E_c$) valem:

$$E_p = \frac{K\,A^2}{2} \quad \text{e} \quad E_c = 0$$

Assim, a energia mecânica do sistema é dada por:

$$E_m = E_p + E_c = \frac{K\,A^2}{2} + 0 \Rightarrow \boxed{E_m = \frac{K\,A^2}{2}}$$

Essa energia mecânica mantém-se constante, pois o sistema é conservativo. Ao se deslocar de $x = A$ até $x = 0$, toda a energia potencial elástica converte-se em energia cinética e o bloco passa por $x = 0$ com velocidade de módulo máximo. De $x = 0$ até $x = -A$, a energia cinética se converte em energia potencial elástica e o movimento oscilatório prossegue indefinidamente.

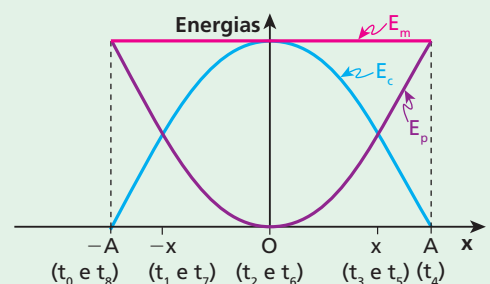
Um bloco de massa **m**, preso a uma mola de constante elástica **K**, executa um MHS de período **T**, apoiado em uma superfície plana e horizontal. Entre duas posições consecutivas representadas na figura decorre um intervalo de tempo igual a $\frac{T}{8}$:

Observe que:

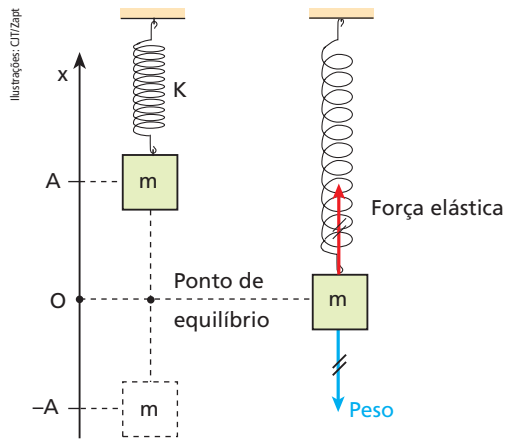
**Em $t_0$, $t_4$ e $t_8$:** $E_p = \frac{K \cdot A^2}{2}$ e $E_c = 0$

**Em $t_2$ e $t_6$:** $E_p = 0$ e $E_c = \frac{m\,\omega^2\,A^2}{2} = \frac{K\,A^2}{2}$

**Em $t_1$, $t_3$, $t_5$ e $t_7$:** $E_p = \frac{K\,x^2}{2}$ e $E_c = \frac{m\,v^2}{2}$

$$E_m = \frac{K\,A^2}{2}$$

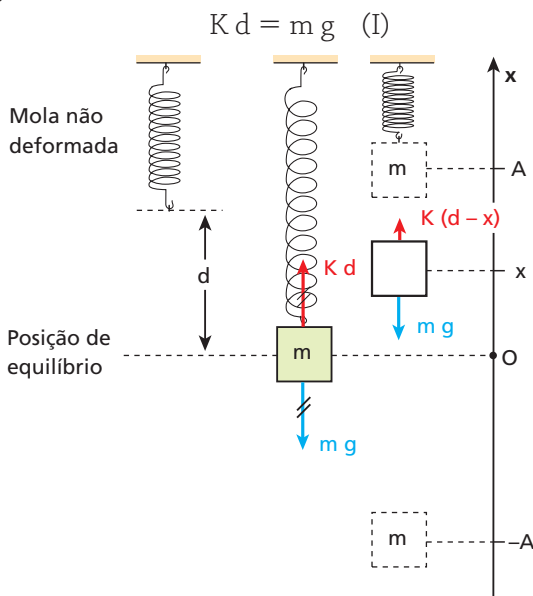
Representando graficamente as energias desse sistema massa-mola, temos:

## 13. Oscilador massa-mola vertical

Observe agora o bloco de massa **m** oscilando verticalmente na extremidade da mola de constante elástica **K**, em condições ideais.

Situação no ponto de equilíbrio: a força resultante é nula, mas a mola está deformada.

Note que nesse oscilador a força resultante no bloco não é mais a força elástica, mas sim a composição vetorial da força elástica com a força peso do bloco. Desse modo, no ponto de equilíbrio ($x = 0$), a força elástica não é nula: sua intensidade é igual à intensidade do peso do bloco, pois nessa posição a força **resultante** é nula. Assim, a mola está deformada no ponto de equilíbrio, ao contrário do que acontece no oscilador horizontal. Por isso, no oscilador vertical o módulo da elongação **x** já não é igual à deformação da mola.

Apesar de todas essas diferenças, o movimento do bloco continua sendo harmônico simples, como provaremos a seguir.

Na posição de equilíbrio, indicada na figura a seguir, temos:

$$K\,d = m\,g \quad \text{(I)}$$

Numa posição genérica de elongação **x**, o valor algébrico **F** da força resultante no bloco é dado por:

$$F = K\,(d - x) - m\,g$$

$$F = K\,d - K\,x - m\,g \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$F = m\,g - K\,x - m\,g$$

$$F = -K\,x$$

Concluímos, então, que o valor algébrico da força resultante no bloco é proporcional à elongação e tem sinal oposto ao dela. Isso significa que **o movimento é harmônico simples**.

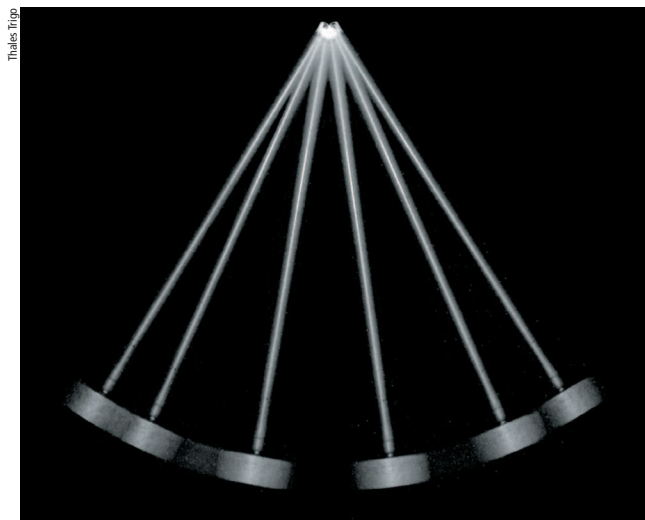
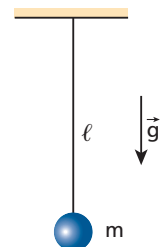
Observe que a constante de força continua sendo a constante elástica da mola (**K**). Portanto, o período das oscilações continua dado pela expressão: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

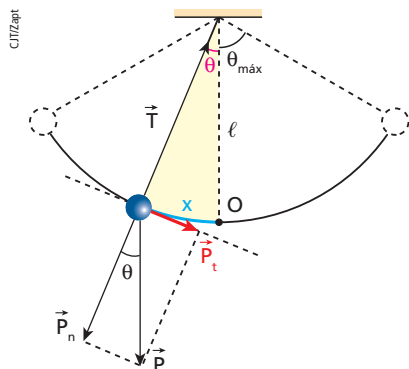
## 14. Pêndulo simples

Vamos acompanhar a análise do movimento oscilatório de um corpo preso na extremidade de um fio. Veremos que o movimento desse corpo não é, a rigor, harmônico simples, mas que, sob certas condições, muito se aproxima de um MHS.

Chamamos de **pêndulo simples** o sistema ideal constituído de uma partícula suspensa a um fio flexível, inextensível e de massa desprezível.

A figura ao lado ilustra um pêndulo simples de comprimento **ℓ** e massa **m**, em sua posição de equilíbrio.

Quando afastamos o pêndulo da posição de equilíbrio e o soltamos, ele realiza oscilações.

Fotografia estroboscópica de um pêndulo oscilando.

As forças que atuam na massa pendular, desprezando-se influências do ar, são a tração $\vec{T}$, exercida pelo fio, e o peso $\vec{P}$, que pode ser decomposto segundo as direções da reta tangente e da reta normal à trajetória.

A componente tangencial do peso ($\vec{P}_t$) é a força restauradora do movimento oscilatório do pêndulo. Sua intensidade é dada por:

$$P_t = m\,g\,\text{sen}\,\theta$$

O ângulo $\boldsymbol{\theta}$ é expresso em radianos por:

$$\theta = \frac{x}{\ell}$$

Assim, temos:

$$P_t = m\,g\,\text{sen}\,\frac{x}{\ell}$$

Nessa última expressão, concluímos que o movimento do pêndulo não é harmônico simples, uma vez que a intensidade da força restauradora ($P_t$) não é proporcional à elongação (**x**), mas sim ao seno de $\frac{x}{\ell}$.

Se as oscilações, contudo, ocorrerem com pequenos ângulos ($\theta_{máx} \leqslant 10°$), o valor do seno e o valor do ângulo expresso em radianos serão aproximadamente iguais, o que pode ser comprovado na tabela a seguir.

| θ (°) | θ (rad) | sen θ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0,0349 | 0,0349 |
| 4 | 0,0698 | 0,0698 |
| 6 | 0,1047 | 0,1045 |
| 8 | 0,1396 | 0,1392 |
| 10 | 0,1745 | 0,1736 |

Considerando, então, apenas os casos de pequenos ângulos ($\theta_{máx} \leqslant 10°$), podemos escrever:

$$P_t = m\,g\,\theta = m\,g\,\frac{x}{\ell}\text{, pois sen}\,\theta = \text{sen}\,\frac{x}{\ell} \cong \frac{x}{\ell}$$

Sendo **m**, **g** e **ℓ** constantes, podemos fazer:

$$K = \frac{m\,g}{\ell}$$

Assim, obtemos:

$$P_t = K\,x$$

A partir disso concluímos que a intensidade da força restauradora torna-se proporcional à elongação, podendo-se afirmar que, para pequenos ângulos, o movimento oscilatório do pêndulo é praticamente harmônico simples.

## Período de oscilação do pêndulo simples

Em qualquer MHS, o período é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Essa fórmula é aplicável ao pêndulo simples, desde que as oscilações ocorram com pequenos ângulos (pequenas amplitudes). A constante **K** (constante de proporcionalidade entre a intensidade da força restauradora e a elongação) no movimento pendular, como vimos, é dada por:

$$K = \frac{m\,g}{\ell}$$

Substituindo essa expressão na fórmula do período, obtemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m\,g}{\ell}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Sobre o período de oscilação do pêndulo simples, com pequenas amplitudes, é importante destacar que:

- independe da massa pendular;
- é proporcional à raiz quadrada do seu comprimento;
- é inversamente proporcional à raiz quadrada da intensidade do campo gravitacional.
- independe da amplitude.

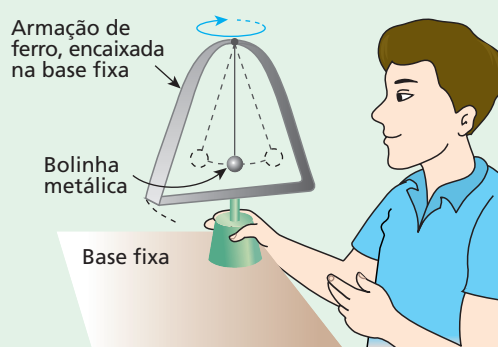
## Leitura

### O pêndulo de Foucault

Sem dúvida, uma das aplicações mais importantes do pêndulo é a sua utilização em relógios.

Há, porém, um registro histórico também muito importante: o uso do pêndulo para a constatação da **rotação** da Terra – fato que só foi possível devido à propriedade dos pêndulos de realizar oscilações sempre num mesmo plano.

Essa propriedade pode ser verificada montando-se o dispositivo ilustrado ao lado.

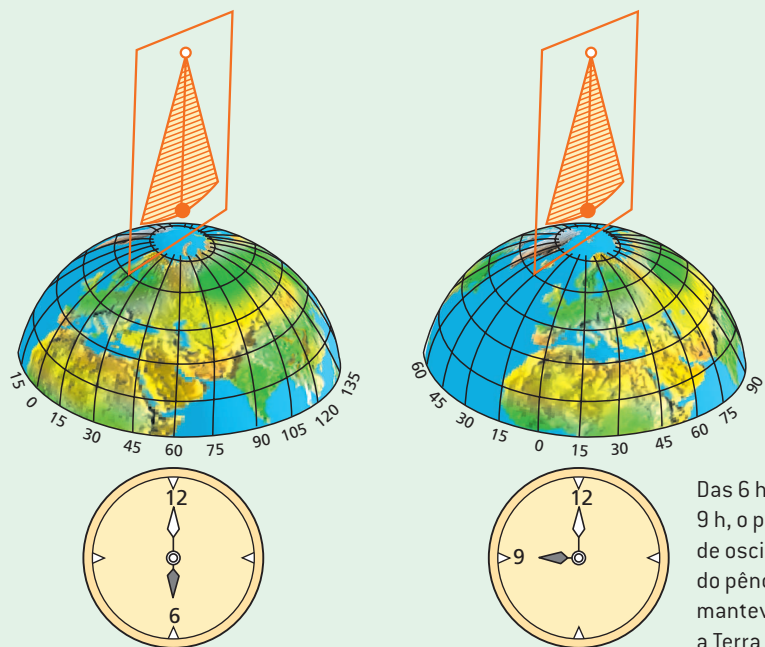
Fazemos o pêndulo oscilar e, em seguida, provocamos a rotação da armação de ferro. Notamos, com isso, que o pêndulo continua oscilando no mesmo plano inicial.

Pêndulo de Foucault e sua base de referência.

Em 1851, **Foucault** usou essa propriedade para evidenciar a rotação da Terra.

Para isso, construiu um enorme pêndulo e o fez oscilar sobre uma base de referência.

Com o passar das horas, o plano de oscilação do pêndulo mudou em relação à base de referência. Sabendo, entretanto, que o plano de oscilação não se altera (em relação a um referencial inercial, como as estrelas), Foucault concluiu que não havia sido o plano de oscilação do pêndulo que sofrera uma rotação em relação às estrelas, mas sim a base de referência, ou seja, a Terra. A ilustração abaixo facilita o entendimento da conclusão de Foucault.

Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868), físico francês que criou um método para medir a velocidade da luz e descobriu que surgem correntes elétricas induzidas em condutores submetidos a campos magnéticos variáveis.

Das 6 h às 9 h, o plano de oscilação do pêndulo manteve-se, mas a Terra girou 45°.

### Massa inercial e massa gravitacional

A grandeza física **massa** aparece em dois contextos completamente diferentes, como veremos a seguir.

Quando um corpo é submetido a uma força resultante de intensidade **F**, adquire uma aceleração de intensidade **a**. Usando a **2ª Lei de Newton**, estabelecemos uma relação entre **F**, **a** e a massa do corpo. Nesse contexto, a massa é a chamada massa **inercial**, por estar relacionada com a inércia do corpo.

Simbolizando a massa inercial por $m_I$, escrevemos:

$$F = m_I \, a$$

Veja, agora, a grandeza massa aparecendo em outro contexto.

Por ter massa, um corpo sob a influência do campo gravitacional criado por um planeta, por exemplo, submete-se a uma força de atração, cuja intensidade **F** é dada pela **Lei de Newton da atração das massas**. Nesse contexto, a massa é a massa **gravitacional**, uma propriedade que os corpos têm de se atraírem mutuamente. Sendo **g** a intensidade do campo gravitacional ao qual o corpo está submetido e $m_G$ sua massa gravitacional, temos:

$$F = m_G \, g$$

Quando recebemos a informação de que a massa de um corpo é igual a 5 kg, por exemplo, sempre usamos esse valor tanto para a massa inercial como para a gravitacional, ou seja, nunca nos importamos com o contexto.

Chegou o momento de nos questionarmos: será que a massa inercial e a massa gravitacional são realmente iguais? Até agora, nunca nos preocupamos com isso.

Para responder à pergunta, vamos retomar parte da demonstração do período do pêndulo simples, na condição de pequenos ângulos (ver item 14, na página 182).

A massa que aparece na expressão da componente tangencial do peso é a massa gravitacional. Então, devemos escrever:

$$P_t = m_G \, g \, \frac{x}{\ell}$$

Nessa expressão: $\frac{m_G \, g}{\ell} = K$ (constante de força do MHS).

A massa que aparece na expressão geral do período de um MHS, porém, é a massa inercial. De fato, essa expressão foi obtida a partir da 2ª Lei de Newton (ver itens 10 e 11, na página 179). Por isso, devemos escrever:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_I}{K}}$$

Sendo **K** igual a $\frac{m_G g}{\ell}$, temos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_I}{\frac{m_G \, g}{\ell}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m_I}{m_G} \cdot \frac{\ell}{g}} \quad \text{(I)}$$

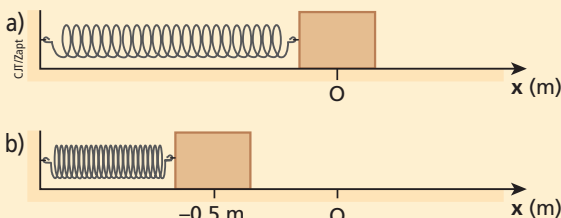
Entretanto, meticulosos experimentos realizados para determinar o período das pequenas oscilações de um pêndulo simples mostraram que a fórmula $2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ fornece, com discrepâncias desprezíveis, os mesmos resultados obtidos experimentalmente.

Isso nos leva a concluir que $\frac{m_I}{m_G}$, na expressão (I), é igual a 1 ou, pelo menos, a um valor extremamente próximo de 1.

Portanto, os valores de $m_I$ e $m_G$ são iguais ou muitíssimo próximos um do outro. Assim, se a massa inercial de um corpo for igual a 5 kg, por exemplo, continuaremos usando esse mesmo valor para a sua massa gravitacional.

## Exercícios

nível 1

**14. E.R.** Um bloco com 4 kg de massa está em repouso apoiado num plano horizontal sem atrito, preso a uma mola ideal de constante elástica 400 N/m (figura **a**). Quando o bloco é afastado 0,5 m de sua posição inicial e abandonado, ele oscila em movimento harmônico simples (figura **b**).

Determine:

a) o período do movimento do bloco;
b) a energia mecânica do sistema massa-mola;
c) a representação gráfica do valor algébrico da força resultante, em função da elongação;
d) a representação gráfica da energia potencial e da energia cinética, em função da elongação.

**Resolução:**

a) O período é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Sendo m = 4 kg e K = 400 N/m, temos:

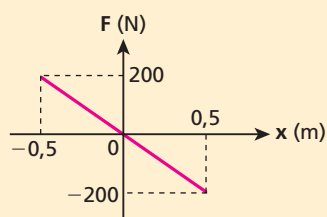
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4}{400}} \Rightarrow \boxed{T = 0{,}2\pi \text{ s}}$$

b) A energia mecânica do sistema é dada por:

$$E_m = \frac{K \, A^2}{2}$$

Sendo K = 400 N/m e a amplitude A = 0,5 m, temos:

$$E_m = \frac{400 \cdot 0{,}5^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_m = 50 \text{ J}}$$

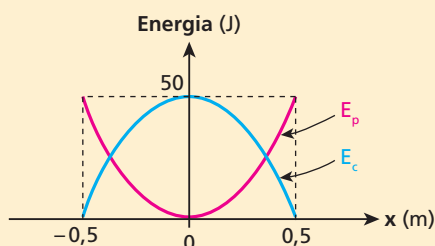
c) O valor algébrico da força resultante é dado por:

$F = -K\,x \Rightarrow F = -400x$ (SI)

d) A energia potencial é dada por:

$$E_p = \frac{K\,x^2}{2} \Rightarrow E_p = 200x^2 \quad \text{(SI)}$$

A energia cinética é dada por:

$$E_c = E_m - E_p \Rightarrow E_c = 50 - 200x^2 \quad \text{(SI)}$$

Representando graficamente, obtemos:

**15.** (UFMS) Uma partícula executa um movimento harmônico simples ao longo do eixo **x** e em torno da origem **O**. Sua amplitude é **A** e seu período é 4,0 s. É correto afirmar:

(01) A velocidade da partícula é nula quando $x = \pm A$.
(02) A frequência do movimento é 0,25 Hz.
(04) A aceleração da partícula é nula quando $x = \pm A$.
(08) A energia cinética da partícula no ponto $x = 0$ é nula.
(16) A energia mecânica total da partícula é igual à sua energia potencial quando $x = \pm A$.
(32) O módulo da força resultante na partícula é proporcional ao módulo de seu deslocamento em relação à origem.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**16.** O sistema representado na figura 1 oscila com frequência $f_1$, verticalmente:

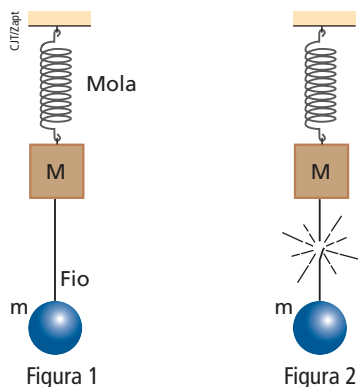
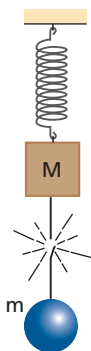



Figura 1 Figura 2

Se o fio for cortado como mostra a figura 2, o corpo de massa **M** passará a oscilar verticalmente com frequência $f_2$ igual a $f_1$, maior que $f_1$ ou menor que $f_1$?

**17.** Um bloco suspenso por uma mola oscila verticalmente sob a ação da gravidade terrestre. Se esse sistema for transportado para a superfície da Lua, onde o módulo do campo gravitacional é cerca de $\frac{1}{6}$ do terrestre, o que ocorrerá com o período das oscilações verticais desse sistema?

**18.** Deixa-se o quilograma-padrão (1,0 kg) oscilar livremente na extremidade de uma mola ideal, sendo que ele o faz com frequência igual a 1,0 Hz. Em seguida, retira-se o quilograma-padrão e coloca-se, em seu lugar, um corpo de massa desconhecida **m**, que oscila com frequência igual a 0,50 Hz. Determine a massa **m**.

**19.** Considere um pêndulo simples que realiza oscilações de pequenas amplitudes. É correto afirmar que seu período:

(01) depende da massa pendular.
(02) depende de seu comprimento.
(04) depende da intensidade do campo gravitacional local.
(08) depende da amplitude das oscilações.
(16) duplica quando seu comprimento é quadruplicado.
(32) reduz-se à metade ao submeter-se a um campo gravitacional de intensidade quadruplicada.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**20. E.R.** Calcule o período de oscilação de um pêndulo simples com 1,6 m de comprimento, que executa pequenas oscilações num local onde $g = 10\ m/s^2$. Despreze influências do ar e considere $\pi$ igual a 3.

**Resolução:**

O período pedido é calculado pela expressão:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Temos:

$$\pi = 3$$

$$\ell = 1{,}6\ m$$

$$g = 10\ m/s^2$$

Então:

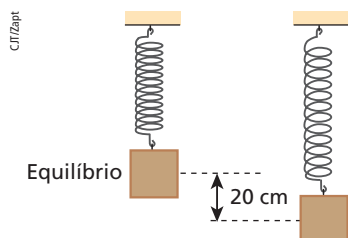
$$T = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{1{,}6}{10}} \Rightarrow \boxed{T = 2{,}4\ s}$$

**21.** Em um experimento com um pêndulo simples de 120 cm de comprimento, foi cronometrado o intervalo de tempo decorrido durante 20 oscilações, obtendo-se 44,0 s. Calcule a intensidade **g** da aceleração da gravidade no local da experiência. Use $\pi = 3{,}14$.

**22.** Uma pequena esfera metálica realiza oscilações de pequena amplitude e período igual a 1,2 s num recipiente hemisférico praticamente sem atrito e de raio **R**. Considerando $g = 10\ m/s^2$ e $\pi = 3$, calcule **R**.

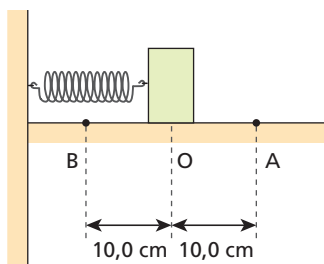
## Exercícios

nível 2

**23.** A figura mostra um bloco com 4 kg de massa, preso na extremidade de uma mola ideal. Se o bloco for puxado 20 cm para baixo da posição de equilíbrio e abandonado em seguida, ele oscilará com frequência de 5 Hz.

Despreze influências do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\pi^2 = 10$.
Analise as afirmações a seguir:

I. A amplitude do movimento oscilatório do bloco é 20 cm.
II. O período do movimento oscilatório é 0,2 s.
III. A força resultante sobre o bloco na posição de equilíbrio vale zero.
IV. A força elástica sobre o bloco na posição de equilíbrio vale 40 N.
V. Nos pontos de inversão, a força resultante sobre o bloco vale 800 N.

São corretas:
a) todas as afirmações.
b) apenas I e III.
c) apenas II, III e IV.
d) apenas II, III e V.
e) apenas III, IV e V.

**24.** (Mack-SP) Um corpo de 250 g de massa encontra-se em equilíbrio, preso a uma mola helicoidal de massa desprezível e constante elástica **k** igual a 100 N/m, como mostra a figura a seguir. O atrito entre as superfícies em contato é desprezível. Estica-se a mola, com o corpo, até o ponto **A**, e abandona-se o conjunto nesse ponto, com velocidade zero. Em um intervalo de 1,0 s, medido a partir desse instante, o corpo retornará ao ponto **A**:

a) uma vez.
b) duas vezes.
c) três vezes.
d) quatro vezes.
e) seis vezes.

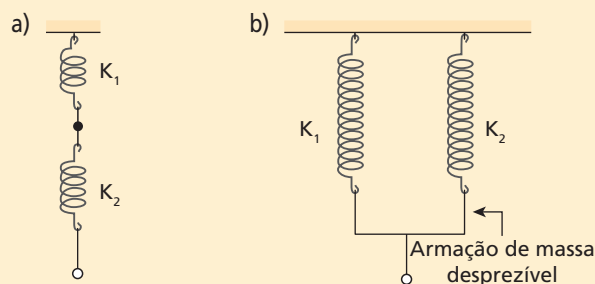
**25.** Um corpo de massa **m**, preso a uma mola de constante elástica **K**, executa um movimento harmônico simples ao longo de um eixo horizontal Ox. As elongações do corpo variam de $x = -A$ até $x = A$. Determine a elongação quando a energia cinética do bloco iguala-se à energia potencial elástica, indicando o resultado num gráfico dessas energias em função da posição.

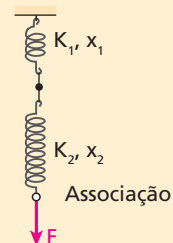
**26.** (UFRGS-RS) Dois corpos de massas diferentes, cada um preso a uma mola distinta, executam movimentos harmônicos simples de mesma frequência e têm a mesma energia mecânica.

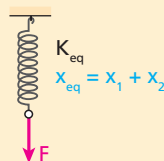
Nesse caso:
a) o corpo de menor massa oscila com menor período.
b) o corpo de menor massa oscila com maior período.
c) os corpos oscilam com amplitudes iguais.
d) o corpo de menor massa oscila com menor amplitude.
e) o corpo de menor massa oscila com maior amplitude.

**27.** Um pêndulo simples realiza oscilações de pequena amplitude na superfície da Terra, com período igual a 2,0 s.
a) Se esse pêndulo realizasse oscilações de pequena amplitude na superfície da Lua, qual seria o seu período? Considere $g_{Lua} = \frac{1}{6} g_{Terra}$.
b) Esse pêndulo oscilaria se estivesse preso ao teto de um elevador em queda livre?

**28.** (Unicamp-SP) Um pêndulo simples, que executa um movimento harmônico simples num ambiente escuro, é iluminado por um holofote estroboscópico.
a) Sendo $\ell = 0,4$ m o comprimento do pêndulo, calcule a frequência de suas oscilações.
b) Qual deve ser a frequência máxima do estroboscópio para que esse pêndulo pareça estar parado na posição vertical? Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

**29. E.R.** Determine a constante elástica equivalente às seguintes associações de molas ideais:

**Resolução:**

a) Temos, neste caso, o que costumamos chamar de molas associadas "em série". Aplicando uma força de intensidade **F** na extremidade da associação, as molas de constantes elásticas $K_1$ e $K_2$ sofrem deformações respectivamente iguais a $x_1$ e $x_2$, sendo que, para ambas, a força tensora vale **F**.

A constante elástica equivalente à associação corresponde à constante elástica de uma mola única, que, submetida à mesma força tensora, sofre a mesma deformação sofrida pela associação, ou seja, deforma-se:

$$x_{eq} = x_1 + x_2$$

Temos, então:

Na mola de constante $K_1$: $F = K_1\ x_1$ (I)

Na mola de constante $K_2$: $F = K_2\ x_2$ (II)

Na mola equivalente:

$$F = K_{eq}\ x_{eq} = K_{eq}(x_1 + x_2) \qquad \text{(III)}$$

De (I) e (II), temos:

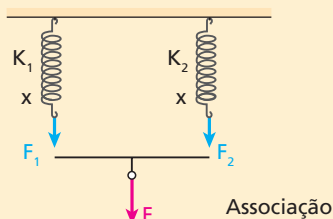
$$x_1 = \frac{F}{K_1} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{F}{K_2}$$

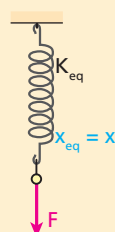
Introduzindo essas expressões em (III), temos:

$$F = K_{eq}\left(\frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}}$$

ou

$$\boxed{K_{eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}}$$

b) Agora, temos o que chamamos de molas associadas "em paralelo". Apliquemos uma força de intensidade **F** na extremidade da associação, de modo que as molas sofram a mesma deformação **x**:

Associação

A mola equivalente é aquela que, submetida à mesma força, sofre a mesma deformação que a associação.

Temos, então:

Na mola de constante $K_1$: $F_1 = K_1\ x$

Na mola de constante $K_2$: $F_2 = K_2\ x$

Mas:

$$F_1 + F_2 = F \Rightarrow F = (K_1 + K_2)x \qquad \text{(I)}$$

Na mola equivalente: $F = K_{eq}\ x$ (II)

Comparando (I) e (II), obtemos:

$$\boxed{K_{eq} = K_1 + K_2}$$

**30.** A figura 1 representa um bloco em repouso, suspenso a uma mola de constante elástica $K_1$, deformada elasticamente de $x_1$. A mola é cortada ao meio e o mesmo corpo é suspenso às duas metades por meio de uma haste **H**, de massa desprezível, ficando em repouso (figura 2). Cada metade apresenta-se deformada elasticamente de $x_2$.

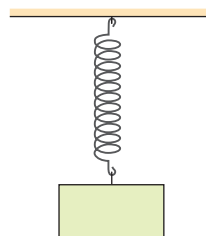
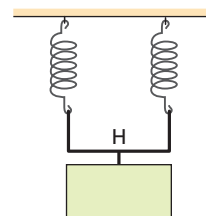



Figura 1 Figura 2

Determine:

a) a constante elástica $K_2$ do conjunto constituído pelas duas metades da mola, em função de $K_1$;

b) a deformação $x_2$, em função de $x_1$.

**31.** (UNIFEI-MG) As equações abaixo descrevem uma partícula num movimento circular uniforme, com **x** e **y** dados em centímetros e **t** em segundos.

$$y = \frac{8,0}{\pi}\,\text{sen}\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad x = \frac{8,0}{\pi}\cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

a) Qual é a velocidade angular desse movimento? Qual é o raio da trajetória da partícula?

b) Qual é o valor da velocidade escalar **v**? Esse movimento tem sentido horário ou anti-horário?

## Descubra mais

**1.** Quais planetas do Sistema Solar realizam movimento de rotação em sentido oposto ao da Terra?

**2.** Procure informações sobre outros movimentos da Terra além do movimento de rotação.

**3.** Se o pêndulo de Foucault oscilasse no equador terrestre, o movimento de rotação do planeta Terra seria constatado?

**4.** Você conheceu a fórmula para calcular o período de oscilação de um pêndulo simples na condição de **pequenos ângulos** ($\theta_{máx} \leq 10°$). Procure saber qual é a fórmula do período quando essa condição não é satisfeita. Em seguida, considere um pêndulo que, na condição de pequenos ângulos, oscila com período igual a 2,00 s. Usando apenas os três primeiros termos da fórmula que você encontrou, calcule o período desse mesmo pêndulo no caso em que $\theta_{máx}$ é igual a 60°.



TF2-P2T1_169a197_5P.indd 188 17/08/12 18:24

## Exercícios

nível 3

**32.** Num osciloscópio, elétrons executam movimentos que são composições de dois movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares. Considerando que esses movimentos são descritos pelas equações $x = A \cos \omega t$ e $y = B \operatorname{sen} \omega t$, determine a forma das trajetórias, supondo:

a) $A = B$; b) $A \neq B$.

**33.** (ITA-SP) A equação $x = 1{,}0 \operatorname{sen} (2{,}0t)$ expressa a posição de uma partícula em unidades do Sistema Internacional. Qual seria a forma do gráfico **v** (velocidade) × **x** (posição) dessa partícula?

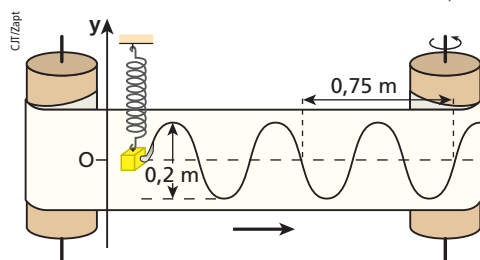
**34.** (ITA-SP) Uma partícula de massa **m** move-se sobre uma linha reta horizontal num Movimento Harmônico Simples (MHS) com centro **O**. Inicialmente, a partícula encontra-se na máxima distância $\mathbf{x_0}$ de **O** e, a seguir, percorre uma distância **a** no primeiro segundo e uma distância **b** no segundo seguinte, na mesma direção e sentido. Quanto vale a amplitude $\mathbf{x_0}$ desse movimento?

a) $\dfrac{2a^3}{(3a^2 - b^2)}$ c) $\dfrac{2a^2}{(3a - b)}$ e) $\dfrac{4a^2}{(3a - 2b)}$

b) $\dfrac{2b^2}{(4a - b)}$ d) $\dfrac{2a^2b}{(3a^2 - b^2)}$

**35.** (ITA-SP) Uma partícula $P_1$ de dimensões desprezíveis oscila em movimento harmônico simples ao longo de uma reta com período de $\frac{8}{3}$ s e amplitude **a**. Uma segunda partícula, $P_2$, semelhante a $P_1$, oscila de modo idêntico numa reta muito próxima e paralela à primeira, porém com atraso de $\frac{\pi}{12}$ rad em relação a $P_1$. Qual a distância que separa $P_1$ de $P_2$, $\frac{8}{9}$ s depois de $P_2$ passar por um ponto de máximo deslocamento?

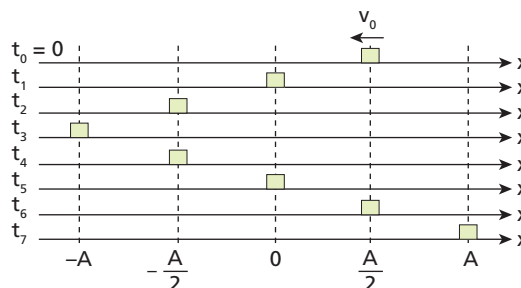
a) 1,00 a b) 0,29 a c) 1,21 a d) 0,21 a e) 1,71 a

**36.** Um corpo com 2 kg de massa oscila verticalmente em movimento harmônico simples, suspenso por uma mola helicoidal ideal. As posições ocupadas pelo corpo são registradas numa fita vertical de papel, por meio de um estilete preso ao corpo. A fita desloca-se horizontalmente com velocidade constante de 0,2 m/s.

Determine:

a) a frequência e a amplitude do movimento do corpo;

b) a constante elástica da mola, adotando $\pi^2 = 10$;

c) a equação horária do movimento do corpo, sabendo que no instante $t = 0$ a elongação é nula e o corpo está subindo.

**37.** (UFC-CE) Um corpo de massa **m** executa o movimento periódico mostrado na figura a seguir. A força que atua no sistema é da forma $F = -k\,x$. Com base nos dados fornecidos e na figura, é possível calcular algumas grandezas inerentes a esse tipo de movimento, tais como: $\boldsymbol{\delta}$, **v**, $\boldsymbol{\omega}$, **k** e $\mathbf{a_{máx}}$.

**Dados**: $\boldsymbol{\delta}$ é a constante de fase;
$\boldsymbol{\omega}$ é a frequência natural da oscilação;
**v** é a velocidade do corpo;
**k** é a constante elástica;
$\mathbf{a_{máx}}$ é a aceleração máxima.

Das grandezas calculadas e apresentadas abaixo, indique a alternativa correta.

a) $\delta = 0$

b) $v(t_5) = \dfrac{A}{2}\left(\dfrac{\pi}{t_7 - t_3}\right)$

c) $\omega = \dfrac{2\pi}{t_7 - t_3}$

d) $k = m\,A\left(\dfrac{\pi}{t_7 - t_3}\right)^2$

e) $a_{máx} = A\left(\dfrac{\pi}{t_7 - t_3}\right)^2$

**38.** Um bloco suspenso por uma mola oscila verticalmente em movimento harmônico simples, como representa a figura 1. No instante $t = 0$, ele está passando pela sua posição de equilíbrio ($y = 0$). A velocidade escalar **v** desse bloco varia com o tempo **t**, conforme o gráfico apresentado na figura 2.

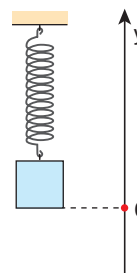
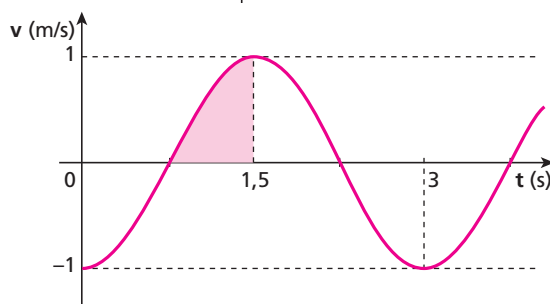
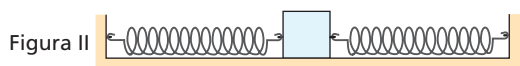
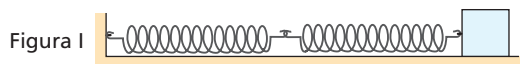



Figura 2

a) Determine a função horária da elongação, $y = f(t)$, desse movimento.

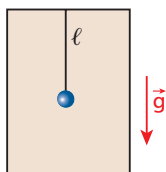
b) Considerando $\pi = 3$, quanto vale a "área" destacada na figura 2?

**39.** Duas molas iguais e um mesmo bloco participam das duas montagens ilustradas nas figuras I e II:

Atritos e influências do ar são desprezados.

Se o bloco é afastado da posição de equilíbrio (molas relaxadas) e abandonado, ele oscila na figura I com período $T_I$ e na figura II com período $T_{II}$. Determine $\frac{T_I}{T_{II}}$.

**40.** (ITA-SP) Dois pêndulos simples, respectivamente de massas $m_1$ e $m_2$ e comprimentos $\ell_1$ e $\ell_2$, são simultaneamente abandonados para pôr-se em oscilação. Constata-se que a cada 4 ciclos do primeiro a situação inicial é restabelecida identicamente. Nessas condições, pode-se afirmar que necessariamente:

a) o pêndulo 2 deve oscilar mais rapidamente que o pêndulo 1.
b) o pêndulo 2 deve oscilar mais lentamente que o pêndulo 1.
c) $8\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$ é um número inteiro.
d) $6\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$ é um número inteiro.
e) $m_1\,\ell_1 = 2m_2\,\ell_2$.

**41.** Um pêndulo simples de comprimento $\ell$ é preso ao teto de um elevador, como mostra a figura:

Sendo **g** o módulo do campo gravitacional no local, analise as afirmações a seguir:

I. Se o elevador permanecer em repouso ou mover-se em movimento retilíneo e uniforme, o período de oscilação do pêndulo será $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

II. Se o elevador mover-se com aceleração de módulo **a** dirigida para cima, o período de oscilação do pêndulo será $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$.

III. Se o elevador mover-se com aceleração de módulo **a** dirigida para baixo ($a < g$), o período de oscilação será $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}}$.

IV. Se o elevador estiver em queda livre, o pêndulo não oscilará.

É (são) correta(s):

a) todas.
b) apenas II e III.
c) apenas IV.
d) apenas I.
e) apenas I, II e III.

**42.** Considere a Terra uma esfera homogênea de raio **R** e massa **M**. Suponha que um pequeno corpo de massa **m** seja abandonado a partir do repouso em uma das bocas de um túnel que atravessa totalmente o planeta, cavado ao longo de seu eixo de rotação.

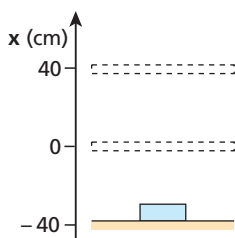
a) Mostre que, se não houvesse qualquer dissipação de energia mecânica, o corpo abandonado realizaria um movimento harmônico simples.
b) Calcule o período desse movimento. Para isso, use: $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$kg$^{-2}$ e $\pi = 3{,}14$.
c) Mostre que o período obtido no item **b** é igual ao período do movimento do corpo de massa **m** em órbita circular rasante em torno da Terra (evidentemente, na ausência de atmosfera).

**43.** (ITA-SP) Um relógio de pêndulo, construído de um material de coeficiente de dilatação linear $\alpha$, foi calibrado a uma temperatura de 0 °C para marcar 1 s exato ao pé de uma torre de altura **h**. Elevando-se o relógio até o alto da torre, observa-se um certo atraso, mesmo mantendo-se a temperatura constante. Considerando **R** o raio da Terra, **L** o comprimento do pêndulo a 0 °C e que o relógio permaneça ao pé da torre, então a temperatura para a qual se obtém o mesmo atraso é dada pela relação:

a) $\frac{2h}{\alpha R}$
b) $\frac{h\,(2R+h)}{\alpha R^2}$
c) $\frac{(R+h)^2 - LR}{\alpha LR}$
d) $\frac{R\,(2h+R)}{\alpha\,(R+h)^2}$
e) $\frac{2R+h}{\alpha R}$

## Para raciocinar um pouco mais

**44.** Um bloco está apoiado em uma plataforma horizontal inicialmente em repouso na posição indicada na figura ao lado.

A plataforma passa a oscilar verticalmente em movimento harmônico simples de amplitude 40 cm e período 1 s. Determine a elongação em que o bloco perde contato com a plataforma, adotando $g = 10$ m/s$^2$ e $\pi^2 = 10$.

**45.** Uma prancha de massa **M** está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Na extremidade **A** dessa prancha, encontra-se, também em repouso, um automóvel de massa **m**, assimilável a um ponto material.

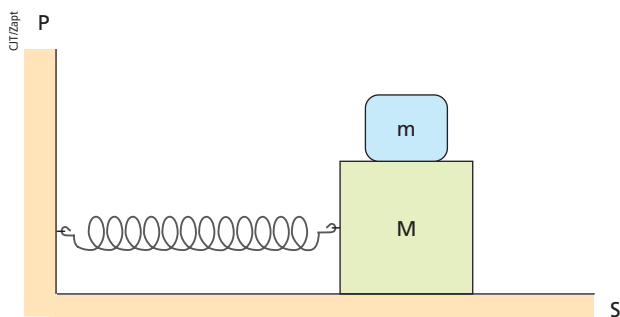
A partir de certo instante, o automóvel passa a realizar um movimento harmônico simples em relação à superfície horizontal, indo da extremidade **A** à extremidade **B** e, em marcha a ré, da

extremidade **B** à extremidade **A**. Considere **L** o comprimento da prancha, **μ** o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a prancha e **g** a intensidade do campo gravitacional. Despreze o atrito entre a prancha e a superfície em que se apoia. Nessas condições, determine:

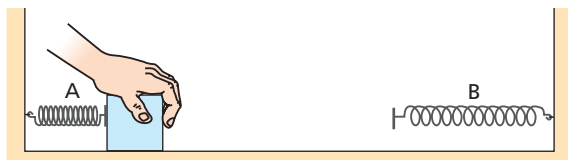
a) a amplitude do movimento do automóvel em relação à superfície horizontal;
b) a máxima frequência que o movimento do automóvel pode ter.

**46.** A figura a seguir representa uma mola ideal de constante elástica **k**, presa em uma parede **P** e em um bloco de massa **M** em repouso, numa superfície plana e horizontal **S**. Sobre esse bloco, repousa um outro, de massa **m**.

Existe atrito entre os blocos, mas se supõe a ausência de atrito na superfície **S**. Além disso, as influências do ar são desprezadas.

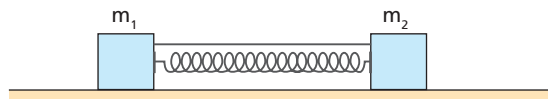
Afastando o bloco de massa **M** da posição de equilíbrio e liberando o sistema, ele passa a oscilar com amplitude **A**.

Determine, sendo **g** a intensidade do campo gravitacional:

a) o período de oscilação do sistema (**T**), supondo que um bloco não se mova em relação ao outro;
b) a expressão do coeficiente de atrito estático (**μ**) entre os blocos para garantir que um deles não se mova em relação ao outro.

**47.** Na situação esquematizada na figura, as molas **A** e **B** têm massas desprezíveis e constantes elásticas $k = 16\ \pi^2$ N/m. Um pequeno bloco rígido de massa igual a 4,0 kg é comprimido contra o aparador da mola **A**, que sofre uma deformação de 50 cm. Esse bloco é abandonado do repouso, passando a oscilar em trajetória retilínea sobre o plano horizontal. Em cada vaivém, ele realiza duas colisões contra os aparadores das molas, o que não acarreta nenhuma dissipação de energia mecânica.

Supondo-se que a distância entre os aparadores na situação de relaxamento das molas é $d = \pi$ m e admitindo-se positivo o sentido da esquerda para a direita, pede-se, desprezando atritos e influências do ar:

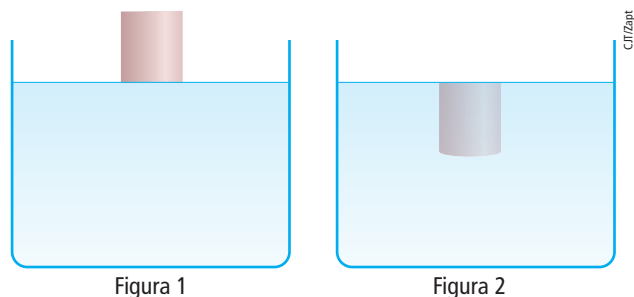
a) calcular a máxima velocidade escalar atingida pelo bloco;
b) determinar o período de suas oscilações;
c) traçar, em uma folha à parte, o gráfico da velocidade escalar do bloco em função do tempo, abrangendo, pelo menos, um ciclo das oscilações.

**48.** (Olimpíada Brasileira de Física) Um antigo relógio tipo carrilhão é acionado pelas oscilações de um pêndulo de aço (coeficiente de dilatação linear igual a $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$) que, no inverno, realiza uma oscilação completa em 1,0 s. Sabendo-se que no verão esse relógio passa a atrasar o equivalente a 2,0 min por mês, determine a diferença entre as temperaturas médias no verão e no inverno.

**49.** Dois blocos de massas $m_1$ e $m_2$, assimiláveis a pontos materiais, repousam em uma superfície plana e horizontal, presos a uma mola ideal de constante elástica **K**. A mola está comprimida e os blocos não se movem, porque um barbante está preso neles.

Queimando o barbante, o sistema passa a oscilar. Suponha desprezíveis o atrito e a resistência do ar.

a) Durante as oscilações, um ponto da mola permanece em repouso. Usando apenas argumentos conceituais, diga onde esse ponto se encontra.
b) Determine o período das oscilações do sistema.

**50.** Um cilindro de densidade $\rho_C$ é mantido em repouso na posição indicada na figura 1. Sob o cilindro, encontra-se uma cuba contendo um líquido de densidade $\rho_L$.

Figura 1 Figura 2

Desprezando-se a resistência do ar e a do líquido, o cilindro, ao ser abandonado, passa a realizar um movimento harmônico simples vertical.

Determine a razão $\rho_L/\rho_C$ para que as posições de inversão do movimento sejam as representadas nas figuras 1 e 2.

**51.** (ITA-SP) Um relógio tem um pêndulo de 35 cm de comprimento. Para regular seu funcionamento, ele possui uma porca de ajuste que encurta o comprimento do pêndulo de 1 mm a cada rotação completa à direita e alonga este comprimento de 1 mm a cada rotação completa à esquerda. Se o relógio atrasa um minuto por dia, indique o número aproximado de rotações

da porca e sua direção necessários para que ele funcione corretamente.

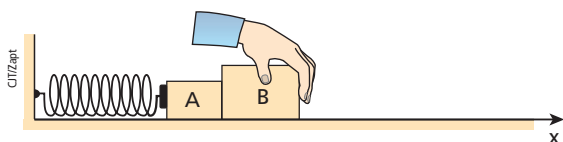
a) 1 rotação à esquerda

b) $\frac{1}{2}$ rotação à esquerda

c) $\frac{1}{2}$ rotação à direita

d) 1 rotação à direita

e) 1 e $\frac{1}{2}$ rotação à direita.

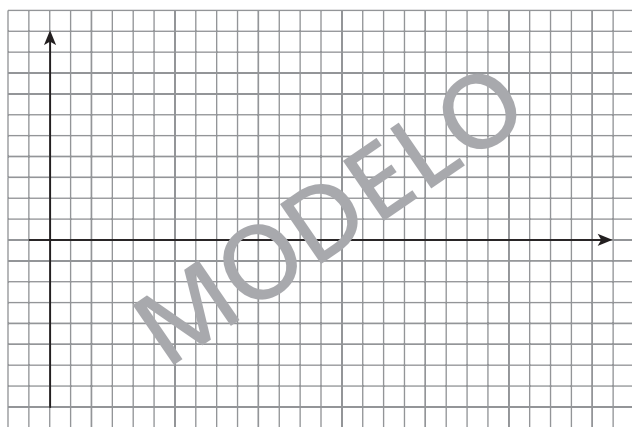
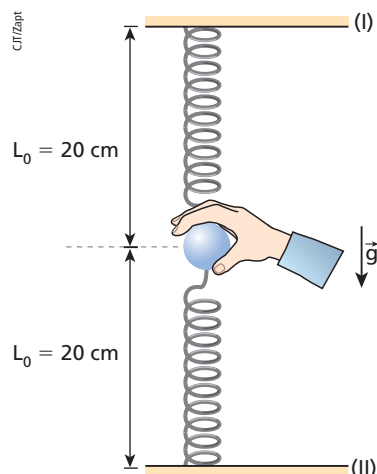
**52.** Na situação esquematizada abaixo, os blocos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 4,0 kg e 5,0 kg, estão apoiados em um plano horizontal infinito e perfeitamente polido, com o bloco **B** simplesmente encostado no bloco **A**. A mola à qual **A** está conectado tem massa desprezível, constante elástica $k = 36$ N/m e apresenta-se comprimida inicialmente de 50 cm.

Admitindo-se que no instante $t_0 = 0$ o sistema seja abandonado da posição indicada e desprezando-se os efeitos do ar, pede-se:

a) determinar as intensidades das velocidades máximas atingidas por **A** e **B**.

b) calcular a máxima distensão atingida pela mola.

c) copiar o modelo da malha quadriculada a seguir em seu caderno e traçar os gráficos das velocidades escalares de **A** e **B** em função do tempo. Devem constar nos eixos vertical e horizontal os valores numéricos de velocidade escalar e de tempo essenciais para a perfeita descrição da situação proposta.

d) determinar a intensidade da máxima velocidade escalar relativa entre **A** e **B** e dizer em que instantes essa velocidade ocorre.

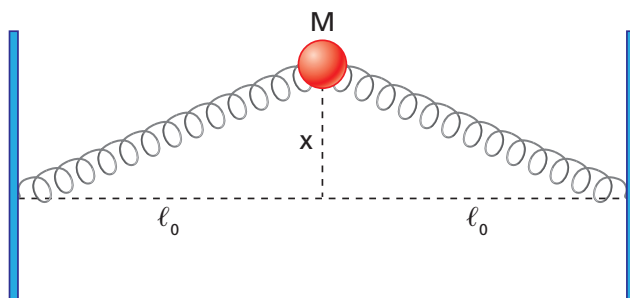
**Adote:** Eixo de referência **x** orientado para a direita; $\pi \cong 3$.

**53.** Uma esfera de massa igual a 2,0 kg, assimilável a um ponto material, é conectada às extremidades de duas molas ideais idênticas, dispostas verticalmente, conforme ilustra a figura a seguir.

As molas têm comprimentos naturais (sem deformação) $L_0 = 20$ cm, constantes elásticas $k = 4,0 \cdot 10^2$ N/m e suas extremidades não conectadas à esfera encontram-se presas a dois suportes fixos, (I) e (II). Em um determinado instante, a esfera é abandonada da posição indicada, passando a oscilar em movimento harmônico simples. Supondo $|\vec{g}| = 10$ m/s², calcule:

a) a altura da esfera em relação ao suporte (II) nos instantes em que sua velocidade tiver intensidade máxima.

b) a intensidade da máxima velocidade da esfera.

c) o período de oscilação do sistema.

**54.** (ITA-SP) Sobre uma mesa sem atrito, uma bola de massa **M** é presa por duas molas alinhadas, de constante de mola **k** e comprimento natural $\ell_0$, fixadas nas extremidades da mesa. Então, a bola é deslocada a uma distância **x** na direção perpendicular à linha inicial das molas, como mostra a figura, sendo solta a seguir. Obtenha a aceleração da bola, usando a aproximação $(1 + a)^\alpha = 1 + \alpha a$.

a) $a = \frac{-kx}{M}$

b) $a = \frac{-kx^2}{2M\ell_0}$

c) $a = \frac{-kx^2}{M\ell_0}$

d) $a = \frac{-kx^3}{2M\ell_0^2}$

e) $a = \frac{-kx^3}{M\ell_0^2}$

# Apêndice

## Composição de dois movimentos harmônicos simples (MHS) de direções perpendiculares

Uma partícula pode submeter-se a forças que a façam realizar, simultaneamente, dois MHS de direções iguais ou diferentes. Quando eles têm direções diferentes, destacam-se, em termos de importância prática, as situações em que elétrons, em um instrumento eletrônico de laboratório denominado osciloscópio catódico, submetem-se a dois campos elétricos perpendiculares entre si e variáveis harmonicamente com o tempo e realizam um movimento que é a composição de dois MHS de direções perpendiculares. A trajetória desses elétrons é visualizada na tela do osciloscópio.

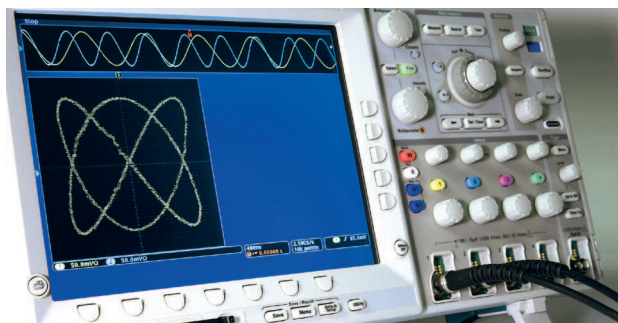
Conhecida a frequência de um dos dois MHS, a análise da figura formada na tela possibilita a determinação da frequência do outro, como veremos.

**Nota:**

- A utilidade do osciloscópio vai muito além do que foi descrito. Com ele, pode-se analisar variações de tensão com o tempo, vibrações sísmicas etc.

  Também é importante em laboratórios de acústica, podendo ser usado, por exemplo, na identificação de quem falou em uma conversa gravada.

  Obviamente, tanto na análise de vibrações sísmicas como na de vozes, os sinais acústicos precisam primeiro ser convertidos em sinais elétricos.

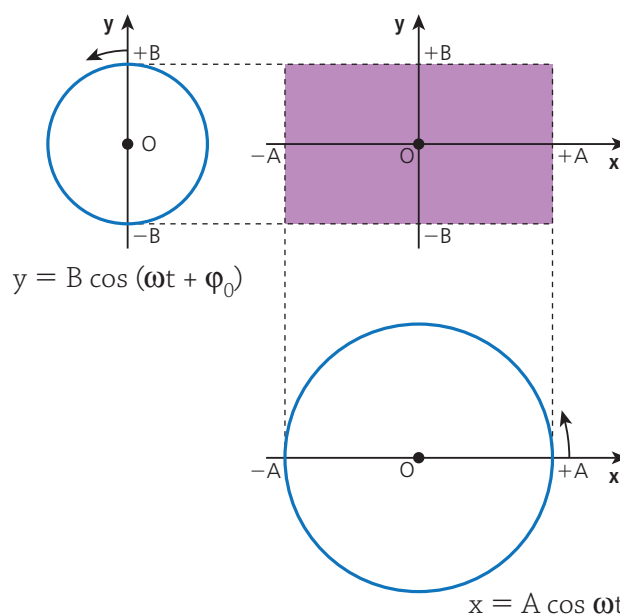
GIPhotostock/Photo Researchers, Inc/Latinstock

Um osciloscópio digital, com uma figura na tela revelando a trajetória de elétrons que realizam, simultaneamente, dois MHS perpendiculares entre si.

## Composição de dois MHS de mesma frequência e direções perpendiculares

Consideremos a composição de dois MHS de mesma frequência, sendo que um deles ocorre no eixo Ox do plano cartesiano e, o outro, no eixo Oy desse plano.

Para simplificar o equacionamento da trajetória do movimento resultante da composição, vamos tomar $t = 0$ no instante em que a fase de um deles é igual a zero:

$$x = A \cos(\omega t) \qquad \text{(I)}$$
$$y = B \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{(II)}$$

A trajetória associada ao movimento resultante estará dentro de um retângulo — como mostra a figura a seguir — e geralmente será uma elipse convencional.

De (I) e (II), temos: $\cos(\omega t) = \dfrac{x}{A}$ e $\cos(\omega t + \varphi_0) = \dfrac{y}{B}$

Então:

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t) \cdot \cos \varphi_0 - \text{sen}(\omega t) \cdot \text{sen}\, \varphi_0$$

Como $\cos(\omega t) = \dfrac{x}{A}$ e $\text{sen}(\omega t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)}$,

a expressão de $\dfrac{y}{B}$ fica assim:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi_0 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\ \text{sen}\, \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\ \text{sen}\, \varphi_0 = \frac{x}{A} \cos \varphi_0 - \frac{y}{B}$$

Elevando ao quadrado, membro a membro, temos:

$$\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \text{sen}^2\, \varphi_0 = \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi_0 - \frac{2xy \cos \varphi_0}{AB} + \frac{y^2}{B^2}$$

$$\text{sen}^2\ \varphi_0 - \frac{x^2}{A^2}\ \text{sen}^2\ \varphi_0 = \frac{x^2}{A^2}\cos^2\ \varphi_0 - \frac{2xy\cos\ \varphi_0}{AB} + \frac{y^2}{B^2}$$

$$\text{sen}^2\ \varphi_0 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy\cos\varphi_0}{AB}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy\cos\ \varphi_0}{AB} = \text{sen}^2\ \varphi_0 \quad \text{(III)}$$

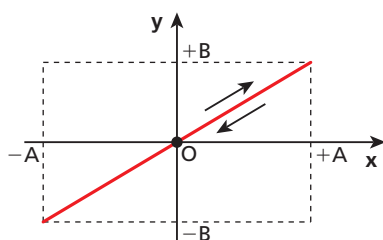
A expressão (**III**) é a **equação da trajetória** da partícula que realiza o movimento resultante da composição dos dois MHS. Essa equação é de uma cônica.

Quando a partícula completa uma oscilação em **x** também termina uma oscilação em **y**. Assim, a cônica é **fechada** e está inscrita no retângulo já citado, sendo então uma **elipse**, incluindo seus casos particulares: **circunferência**, que é uma elipse de excentricidade nula, e **segmento de reta**, que é uma elipse degenerada.

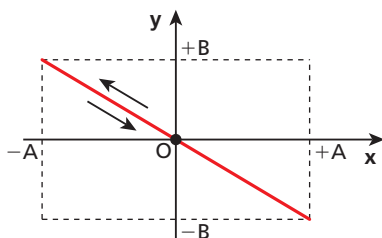
### Casos Particulares

**1)** $\varphi_0 = 0$

Em (**III**), ou em (**I**) e (**II**), fazendo $\varphi_0 = 0$, obtemos:

$$y = \frac{B}{A}x$$

**2)** $\varphi_0 = \pi$

Em (**III**), ou em (**I**) e (**II**), para $\varphi_0 = \pi$, obtemos:

$$y = -\frac{B}{A}x$$

Nos casos **1** e **2**, o movimento resultante, além de periódico, é **harmônico simples**.

De fato, sendo **e** a elongação em um ponto qualquer da trajetória, de coordenadas **x** e **y**, temos:

$$e^2 = x^2 + y^2$$

$$e^2 = A^2\cos^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t) = (A^2 + B^2)\cos^2(\omega t) \Rightarrow$$

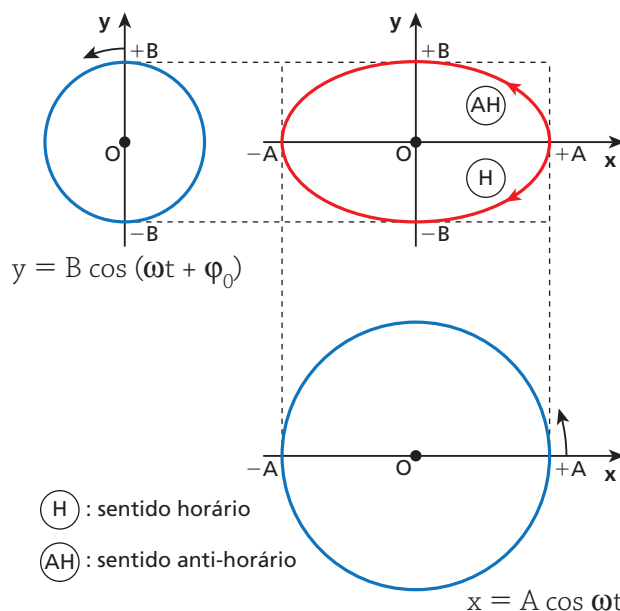
$$\Rightarrow e = \sqrt{A^2 + B^2}\ \cos(\omega t) \Rightarrow \text{MHS}$$

**3)** $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ **ou** $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2}$

De (**III**), ou de (**I**) e (**II**), obtemos:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Essa é a equação de uma elipse com centro na origem **O** dos eixos do plano cartesiano e com eixos principais coincidentes com eles:

- Se $A \neq B$, trata-se de uma elipse convencional
- Se $A = B$, trata-se de uma circunferência

**Destaques:**

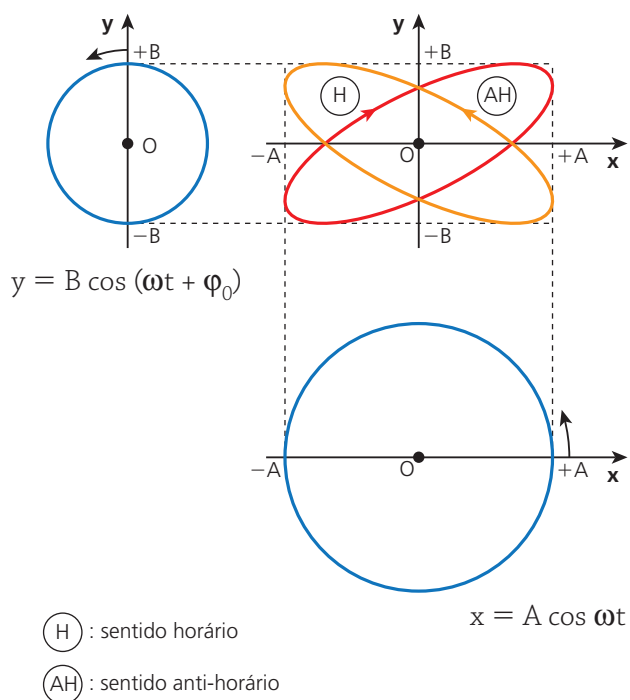
- O movimento resultante elíptico é periódico, mas, obviamente, **não é** harmônico simples.
- Posto que $x = +A$ em $t = 0$, o sentido do movimento, horário (**H**) ou anti-horário (**AH**), pode ser determinado:
  - Analisando o sinal da velocidade $v_y$ em

$$t = 0 \begin{cases} v_y > 0 \Rightarrow \text{AH} \\ v_y < 0 \Rightarrow \text{H} \end{cases}$$

ou

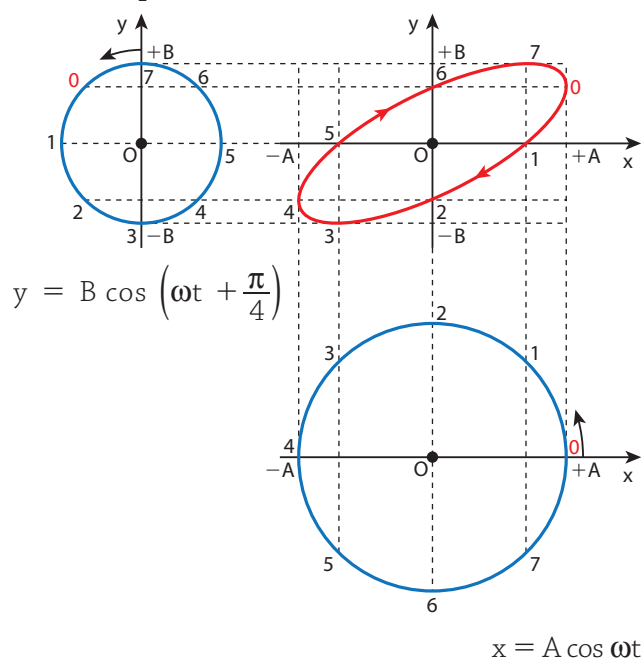
  - Analisando o valor de **y** em $t = \dfrac{T}{4}$, em que **T** é período do movimento $\begin{cases} y = +B \Rightarrow \text{AH} \\ y = -B \Rightarrow \text{H} \end{cases}$

**4) $0 < \varphi_0 < 2\pi$, com $\varphi_0$ diferente de $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{3\pi}{2}$ e de $\pi$**

Nesse caso, o termo em xy permanece na equação (**III**). Esse termo gira os eixos principais da elipse, fazendo com que não mais coincidam com os eixos Ox e Oy do plano cartesiano:

**Destaques:**

- O movimento resultante continua periódico, mas, obviamente, **não é** harmônico simples.
- Posto que $x = +A$ em $t = 0$, o sentido do movimento pode ser determinado por meio da análise do sinal da velocidade $v_y$ em $t = 0$

$$\begin{cases} v_y > 0 \Rightarrow \text{AH} \\ v_y < 0 \Rightarrow \text{H} \end{cases}$$

Acompanhe a construção da elipse, considerando $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$:

## Exercícios

**55.** Por estar submetido a dois campos elétricos variáveis e perpendiculares entre si, um elétron, no vácuo, realiza simultaneamente dois movimentos harmônicos simples. Sua trajetória está contida em um plano cartesiano Oxy e os dois movimentos citados são descritos pelas funções $x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ e $y = 2A \text{ sen}\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Determine:

a) a equação da trajetória do elétron;
b) o sentido do seu movimento.

**56.** (ITA-SP) Sobre um sistema de coordenadas xOy efetuam- se dois movimentos harmônicos simples representados por: $x = a \cos \omega t$ e $y = a\sqrt{3}\ \text{sen}\ \omega t$, onde **a** e **ω** são constantes positivas. Obtenha a equação da trajetória que é o lugar dos pontos (x, y) no plano.

a) Círculo.
b) Elipse com centro na origem.
c) Reta inclinada de 60° com o eixo x.
d) Elipse com um foco na origem.
e) Reta inclinada de 120° com o eixo x.

**57.** (Unesp-SP) Um ponto material realiza um movimento cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = A \text{ sen } \omega t \\ y = B \cos \omega t \\ z = Ct \end{cases}$$

com **A**, **B** e **C** diferentes de zero. A trajetória do ponto material em relação ao sistema **xyz** é:

a) circular.
b) elíptica.
c) parabólica.
d) retilínea.
e) uma curva reversa.

**58.** (ITA-SP) Uma partícula descreve um movimento cujas coordenadas são dadas pelas seguintes equações:

$X(t) = X_0 \cos(\omega t)$ e $Y(t) = Y_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$, em que $\omega$, $X_0$ e $Y_0$ são constantes positivas. A trajetória da partícula é:

a) Uma circunferência percorrida no sentido anti-horário.
b) Uma circunferência percorrida no sentido horário.
c) Uma elipse percorrida no sentido anti-horário.
d) Uma elipse percorrida no sentido horário.
e) Um segmento de reta.

**59.** (ITA-SP) Uma partícula move-se no plano cartesiano Oxy obedecendo às funções horárias:

$x = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ e $y = 2 \operatorname{sen}(\omega t)$, com **x** e **y** em centímetros.

Determine a equação da trajetória da partícula.

**60.** (ITA-SP) A equação $x = 1{,}0 \operatorname{sen}(2{,}0\, t)$ expressa a posição de uma partícula em unidades do Sistema Internacional. Qual seria a forma do gráfico **v** (velocidade) *versus* **x** (posição) desta partícula?

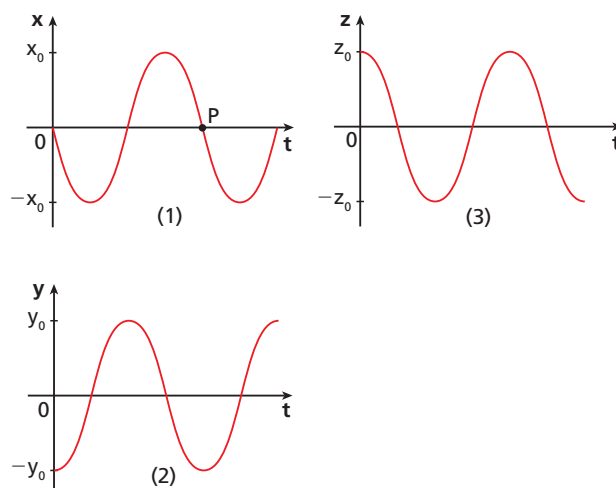
a) Uma reta paralela ao eixo de posição.
b) Uma reta inclinada passando pela origem.
c) Uma parábola.
d) Uma circunferência.
e) Uma elipse.

**61.** Uma partícula realiza um movimento tridimensional em que as funções horárias de suas coordenadas, em relação a um sistema triortogonal Oxyz, são

$x = A \operatorname{sen} \omega t$, $y = A \cos \omega t$ e $z = kt$, em que **A**, $\omega$ e **k** são constantes diferentes de zero.

Determine o módulo **v** da velocidade instantânea dessa partícula.

**62.** (ITA-SP) São dadas três grandezas físicas escalares (**x**, **y** e **z**) que variam periodicamente com o tempo, conforme os gráficos a seguir.

Esses gráficos representam funções **senoidais** e, em todos eles, os módulos de representação são iguais.

Pode-se afirmar que:

a) as três grandezas têm mesmo período, com amplitudes de igual valor numérico e têm mesma fase inicial.

b) **y** é uma função senoidal de **t**, com período **P** e fase inicial $\pi$ rad.

c) as três têm mesma frequência, sendo **z** função senoidal com fase inicial $\frac{\pi}{2}$ rad.

d) **y** e **z** são funções senoidais de **t**, de mesmo período **P** e suas frequências angulares diferem de $\frac{3\pi}{2}$ rad · s$^{-1}$.

e) se o gráfico (1) for o gráfico horário do movimento de um ponto material, o gráfico (2) será o gráfico da velocidade em função do tempo e o gráfico (3) será o gráfico da aceleração em função do tempo, para esse mesmo ponto material.

## Composição de dois MHS de frequências diferentes e direções perpendiculares

Vamos tratar agora do que foi mencionado no início deste apêndice.

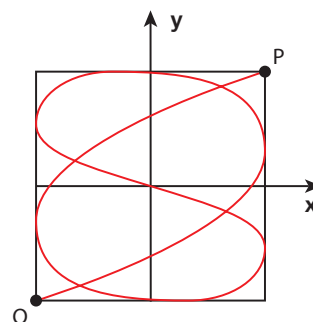
Em um osciloscópio, elétrons podem submeter-se a dois campos elétricos variáveis harmonicamente e perpendiculares entre si: um horizontal, de frequência $f_x$, e outro vertical, de frequência $f_y$.

Nessas condições, os elétrons realizam dois MHS de direções perpendiculares.

Se $f_x$ e $f_y$ forem comensuráveis, o movimento resultante – um movimento periódico – dar-se-á em trajetórias interessantes, denominadas **figuras de Lissajous**, que podem ser observadas na tela do osciloscópio.

As trajetórias dos movimentos resultantes da composição de dois MHS de direções perpendiculares e mesma frequência (assunto já estudado) também são figuras de Lissajous.

A figura de Lissajous depende das frequências dos MHS que participam da composição, de suas amplitudes e da defasagem entre eles.

Observe a figura de Lissajous representada a seguir.

Vamos determinar a razão $\frac{f_x}{f_y}$ entre as frequências dos MHS realizados nas direções **x** e **y**.

Partindo, por exemplo, do ponto **P** indicado na figura, vamos até o ponto **Q** e retornamos ao ponto **P**: é isso que os elétrons fazem durante um intervalo de tempo $\Delta t$, igual ao período do **movimento resultante**.

Nesse percurso, observamos (contamos) a ocorrência de 5 oscilações na direção **x** e de 3 oscilações na direção **y**.

Então, $f_x = \frac{5}{\Delta t}$ e $f_y = \frac{3}{\Delta T}$

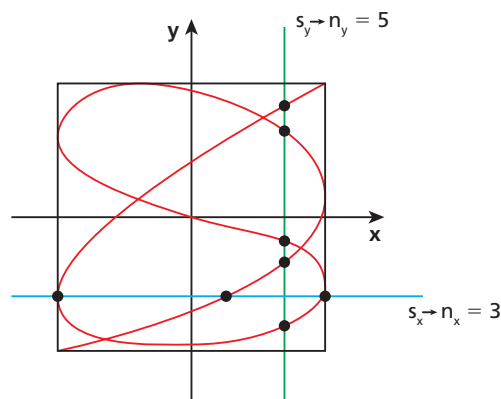
Portanto: $\frac{f_x}{f_y} = \frac{5}{3}$

Podemos, porém, determinar essa razão por meio de uma regra prática.

Traçamos dois segmentos de reta ($s_x$ e $s_y$) **secantes** à figura de Lissajous, cortando-a completamente, sem passar por seus cruzamentos: um segmento é paralelo a **x** ($s_x$) e o outro é paralelo a **y** ($s_y$).

Em seguida, contamos os números de interseções das secantes $s_x$ e $s_y$ com a figura: $n_x$ e $n_y$, respectivamente.

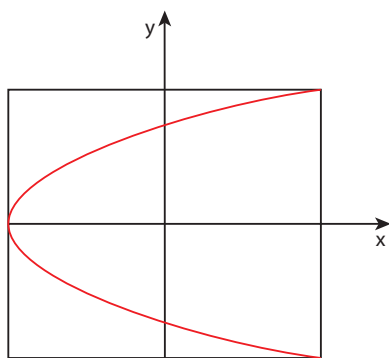
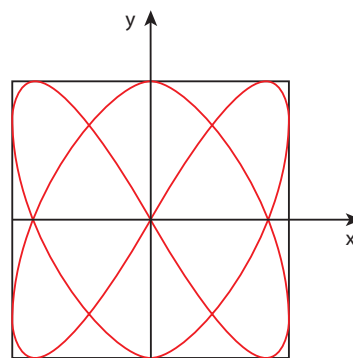
A razão $\frac{f_x}{f_y}$ será igual a $\frac{n_y}{n_x}$.

Conferindo:

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{n_y}{n_x} = \frac{5}{3}$$

**Nota:**

- Se $f_1$ e $f_2$ forem incomensuráveis, a trajetória do movimento resultante não se fechará. Esse movimento não será — obviamente — periódico, e sua análise não é de nosso interesse.

## Exercícios

**63.** Com relação à figura de Lissajous representada abaixo, determine a razão $\frac{f_y}{f_x}$ entre as frequências dos dois MHS que a geraram.

**64.** Sabendo que a frequência do MHS segundo **y** ($f_y$) é igual a 60 Hz, determine a frequência do MHS segundo **x** ($f_x$) na figura de Lissajous representada a seguir.

# Tópico 2

# Ondas

## Bloco 1

### 1. Introdução

Ondas de vários tipos estão presentes em nossa vida. Quando vemos objetos, por exemplo, nossos órgãos visuais estão sendo sensibilizados por ondas luminosas. Devido às limitações do nosso sistema visual, outras ondas do mesmo tipo da luz não podem ser vistas — como as ondas utilizadas nas telecomunicações (ondas de rádio, ondas de televisão e micro-ondas para comunicação via satélite).

Podemos ouvir música, vozes e ruídos devido a ondas sonoras. Assim como acontece com as ondas luminosas, as limitações do nosso sistema auditivo não nos permitem ouvir ondas do mesmo tipo do som, como o ultra-som.

Além da luz e do som, que são as ondas que mais sentimos no nosso dia a dia, podemos encontrar outras, como as ondas formadas na superfície da água quando nela cai alguma coisa, ou como aquelas que aparecem em uma corda esticada quando sacudimos uma de suas extremidades.

Bryan Reinhart/Getty Images

Esta imagem só pode ser vista devido à existência de ondas luminosas.

Todas essas ondas, e as que você estudará adiante, possuem algo em comum: são energias que se propagam através de um meio. **Atenção:** a energia se propaga, porém o meio não acompanha essa propagação, qualquer que seja a onda em estudo.

Bryan Reinhart/Masterfile/Other Images

O som emitido por um violino é uma onda que se propaga pelo ar, acionando nosso sistema auditivo. Temos, assim, a sensação de audição.

Dale Sanders/Masterfile/Other Images

Ao tocar a superfície da água, cada remo produz ondas que se propagam, formando circunferências.

## 2. Ondas mecânicas e ondas eletromagnéticas

De acordo com sua natureza (características físicas), as ondas classificam-se em dois grupos: **ondas mecânicas** e **ondas eletromagnéticas**.

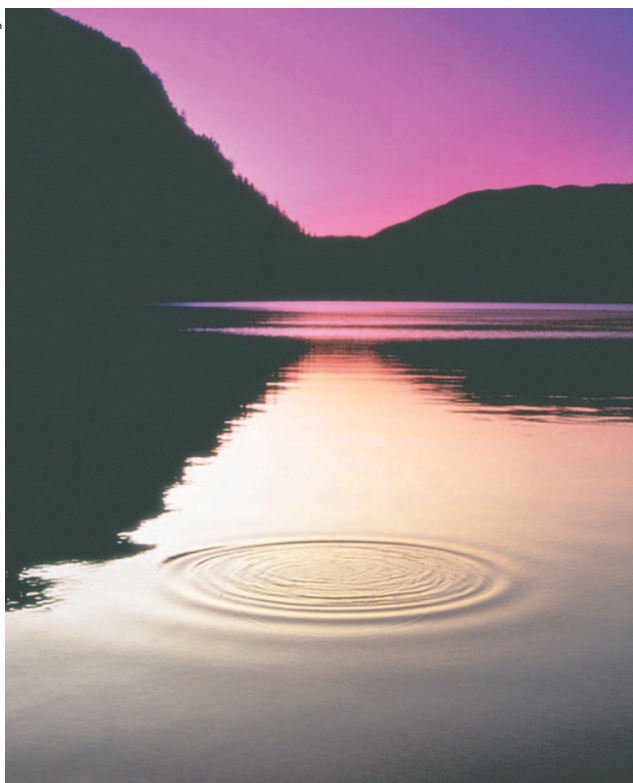
### Ondas mecânicas

São deformações que se propagam em meios elásticos. Esse fenômeno ocorre apenas em meios materiais, pois as ondas mecânicas necessitam de partículas para se propagarem. Isso significa que elas nunca se propagam no vácuo.

A propagação de uma onda mecânica através de um meio material envolve o transporte de energia cinética e de energia potencial mecânica e depende de dois fatores fundamentais: a inércia e a elasticidade do meio.

Como acontece com qualquer onda, uma onda mecânica não transporta o meio onde se propaga. É apenas a energia que muda de local, passando de partícula para partícula do meio material.

Alguns exemplos de ondas mecânicas são as que se propagam em cordas ou molas esticadas, as que se propagam em superfícies de líquidos e os sons.

Masterfile/Other Images

Quando uma pedra atinge a superfície de um lago de águas tranquilas, produz uma onda mecânica que se propaga segundo uma linha circular.

Observe que em todos esses casos a existência de um meio material é fator preponderante para a propagação das ondas mecânicas.

Dessa forma, podemos dizer:

**Onda mecânica** é a propagação de energia através de partículas de um meio material, sem que essas partículas sejam transportadas.

Uma onda mecânica nunca se propaga no vácuo.

### Ondas que se "quebram"...

Thinkstock/Getty Images

Em alto-mar as ondas não transportam matéria; constituem apenas energia se propagando.

Nas proximidades da praia, porém, em razão da diminuição brusca da profundidade, as ondas "quebram", provocando o movimento de toda a massa de água e formando correntezas que podem arrastar corpos que lá se encontram. Essas "ondas quebradas" deixam de se comportar como ondas.



TF2-P2T2_198a255_5P.indd 199 17/08/12 18:23

## *Tsunami*, uma onda mecânica

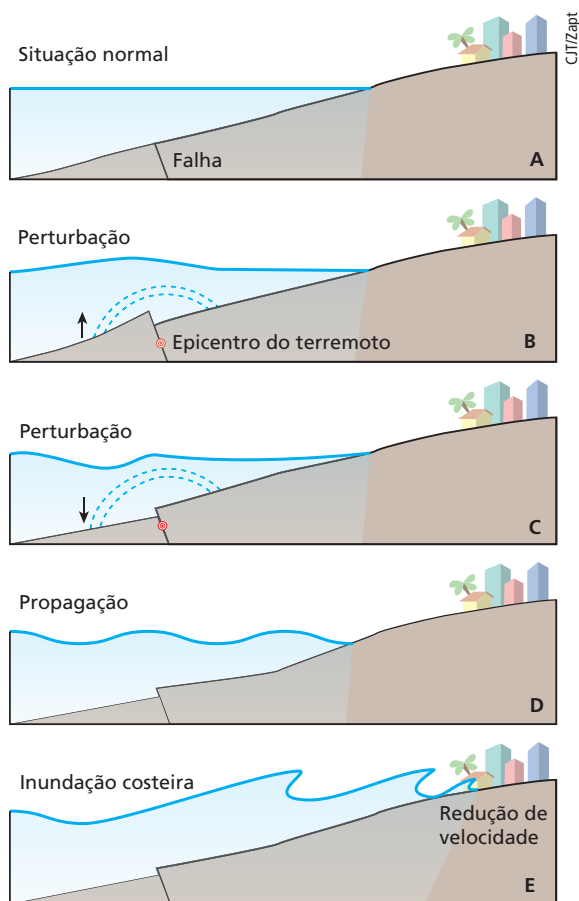
O termo *tsunami* é de origem japonesa — ***tsu*** significa porto e ***nami*** onda. Esse termo surgiu do relato de um grupo de pescadores que estavam em alto-mar pescando. Quando retornaram ao porto, encontraram-no devastado por ondas imensas. Como eles não haviam percebido essas ondas enquanto navegavam, concluíram que foram formadas próximas ao porto. Daí o nome "onda de porto".

John Russell/AFP/Getty Images

Esta fotografia mostra a chegada de um *tsunami*, na Tailândia, no dia 26 de dezembro de 2004, que contabilizou mais de 280 000 vítimas na Ásia e parte da África. Esse fenômeno teve origem a 160 km da parte oeste da Ilha de Sumatra (Indonésia).

Hoje se sabe que tais ondas são formadas após um rápido deslocamento vertical da coluna de água em regiões de grande profundidade. Tal deslocamento pode ser causado por um abalo sísmico, por uma atividade vulcânica, por um grande deslocamento de terra ou gelo ou pela queda de um meteorito. A potência de um *tsunami* depende de sua amplitude e sua velocidade. Quando a onda se aproxima da praia, sua velocidade diminui e sua amplitude aumenta, podendo atingir alturas de mais de 30 metros, devastando assim a orla marítima. Momentos antes da chegada dessas grandes ondas ocorre um rebaixamento significativo do nível do mar. Esse sinal serviria de aviso silencioso sobre o perigo iminente para que a população pudesse refugiar-se em áreas elevadas.

A região de maior probabilidade de ocorrer tais ondas é o Oceano Pacífico, onde existem muitas placas oceânicas que deslizam sob placas continentais. Esses deslizamentos, que acontecem a grandes profundidades (4 000 m), provocam ondas que se propagam na superfície a até 700 km/h.

CJT/Zapt

## O alto-falante emite ondas mecânicas

O alto-falante é um dispositivo utilizado para produzir ondas sonoras a partir de impulsos elétricos. Os primeiros alto-falantes surgiram na década de 1920, nos Estados Unidos, acompanhando os primeiros fonógrafos elétricos.

Através de um cone de papelão (circular ou elíptico) que avança e recua, os alto-falantes emitem ondas **mecânicas longitudinais**.

Os sons agudos (altas frequências), acima de 4 000 Hz, são emitidos por unidades pequenas (*tweeters*) de 3 cm a 5 cm de diâmetro. Os sons graves (baixa frequência), abaixo de 500 Hz, são emitidos pelas unidades (*woofers*) de 25 cm de diâmetro. Já os sons intermediários, de 500 Hz a 4 000 Hz, são emitidos por unidades de 15 cm de diâmetro. No entanto, podemos encontrar um único alto-falante que emite os sons médios e graves.

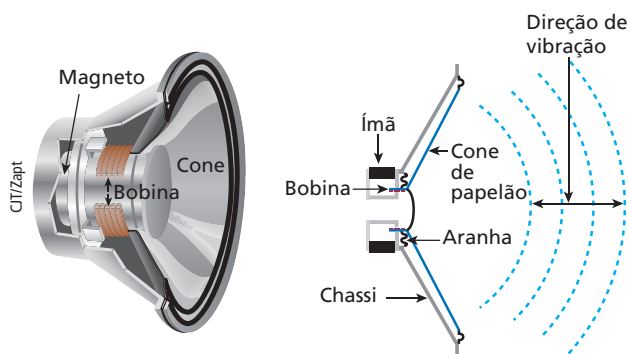



Ilustração esquemática de um alto-falante.

## Ondas eletromagnéticas

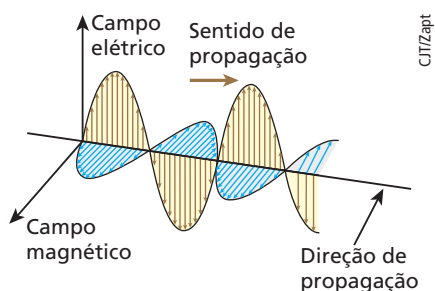
As ondas eletromagnéticas são formadas por dois campos variáveis, um elétrico e outro magnético, que se propagam. Essa propagação pode ocorrer no vácuo e em determinados meios materiais.

Como exemplos de ondas eletromagnéticas podemos citar as ondas de rádio, dentre elas as ondas de AM (Amplitude Modulada) e as de FM (Frequência Modulada), as ondas de TV, as ondas luminosas (luz), as micro-ondas, os raios **X** e $\gamma$, entre outras. Essas denominações são dadas de acordo com a principal fonte geradora das ondas e se diferenciam em especial pelas faixas de frequência.

Todas as ondas eletromagnéticas têm em comum sua velocidade de propagação no vácuo: aproximadamente 300 000 km/s. A velocidade de propagação depende do material do meio e da frequência da onda. Em meios materiais transparentes a essas ondas, a velocidade é menor que 300 000 km/s.

Assim, podemos dizer:

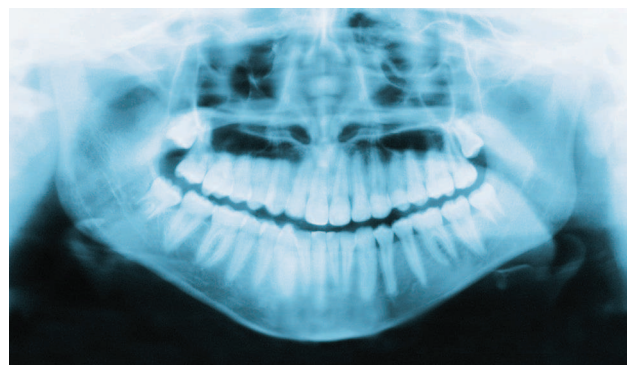
> **Ondas eletromagnéticas** constituem um conjunto de dois campos, um elétrico e outro magnético, que se propagam no vácuo com velocidade aproximada de 300 000 km/s. Em meios materiais, quando ocorre propagação, a velocidade é menor que 300 000 km/s.

Observe, na representação esquemática a seguir, que os campos citados são perpendiculares entre si e, ainda, perpendiculares à direção de propagação da onda.

## Raios $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, X e catódicos

Os raios $\alpha$ são partículas formadas por 2 prótons e 2 nêutrons, núcleos de um dos isótopos do hélio. Os raios $\beta$ e os raios catódicos são compostos de elétrons. Assim, os raios $\alpha$, $\beta$ e catódicos não são ondas, e sim partículas dotadas de carga elétrica, podendo ser desviadas por campos magnéticos.

Dentre os raios $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, X e catódicos, apenas os raios $\gamma$ e X são ondas eletromagnéticas.

Os raios $\gamma$ são obtidos por processos nucleares e, sendo fatais para microrganismos, têm aplicação em esterilização de instrumentos cirúrgicos. Cereais que precisam ficar muito tempo armazenados também costumam ser expostos a raios $\gamma$, para que fiquem livres de fungos e bactérias que produzem a deterioração dos grãos. Esses raios ainda são empregados para destruir tumores cancerígenos.

Na Medicina os raios X são largamente usados para a obtenção de radiografias, e na indústria, dentre outras aplicações, são utilizados para detectar falhas em peças metálicas que irão constituir uma máquina. Minúsculos defeitos e microfissuras podem ser descobertos com o uso dos raios X.

Raio X panorâmico de arcada dentária, muito utilizado por especialistas em ortodontia.
Os raios X são ondas eletromagnéticas que podem se propagar através dos tecidos “moles” do corpo humano, como músculos, tendões e pele, porém, ao atravessarem os ossos, perdem mais energia. Uma película sensível a essas radiações é sensibilizada quando atingida. Assim, podemos “tirar uma fotografia” de partes de nosso corpo e observar sua estrutura óssea.

## Raio *laser*

A palavra *laser* é formada pelas letras iniciais das palavras que formam a expressão inglesa *light amplification by stimulated emission of radiation* (amplificação da luz por emissão estimulada de radiação). A invenção do *laser* data de 1960, no entanto, já em 1954 havia sido inventado o *maser*, no qual usava-se não a luz, mas micro-ondas (*microwave*).

Astra Productions/Corbis/LatinStock

Na fotografia observamos um profissional utilizando o *laser* para "apagar" uma tatuagem no braço de uma pessoa. Esse processo consiste em fazer incidir um feixe de radiação *laser* de luz especial que fraciona as partículas dos pigmentos em parcelas menores. Essas parcelas menores são absorvidas pelo organismo, desaparecendo.

A principal característica de um *laser* é que, pela estimulação de átomos de uma substância particular, se obtém um estreito feixe de luz monocromática, colimada e coerente, isto é, luz de uma mesma cor, em feixe concentrado e em fase. Nesse feixe, todas as partículas de luz (fótons) possuem as mesmas propriedades.

A cada fóton emitido está associado o mesmo comprimento de onda. Dessa forma, pode-se obter uma grande concentração de energia em uma pequena superfície. Para gerar o feixe de luz, um meio (sólido, líquido ou gasoso) é estimulado por uma corrente elétrica, por uma descarga elétrica ou mesmo por outra fonte de luz. Assim, o *laser* transforma energia dispersa em energia concentrada em forma de luz.

Dependendo da finalidade de cada *laser*, ele pode ser obtido de uma substância diferente. Na indústria, por exemplo, são utilizados *lasers* obtidos de moléculas de dióxido de carbono ($CO_2$) ou de íons de neodímio em matrizes sólidas. Nesse caso, a energia gerada é utilizada para soldagem ou cortes de chapas metálicas. Na Medicina, o *laser* pode ser usado como bisturi ou para cauterização de vasos sanguíneos. Na Odontologia, ele substituirá o temido "motorzinho", podendo retirar cáries sem que um pedaço do dente também seja retirado. Os *lasers* usados na Medicina e na Odontologia são obtidos a partir de érbio, hólmio, argônio, neodímio e dióxido de carbono.

O *laser* também é usado na mira de armas modernas, como fuzis e lançadores de mísseis. Em aparelhos de CD e DVD, o *laser* é usado para "ler" o conteúdo dos discos.

## Ondas de rádio AM e FM e ondas de TV

Thinkstock/Getty Images

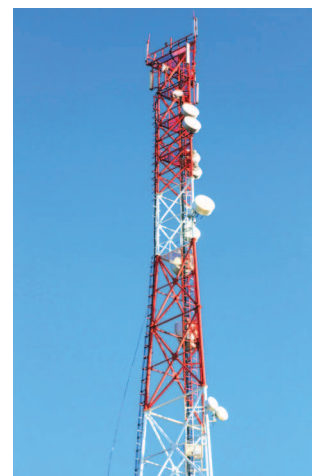
Por meio de antenas como essa, ondas de rádio são enviadas para novos aparelhos receptores.

Em 1887, o físico alemão Heinrich Rudolf **Hertz** descobriu os princípios básicos da emissão e da recepção de ondas de rádio. No início, captava-se no receptor apenas um sinal contínuo. Somente depois de 1904, com o desenvolvimento da válvula termoiônica de Fleming, é que foi possível o início da transmissão via ondas eletromagnéticas. Para que essas ondas fossem portadoras de mensagens, elas deviam ser **moduladas**, isto é, deviam sofrer variações em sua amplitude (AM) ou em sua frequência (FM).

As ondas de **amplitude modulada** (AM) são divididas em três faixas, de acordo com seu comprimento de onda: **ondas curtas** (OC), **ondas médias** (OM) e **ondas longas** (OL). Por causa do longo alcance dessas ondas, elas são utilizadas por emissoras comerciais, nas comunicações entre aviões, por radioamadores etc.

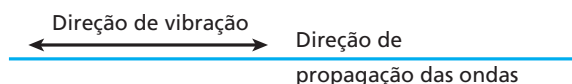
As ondas de **frequência modulada** (FM), embora tenham um alcance menor, podendo ser captadas apenas em um raio de pouco mais de 100 km da fonte emissora, apresentam melhor qualidade. Dessa forma, as ondas de FM têm uma aplicação mais local, para pequenas distâncias. É por isso que, estando em São Paulo, você não pode captar no rádio emissoras de FM do Rio de Janeiro, enquanto algumas emissoras de AM podem ser captadas.

Em um aparelho de televisão, uma faixa de ondas de FM é utilizada para levar sinais que se transformam em imagens e sons. Para cada emissora há um conjunto de duas frequências próximas, uma transportando os sinais de imagem e a outra os sinais de som. Alguns receptores de rádio têm sua banda de frequências ampliada, podendo "captar o som" de canais de TV.

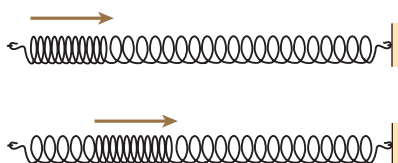
A banda de frequências reservadas às emissoras de TV é dividida em duas faixas: a de VHF (*very high frequencies* — frequências muito altas) e a de UHF (*ultra high frequencies* — frequências ultra-altas).

## 3. Ondas longitudinais, ondas transversais e ondas mistas

Em uma propagação ondulatória, as vibrações podem ocorrer em direção idêntica à da propagação ou em direção perpendicular à dela. Em função disso, as ondas são classificadas em longitudinais e transversais. Em alguns casos, as vibrações ocorrem nas duas direções, tratando-se, então, de ondas mistas.

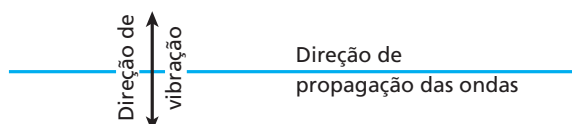
### Ondas longitudinais

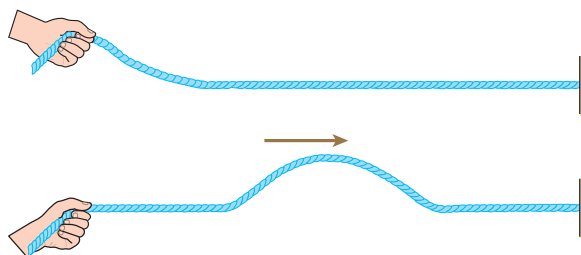
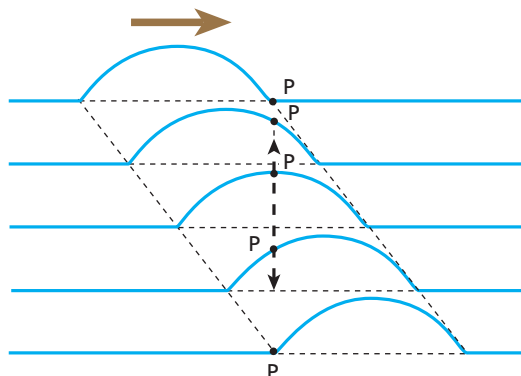
São ondas mecânicas que produzem perturbações nas partículas do meio material na mesma direção em que se propagam.

Como exemplo, considere uma mola elástica disposta horizontalmente:

Se fizermos uma rápida compressão na extremidade esquerda da mola, a compressão se propagará para a direita.

Note que as partículas da mola oscilam horizontalmente, na mesma direção em que a onda se propaga.

Os sons, quando se propagam em meios fluidos (líquidos, gases e vapores), são ondas longitudinais.

### Ondas transversais

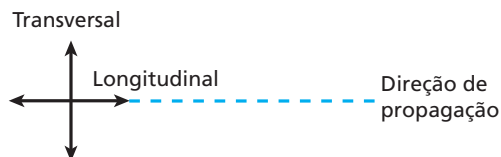
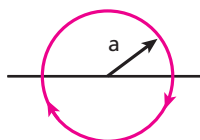
São ondas em que as vibrações ocorrem perpendicularmente à direção de propagação.

Como exemplo, considere uma corda esticada disposta horizontalmente:

Se sacudimos a extremidade esquerda da corda, surge um pulso que se propaga ao longo dela, dirigindo-se para a direita.

Esse pulso provoca um movimento vertical de sobe e desce nos pontos da corda atingidos. O movimento de sobe e desce ocorre perpendicularmente à direção de propagação do pulso, como podemos observar na ilustração.

As ondas eletromagnéticas são constituídas de dois campos variáveis (um elétrico e outro magnético), perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação das ondas. Dizemos, então, que elas são **transversais**.

As perturbações eletromagnéticas que atingem os pontos de um meio, seja ele vácuo ou não, são sempre **perturbações transversais**.

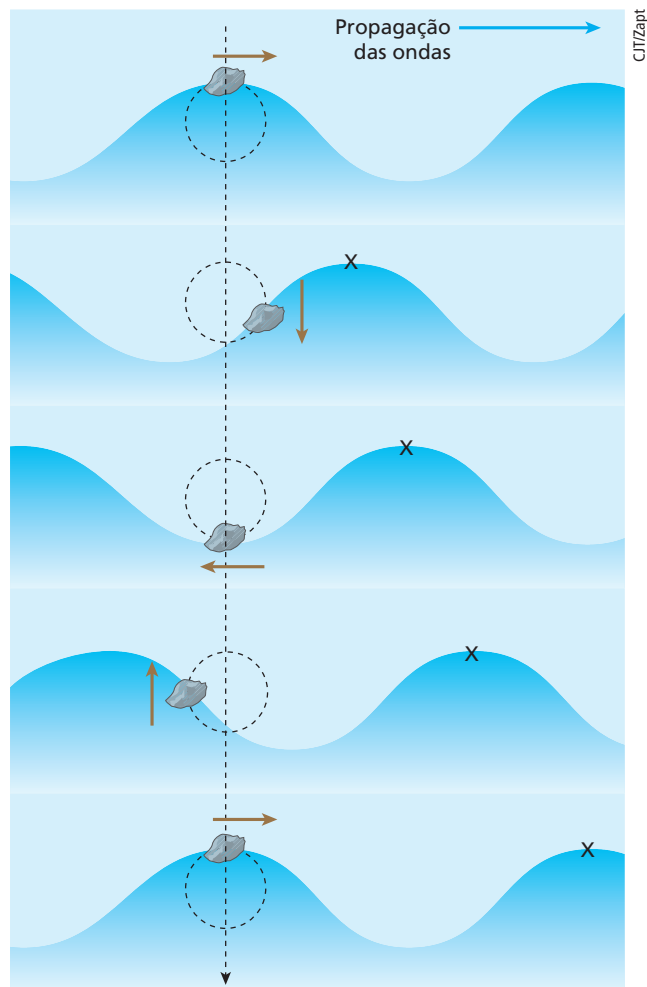
### Ondas mistas

São ondas mecânicas constituídas de vibrações transversais e longitudinais simultâneas.

Quando uma partícula de um meio material é atingida por uma perturbação mista, ela oscila simultaneamente na direção de propagação e na direção perpendicular à de propagação.

Como exemplo, podemos citar as ondas em superfícies de líquidos, que nos mares e lagos geralmente são produzidas pela ação dos ventos sobre a superfície livre da água.

Representação esquemática da trajetória de uma partícula de água durante a passagem da onda.

Fotografia de ondas que se propagam na superfície da água em alto-mar.

Os sons, quando se propagam em meios sólidos, também são exemplos de perturbações mistas.

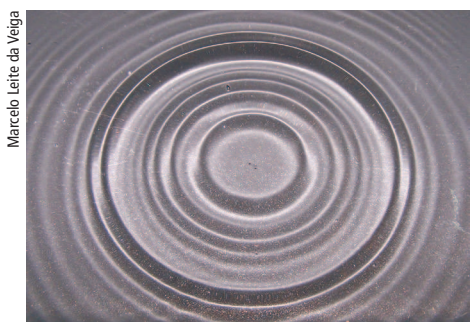
Se um corpo está flutuando na superfície da água em alto-mar, com a passagem da onda ele irá executar um movimento misto. Veja, na sequência a seguir, como esse movimento pode ser representado:

## 4. Frente de onda e raio de onda

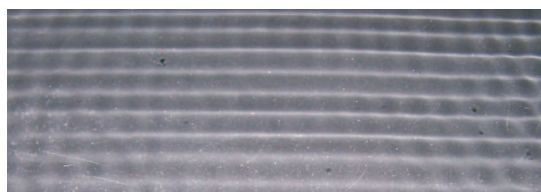
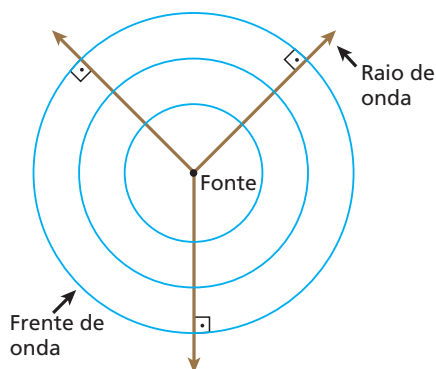
Numa propagação, podemos observar três tipos distintos de ondas:

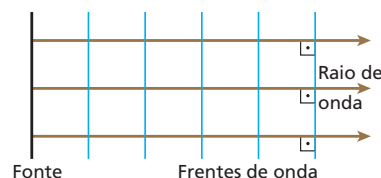
a) **unidimensionais:** propagam-se em uma única dimensão. Por exemplo, ondas em cordas;
b) **bidimensionais:** propagam-se em duas dimensões, isto é, num plano. Por exemplo, ondas em superfície de líquidos;
c) **tridimensionais:** propagam-se em três dimensões, isto é, no espaço. Por exemplo, ondas luminosas e ondas sonoras no ar.

No estudo das ondas bidimensionais e tridimensionais, são úteis os conceitos de frente de onda e de raio de onda:

> **Frente de onda** é a fronteira entre a região já atingida pela onda e a região ainda não atingida.
> **Raio de onda** é uma linha orientada que tem origem na fonte de ondas e é perpendicular às frentes de onda. Os raios de onda indicam a direção e o sentido de propagação das ondas num meio.

Entre as ondas bidimensionais que se propagam na superfície de líquidos, destacam-se as ondas circulares, cujas frentes de onda são circunferências, e as ondas retas, cujas frentes são segmentos de reta.

Ondas circulares geradas na superfície da água.

Veja uma representação esquemática de ondas circulares que se propagam na superfície de um líquido.

Ondas retas geradas na superfície da água.

Veja uma representação esquemática de ondas retas que se propagam na superfície de um líquido.

Entre as ondas tridimensionais (som e luz) que se propagam no espaço, destacam-se aquelas cujas frentes de onda são esféricas ou planas.

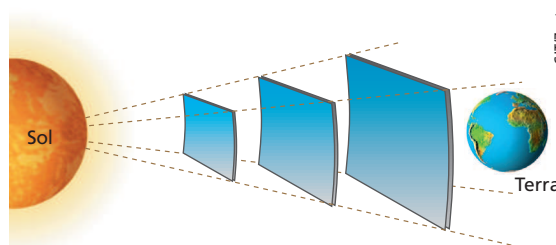
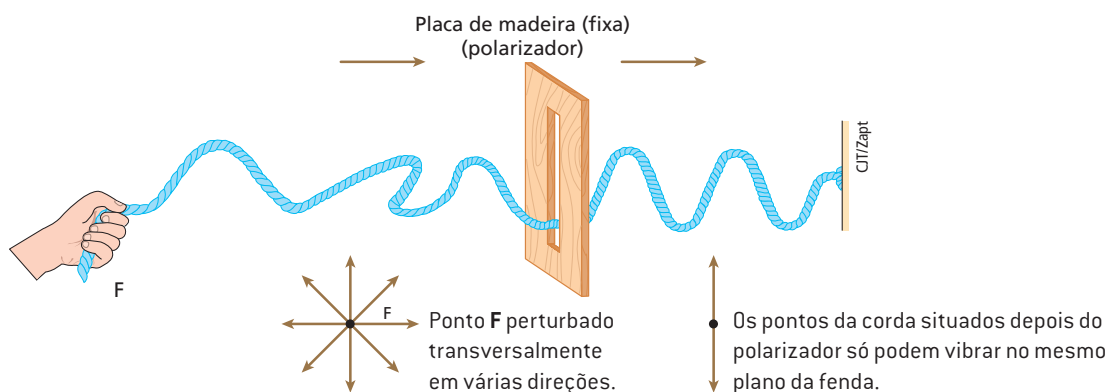



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.

A luz emitida pelo Sol avança pelo espaço apresentando frentes de onda esféricas.

## Onda polarizada

A polarização de uma onda transversal ocorre quando ela é "filtrada", permitindo apenas a passagem das vibrações que ocorrem na mesma direção que a previamente estabelecida pelo polarizador.

Usando uma corda e uma placa de madeira com uma fenda, veja como isso acontece.

Observe que é possível gerar vibrações transversais em todas as direções, mas só vão passar pela placa de madeira aquelas que ocorrem na direção estabelecida pela fenda. As ondas que se propagam após a fenda são denominadas **ondas polarizadas**.

Apenas ondas transversais podem ser polarizadas. A luz, que é uma onda transversal, pode ser polarizada utilizando-se uma lâmina especial (polarizador). Ondas longitudinais, como o som nos fluidos, não podem ser polarizadas.

## Filmes em 3D são assistidos através de lentes polarizadoras

Os primeiros efeitos em 3D eram observados com óculos que tinham, no lugar das lentes, papel celofane vermelho e azul (*red blue*) ou vermelho e verde (*red green*). Esses filtros eram usados para que o olho coberto pelo vermelho não observasse a parte da fotografia ou filme feita em vermelho. O outro olho deixava de ver a parte em azul ou verde, dependendo do filtro.

Image Source/Diomedia

Modelo dos primeiros óculos para filmes 3D.

Os atuais filmes, do tipo iMax, por exemplo, utilizam óculos com lentes polarizadoras, separando para cada olho um plano de vibração. Assim, pode-se produzir o efeito 3D permitindo que cada olho observe apenas uma das duas imagens projetadas na tela.

Lionel Bonaventure/AFP/Other Images

Modelo de óculos com lentes polarizadoras utilizado em filmes do tipo iMax.

## Leitura

### "OUVIR" O UNIVERSO?

Em 1865, o físico escocês James Clerk Maxwell apresentou uma das mais importantes teorias da Física, estabelecendo quatro equações que sintetizam as leis que regem os fenômenos elétricos e magnéticos. Essas equações previam a possibilidade da propagação dos dois campos, o elétrico e o magnético, em conjunto, de tal forma que um era capaz de sustentar a existência do outro. Esses dois campos em conjunto formavam as ondas eletromagnéticas. Heinrich Rudolf Hertz, físico alemão, em 1887, produziu e detectou essas ondas, comprovando experimentalmente a sua existência. A geração dessas ondas, segundo Maxwell e comprovada por Hertz, era feita por cargas elétricas aceleradas, por exemplo, por elétrons oscilantes.

É fácil inferir que estamos mergulhados em um "oceano" de ondas eletromagnéticas geradas pelos dispositivos elétricos que funcionam na Terra e por aquelas que vêm do Sol e do resto do Universo. A humanidade sempre teve curiosidade de decifrar as "mensagens" que recebemos do espaço. Talvez algumas delas nos tragam a comprovação de que não estamos sós, que outras formas de vida inteligente podem existir nas profundezas do Universo.

Fazendo uma breve pesquisa pela internet, podemos encontrar vários radiotelescópios espalhados pelo mundo, voltados para o espaço recebendo ondas eletromagnéticas. O maior e mais famoso deles é o de **Arecibo**, localizado em Porto Rico. Vários filmes de ação o utilizaram em suas cenas. No entanto, ele será levado para o segundo lugar, já que, na província de Guizhou, no sul da China, está sendo construído aquele que se tornará o maior e o mais moderno radiotelescópio, o FAST (**F**ive-hundred-metre **A**perture **S**pherical radio **T**elescope). A construção foi iniciada em 2010 e o funcionamento está previsto para 2016.

SPL/Latinstock

Radiotelescópio de Arecibo.

Seu nome vem do disco único de 500 metros de diâmetro, ocupando o interior de um relevo que lembra uma cratera. Ele será três vezes mais sensível do que o de Arecibo. Com isso, os astrônomos esperam descobrir corpos celestes e novas galáxias a distâncias de até 7 bilhões de anos luz da Terra.

Esses radiotelescópios recebem ondas eletromagnéticas e procuram decifrá-las, entendê-las, daí dizermos estar "escutando" o Universo. Quem sabe...

Para mais informações sobre o assunto vale a pena pesquisar no endereço a seguir:

*Site INOVAÇÃO TECNOLÓGICA*. Nova geração de radiotelescópios vai ouvir os céus. Disponível em: <www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=radiotelescopios-vao-ouvir-ceus>. Acesso em: 04/06/2012.

## Exercícios nível 1

**1. E.R.** Por que é impossível ouvirmos, aqui na Terra, uma explosão solar?

**Resolução:**

As ondas sonoras, sendo ondas mecânicas, não se propagam no vácuo que separa o Sol da Terra.

**2.** Quando uma onda se propaga de um local para outro, necessariamente ocorre:
a) transporte de energia.
b) transformação de energia.
c) produção de energia.
d) movimento de matéria.
e) transporte de matéria e energia.

**3.** Das ondas citadas a seguir, qual delas não é onda eletromagnética?
a) Infravermelho.
b) Radiação gama.
c) Ondas luminosas.
d) Ondas de rádio.
e) Ultrassom.

**4.** No vácuo, todas as ondas eletromagnéticas têm:
a) mesma frequência.
b) mesma amplitude.
c) mesmo comprimento de onda.
d) mesma quantidade de energia.
e) mesma velocidade de propagação.

**5.** Dos tipos de ondas citados a seguir, qual é longitudinal?
a) Ondas em cordas tensas.
b) Ondas em superfície da água.
c) Ondas luminosas.
d) Ondas eletromagnéticas.
e) Ondas sonoras propagando-se no ar.

**6.** Analise as afirmativas:
I. Toda onda mecânica é sonora.
II. As ondas de rádio, na faixa de FM (Frequência Modulada), são transversais.
III. Abalos sísmicos são ondas mecânicas.
IV. O som é sempre uma onda mecânica, em qualquer meio.
V. As ondas de rádio AM (Amplitude Modulada) são ondas mecânicas.
São verdadeiras:
a) I, II e III.
b) I, III e V.
c) II, III e IV.
d) III, IV e V.
e) I, IV e V.

**7.** Qual das ondas a seguir não se propaga no vácuo?
a) Raios *laser* (*light **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation*).
b) Ondas de rádio.
c) Micro-ondas.
d) Ondas de sonar (***so**und **na**vegation **a**nd **r**anging*).
e) Ondas de calor (raios infravermelhos).

**8.** (PUC-SP) As estações de rádio têm, cada uma delas, uma frequência fixa e própria na qual a transmissão é feita. A radiação eletromagnética transmitida por suas antenas é uma **onda de rádio**. Quando escutamos uma música, nossos ouvidos são sensibilizados por **ondas sonoras**.
Sobre **ondas sonoras** e **ondas de rádio**, são feitas as seguintes afirmações:
I. Qualquer onda de rádio tem velocidade de propagação maior do que qualquer onda sonora.
II. Ondas de rádio e ondas sonoras propagam-se em qualquer meio, tanto material quanto no vácuo.
III. Independentemente de a estação de rádio transmissora ser AM ou FM, a velocidade de propagação das ondas de rádio no ar é a mesma e vale aproximadamente $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.
Está correto o que se afirma apenas em:
a) I. b) III. c) I e II. d) I e III. e) II e III.

**9.** Vê-se um relâmpago; depois, se ouve o trovão. Isso ocorre porque:
a) o som se propaga no ar.
b) a luz do relâmpago é muito intensa.
c) a velocidade do som no ar é de 340 m/s.
d) a velocidade do som é menor que a da luz.
e) se esse fenômeno ocorresse no vácuo, o som do trovão e a luz do relâmpago chegariam juntos.

**10.** (Unesp-SP) Uma das características que diferem ondas transversais de ondas longitudinais é que apenas as ondas transversais podem ser:
a) polarizadas.
b) espalhadas.
c) refletidas.
d) refratadas.
e) difratadas.

## Exercícios nível 2

**11.** Um professor de Física que ministrava a primeira aula sobre Ondas dava exemplos de ondas eletromagnéticas. Ele dizia: "São exemplos de ondas eletromagnéticas as ondas de rádio, a luz, as ondas de radar, os raios X, os raios $\gamma$". Um aluno entusiasmado completou a lista de exemplos, dizendo: "Raios $\alpha$, raios $\beta$ e raios catódicos".
Pode-se afirmar que:
a) pelo menos um exemplo citado pelo professor está errado.
b) todos os exemplos citados pelo professor e pelo aluno estão corretos.
c) apenas um exemplo citado pelo aluno está errado.
d) os três exemplos citados pelo aluno estão errados.
e) há erros tanto nos exemplos do professor quanto nos do aluno.

**12.** (UFG-GO) As ondas eletromagnéticas foram previstas por Maxwell e comprovadas experimentalmente por Hertz (final do século XIX). Essa descoberta revolucionou o mundo moderno. Sobre as ondas eletromagnéticas, são feitas as afirmações:

I. Ondas eletromagnéticas são ondas logitudinais que se propagam no vácuo com velocidade constante $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s.

II. Variações no campo magnético produzem campos elétricos variáveis que, por sua vez, produzem campos magnéticos também dependentes do tempo e assim por diante, permitindo que energia e informações sejam transmitidas a grandes distâncias.

III. São exemplos de ondas eletromagnéticas muito frequentes no cotidiano: ondas de rádio, ondas sonoras, micro-ondas e raios X.

Está correto o que se afirma em:

a) I apenas.
b) II apenas.
c) I e II apenas.
d) I e III apenas.
e) II e III apenas.

**13.** (FMTM-MG) *Sir* David Brewster (1781-1868), físico britânico, realizou estudos experimentais sobre reflexão, refração e polarização da luz. Sobre estudos da polarização da luz, mostrou que esse fenômeno é característico de ondas:

I. longitudinais e pode ocorrer por difração ou por meio de polarizadores;

II. transversais e pode ocorrer por reflexão ou transmissão;

III. transversais ou longitudinais e pode ocorrer por interferência ou transmissão.

Está correto o contido em:

a) I apenas.
b) II apenas.
c) III apenas.
d) I e II apenas.
e) I, II e III.

**14.** (ITA-SP) Luz linearmente polarizada (ou plano-polarizada) é aquela que:

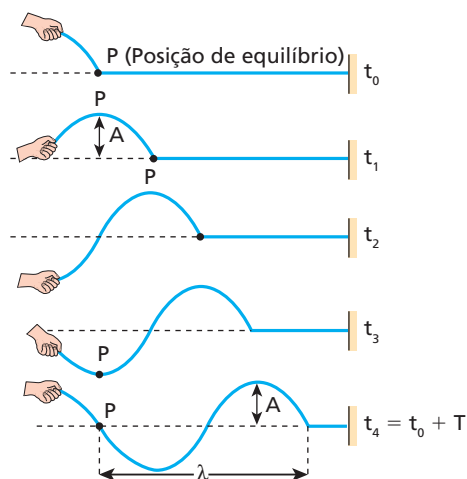
a) apresenta uma só frequência.
b) se refletiu num espelho plano.
c) tem comprimento de onda menor que o da radiação ultravioleta.
d) tem a oscilação, associada à sua onda, paralela a um plano.
e) tem a oscilação, associada à sua onda, na direção de propagação.

# Bloco 2

## 5. Grandezas físicas associadas às ondas

De acordo com a observação e o estudo de fenômenos ondulatórios, percebemos a necessidade de definirmos várias grandezas físicas associadas às ondas.

As principais grandezas são: **amplitude** (**A**), **período** (**T**), **frequência** (**f**) e **comprimento de onda** (**λ**). Utilizando um sistema que nos permita ver as ondas, podemos observar o significado de cada grandeza.

Considere um conjunto de ondas periódicas geradas continuamente (trem de ondas) numa corda, disposta horizontalmente, por um movimento harmônico simples (MHS), executado verticalmente na extremidade livre dessa corda.

Supondo que não haja dissipação de energia na propagação, observamos que essas ondas fazem cada ponto da corda oscilar verticalmente, repetindo o movimento harmônico simples original. O ponto **P**, por exemplo, oscila com a mesma amplitude **A** do MHS que gerou as ondas.

O valor de **A** é denominado **amplitude da onda**. Ele permanece constante ao longo da corda quando a propagação é conservativa (não há dissipação de energia) e diminui ao longo da corda quando a propagação é dissipativa (caso real, em que parte da energia da onda se dissipa). Se duas ondas diferem apenas na amplitude e propagam-se no mesmo meio, a mais intensa (mais forte) é aquela que tem maior amplitude.

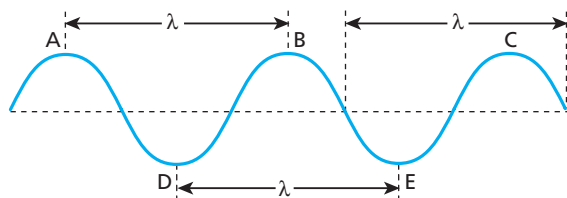
Note que de $t_0$ a $t_4$ o ponto **P** completa uma oscilação (um ciclo). Assim, o intervalo de tempo de $t_0$ a $t_4$ é o período do MHS do ponto **P**, também denominado **período da onda** (**T**).

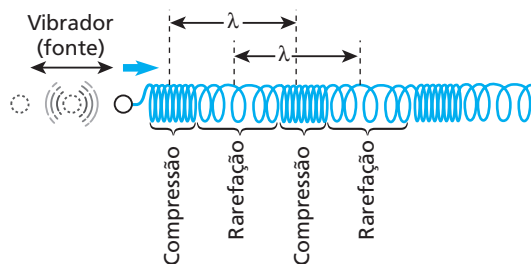
O número de oscilações executadas pelo ponto **P** na unidade de tempo é denominado **frequência da onda** (**f**). Convém notar que a frequência de uma onda é sempre igual à frequência da fonte que a originou e se mantém constante durante toda a existência dessa onda.

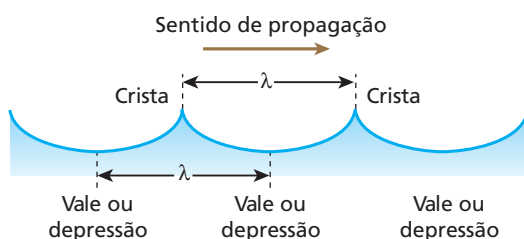
Como vimos, a unidade de frequência no SI é o **hertz** (**Hz**), valendo a relação:

$$f = \frac{1}{T}$$

É importante observar que, durante um período **T** da onda — correspondente a uma oscilação completa do ponto **P** —, ela avança uma determinada distância, a que chamamos de **comprimento de onda**.

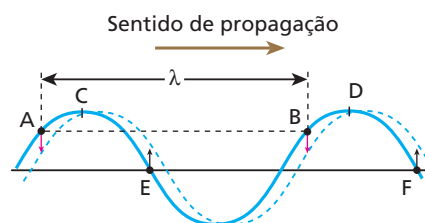
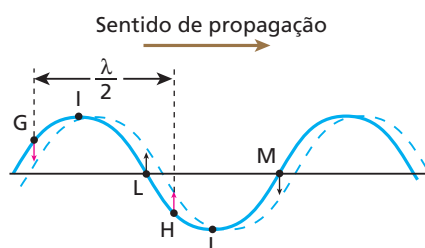
Na figura, essa distância é indicada pela letra grega **λ** (lambda).

Os pontos **A**, **B** e **C** são denominados **cristas** da onda, enquanto os pontos **D** e **E** são chamados **vales** ou **depressões** da onda. Observe que a distância entre duas cristas consecutivas ou entre dois vales consecutivos também é igual a **λ**.

Nas ondas longitudinais, o comprimento de onda é a distância entre os centros de duas compressões ou de duas rarefações sucessivas.

Executando movimentos periódicos de vaivém na extremidade de uma mola, observamos ondas periódicas constituídas de compressões e rarefações.

Nas ondas mistas, o comprimento de onda pode ser obtido pela distância entre duas cristas ou dois vales consecutivos.

As cristas provocam, nas partículas do líquido, deslocamentos para cima e **para a frente**, enquanto os vales provocam deslocamentos para baixo e **para trás**.

Convém destacar que os conceitos de período, frequência, amplitude e comprimento de onda aplicam-se a qualquer onda periódica, não se restringindo aos exemplos citados.

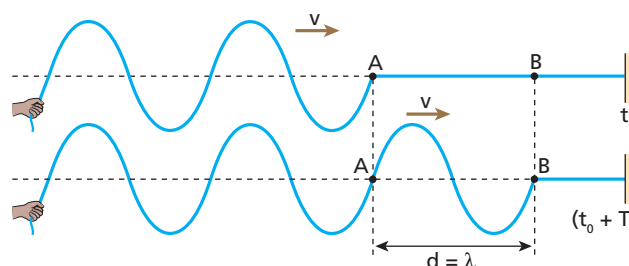
## Concordância e oposição de fase

O comprimento de onda também pode ser conceituado como a distância entre dois pontos consecutivos que vibram em **concordância de fase**, isto é, que apresentam a mesma elongação e se movem no mesmo sentido, em qualquer instante.

Os pontos **A** e **B** apresentam a mesma elongação e se movem no mesmo sentido (ambos estão descendo). Por isso, dizemos que os pontos **A** e **B** estão em concordância de fase, sendo **λ** a distância entre eles. Também estão em concordância de fase os pontos **C** e **D** e os pontos **E** e **F**. Portanto, $\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{AB} = \lambda$.

Dizemos que dois pontos vibram em oposição de fase quando apresentam elongações opostas e se movem em sentidos também opostos.

Os pontos **G** e **H** vibram em oposição de fase, o mesmo ocorrendo com **I** e **J** e com **L** e **M**. A "distância" entre dois pontos consecutivos em oposição de fase é $\frac{\lambda}{2}$.

## 6. Velocidade de propagação de uma onda periódica

Quando uma onda se propaga através de um meio, ela percorre uma distância **d** igual ao seu comprimento de onda ($d = \lambda$), num intervalo de tempo igual a um período ($\Delta t = T$).

TF2-P2T2_198a255_5P.indd 209 17/08/12 18:23

Num meio homogêneo, a velocidade de propagação ($\mathbf{v}$) de uma onda é constante, seja ela mecânica, seja ela eletromagnética, valendo a relação:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

Como $f = \frac{1}{T}$, temos:

$$v = \lambda f$$

Essa relação é fundamental e se aplica à propagação de todas as ondas.

**Nota:**

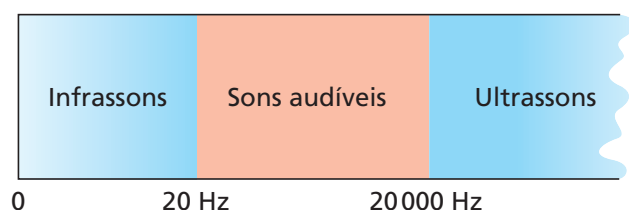
- Para simplificar a linguagem, toda vez que nos referirmos ao módulo da velocidade da onda usaremos apenas **velocidade da onda**.

## 7. O som

O som é constituído de um conjunto de ondas mecânicas que podem ser percebidas pelo sistema auditivo dos seres humanos e de muitos outros animais.

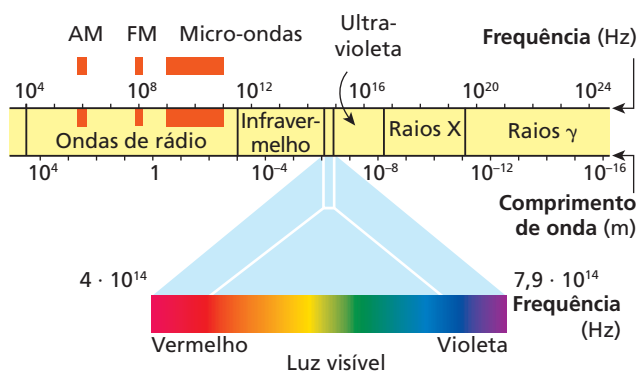
A velocidade de propagação das ondas sonoras depende das condições do meio em que se propagam. No ar, a 15 °C, a velocidade do som é de aproximadamente 340 m/s; na água, de 1500 m/s, e nos sólidos, pode variar de 3000 m/s a 6000 m/s, dependendo da rigidez desse meio.

O sistema auditivo humano é sensível às ondas sonoras que tenham frequência entre 20 Hz e 20000 Hz, aproximadamente. Esse intervalo varia de pessoa para pessoa e de acordo com a idade de cada um.

Se a frequência for menor que 20 Hz, essa onda será denominada **infrassom**. Se a frequência da onda for maior que 20 000 Hz, ela será chamada de **ultrassom**. Ultrassons e infrassons não são ouvidos por seres humanos. Porém, alguns ultrassons podem ser ouvidos por animais, como o cachorro, o golfinho ou o morcego.

### Ultrassons são usados nas primeiras "fotografias" de um bebê

Esta fotografia (colorida artificialmente) mostra a ultrassonografia de um feto de três meses e meio. Ultrassons (ondas sonoras com frequência acima de 20000 Hz) são enviadas através do abdômen da gestante. Essas ondas refletem no feto e originam sinais que, captados por um dispositivo apropriado, produzem imagens em um monitor de vídeo. Os pais recebem o resultado dos exames com as primeiras "fotografias" do bebê.

## 8. A luz

A luz, que é uma onda eletromagnética, só pode sensibilizar nosso sistema visual se tiver sua frequência compreendida entre $4 \cdot 10^{14}$ Hz e $8 \cdot 10^{14}$ Hz, aproximadamente. Nessa faixa, na ordem crescente de frequências, encontramos as cores vermelha, alaranjada, amarela, verde, azul, anil e violeta, que formam as sete cores principais que observamos no arco-íris. As frequências logo abaixo dos $4 \cdot 10^{14}$ Hz são denominadas **infravermelhas** e as logo acima dos $8 \cdot 10^{14}$ Hz **ultravioletas**.

Esquema do espectro eletromagnético, com a localização aproximada das faixas de frequência das principais ondas eletromagnéticas.

A diferença entre as ondas eletromagnéticas que podemos "enxergar" (luz visível) e as ondas de rádio, por exemplo, está principalmente na frequência. A propagação de todas as ondas eletromagnéticas se faz no vácuo a uma velocidade próxima de 300 000 km/s. Em meios materiais, essa propagação é feita a velocidades menores, e os valores dependem do meio transparente e da frequência da onda.

### Raios infravermelhos no controle da TV?

O controle remoto de um aparelho eletrônico utiliza ondas eletromagnéticas (raios infravermelhos) para enviar sinais que provocam alterações no funcionamento do aparelho: aumentar ou diminuir a intensidade do som e mudar de canal (em um aparelho de TV), entre outras. Antigamente, usava-se o ultrassom nos aparelhos de controle remoto. No entanto, um simples bater de porta podia provocar uma troca de canal na TV. Daí a mudança para raios infravermelhos.

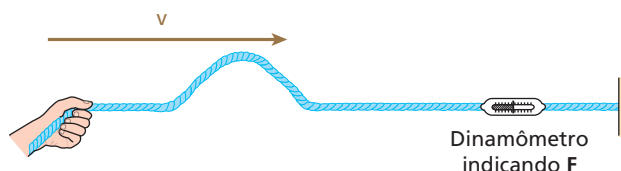
## 9. Velocidade de propagação de ondas transversais em cordas tensas

As cordas tensas (esticadas) constituem ótimos meios para observação da propagação de ondas mecânicas transversais. Considerando uma corda de massa **m** e comprimento **L**, temos que a densidade linear $\delta$ (delta) dessa corda é a razão entre sua massa **m** e seu comprimento **L**.

Assim:

$$\delta = \frac{m}{L} \quad \text{Unidade no SI: kg/m}$$

A grandeza $\delta$ fornece a massa da corda por unidade de comprimento.

Podemos constatar que, na propagação de um pulso transversal ou de uma onda periódica transversal, a velocidade **v** depende apenas de dois fatores: da densidade linear ($\delta$) da corda e da intensidade da força tensora (**F**) a que ela está submetida.

Experimentalmente se comprova que, para o cálculo da velocidade **v** de propagação da onda, vale a relação:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\delta}}$$

Esta expressão é também chamada de **fórmula de Taylor**.

Como as cordas em geral são cilíndricas, podemos escrever essa relação de outra maneira.

A corda tem:

- volume: $V = \pi r^2 L$;
- densidade absoluta (volumétrica): $\mu = \frac{m}{V}$.

Assim:

$$\mu = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 L} \Rightarrow m = \mu \pi r^2 L$$

Entretanto, a densidade linear $\delta$ é dada por:

$$\delta = \frac{m}{L} \Rightarrow \delta = \frac{\mu \pi r^2 L}{L} \Rightarrow \delta = \mu \pi r^2$$

Substituindo esse resultado na relação do cálculo da velocidade das ondas em cordas, fica:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\delta}} = \sqrt{\frac{F}{\mu \pi r^2}}$$

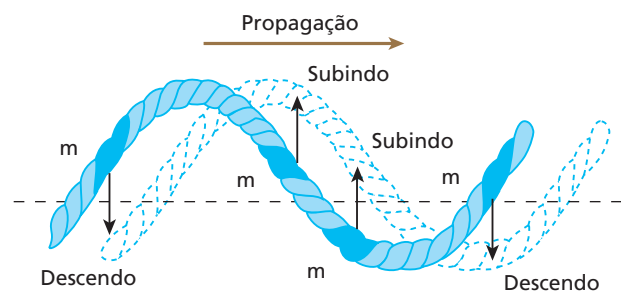
$$v = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{F}{\mu \pi}}$$

É importante observar que em cordas tensas também vale a relação vista no item 6 ($v = \lambda f$).

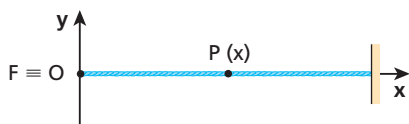
### Energia mecânica na propagação da onda

A propagação ondulatória sempre envolve uma transmissão de energia. No caso das ondas na corda,

essa energia, que é mecânica, apresenta-se parte sob a forma de energia cinética e parte sob a forma de energia potencial elástica.

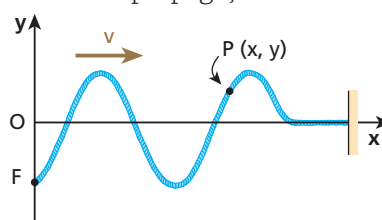
A energia cinética está na massa da corda, que naquele instante está subindo ou descendo. A energia potencial está na parte da corda que apresenta deformação, pois essa corda é um corpo elástico.

Um pequeno pedaço de massa **m** da corda, em cada instante, está subindo ou descendo (exceto quando por ele passa uma crista ou um vale). Assim, esse pedaço possui energia cinética.

## Equação de uma onda periódica transversal propagando-se em uma corda tensa

Considere uma corda elástica esticada. O ponto **F** da corda é fonte emissora de ondas periódicas transversais, o ponto **O** é origem de um sistema cartesiano xOy e **P** é um ponto da corda escolhido arbitrariamente.

A partir dessa situação ($t = 0$), o ponto **F** executará um MHS de amplitude **A** e fase inicial $\varphi_0$.

Assim, a ordenada **y** de **F** irá variar com o tempo, segundo a equação do MHS:

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Não havendo dissipação de energia na propagação após um tempo ($\Delta t$), o ponto genérico **P** da corda passará também a executar um MHS de mesma amplitude **A**, porém defasado $\Delta t$ em relação a **F**. Como $\Delta t$ é o intervalo de tempo que a onda levou para atingir **P**, conclui-se que $\Delta t = \frac{x}{v}$, em que **x** é a abscissa de **P** e **v** é a velocidade de propagação da onda.

Assim, o ponto genérico **P** tem sua ordenada **y** dada em função do tempo por:

$$y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi_0]$$

Lembrando que $\omega = 2\pi f$ e que $\Delta t = \frac{x}{v}$, temos:

$$y = A\cos\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

$$y = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{fx}{v}\right) + \varphi_0\right] \quad \text{(I)}$$

$$\text{Mas } v = \lambda f \Rightarrow \frac{v}{f} = \lambda \text{ ou } \frac{f}{v} = \frac{1}{\lambda}. \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$y = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

Para cada ponto da corda, a abscissa **x** é fixa e a ordenada **y** varia em função do tempo, de acordo com essa função.

## Leitura

### Nas ondas do rádio

Considere esta cena: é domingo e você está em casa assistindo à TV, que transmite um sensacional grande prêmio de Fórmula 1. Ao mesmo tempo, de um canto menos importante da sala, um velho rádio em baixo volume reproduz na imaginação os lances decisivos de uma partida de futebol. De repente, a campainha de um telefone celular soa estridente, anunciando a recepção de uma ligação... Que agente físico viabiliza os funcionamentos da TV, do rádio e do telefone celular? Ondas eletromagnéticas. Em particular, as radiofrequências que são radiações com comprimento de onda bem maior que o da luz visível.

Para que chegássemos ao atual estágio de conhecimento sobre telecomunicações, muitos pensadores deram sua contribuição.

NYPL/Science Source/Photo Researchers/Getty Images

James Clerk Maxwell (1831-1879): propôs quatro equações fundamentais na descrição dos fenômenos eletromagnéticos.

O responsável teórico por essa notável evolução foi o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell, tido como um dos cientistas mais importantes entre Newton e Einstein. Ele formulou quatro equações que descrevem a natureza dos campos elétrico e magnético em termos de espaço e tempo, constituindo-se na base do eletromagnetismo. Essas equações preveem a possível propagação conjunta desses campos com transmissão de energia eletromagnética através do vácuo e de alguns meios materiais de modo semelhante ao que ocorre com a luz.

Maxwell, entretanto, nunca comprovou experimentalmente suas teses. As conclusões a que chegou, porém, abriram caminho para que, vinte anos mais tarde, o físico alemão Hertz fizesse com que duas bobinas interagissem a distância, sem que houvesse conexão entre elas por meio de fios. Em 1886, durante uma aula que ministrava na Escola Politécnica de Karlsruhe, Hertz produziu uma faísca elétrica em uma das bobinas, verificando na outra, distante aproximadamente 1 metro, também o surgimento de uma faísca de mesma natureza, embora com intensidade menor. Com esse experimento, o cientista confirmou preliminarmente as previsões de Maxwell sobre a existência de radiações capazes de se propagar pelo espaço transportando energia de um ponto a outro. Hertz realizou ensaios mais elaborados e, fundamentado em descobertas inusitadas, apresentou, em 1888, uma memorável teoria ondulatória. Em sua obra, as ondas eletromagnéticas, como as que ele próprio era capaz de produzir (radiações de baixa frequência, denominadas mais tarde **ondas hertzianas**), recebiam tratamento análogo à luz, podendo também apresentar fenômenos de reflexão, refração, interferência e polarização. Além disso, Hertz corroborou para com a ideia de que todas as ondas eletromagnéticas propagam-se em linha reta no vácuo com velocidade $c \cong 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

Hulton Archive/Getty Images

Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894): comprovou experimentalmente as teorias de Maxwell referentes à transmissão e recepção de ondas eletromagnéticas.

Mary Evans/Diomedia

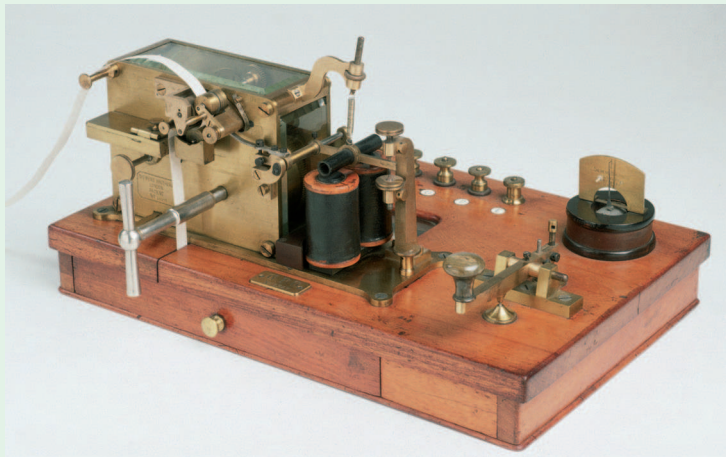
Guglielmo Marconi (1874-1937): em 12 de outubro de 1931, utilizando ondas de rádio, ligou de Roma a chave geral da iluminação do Cristo Redentor, no Rio de Janeiro.

Reprodução

Padre Roberto Landell de Moura (1861-1928): transmissões de ondas de rádio antes de Marconi.

Abria-se então a possibilidade de transmissões a distância, o que levou vários pesquisadores a sonhar com o telégrafo e o telefone sem fio. Um desses visionários foi o italiano Guglielmo Marconi que imaginou até a possibilidade de transmissões transatlânticas. Mesmo enfrentando o ceticismo dos que acreditavam que a esfericidade da Terra impediria a captação de radiofrequências em longas distâncias e sofrendo pressões de poderosas empresas de telégrafo, que mantinham em operação imensas malhas de postes e fios, Marconi não esmoreceu. Desenvolveu novos equipamentos e, em 1901, conseguiu transmitir o sinal Morse correspondente à letra S a uma distância de 3 700 km, aproximadamente, entre Cornualha, na Inglaterra, e Terra Nova, no Canadá. Com isso, descobriu-se que as ondas eletromagnéticas de baixa frequência podiam refletir-se na ionosfera, viabilizando o envio de sinais a regiões muito além da linha do horizonte. Em 1909, Marconi foi distinguido com o prêmio Nobel de Física.

Um brasileiro também merece destaque como um dos precursores das telecomunicações. Trata-se do padre-engenheiro Roberto Landell de Moura que, antes de Marconi, em 1894, fez uma transmissão de ondas hertzianas da região da avenida Paulista, em São Paulo, para a Serra da Cantareira, nas imediações do bairro de Santana, distante cerca de 8 km em linha reta.

Hoje, o telégrafo perdeu sua importância inicial, sendo cogitado apenas em situações específicas. As telecomunicações, ao fazerem uso de satélites de sofisticada tecnologia e de antenas de grande potência distribuídas sobre a superfície terrestre, possibilitam conexão imediata entre locais e pessoas. Com isso, um determinado acontecimento pode ser veiculado praticamente no mesmo instante nos rincões mais distantes do planeta.

DK Limited/CORBIS/Latinstock

Aparelho de telégrafo utilizado no século passado, construído com latão, aço e madeira. Este modelo é posterior ao criado por Morse.

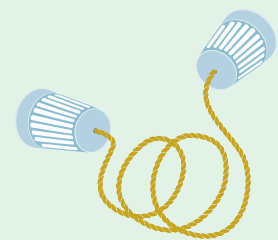
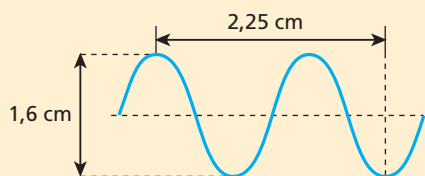
## Faça você mesmo

Para este experimento, você deve dispor de dois copos de plástico ou papelão (resistentes), de uma lapiseira ou caneta (para furar a base dos copos) e de uns cinco metros de barbante.

Faça um pequeno furo no fundo de cada copo. Passe uma das extremidades do barbante pelo furo de um dos copos, de fora para dentro, e dê um nó, grande o suficiente para que o barbante não escape pelo orifício. Repita esse mesmo procedimento no outro copo.

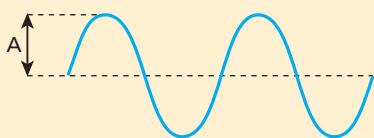
Agora, solicite que um colega converse com você por meio do instrumento fabricado, falando no interior de um dos copos, enquanto você mantém o outro colado à orelha. Atenção: o barbante deve permanecer esticado durante a conversa, senão as ondas mecânicas não irão se propagar de um para o outro.

Luís Augusto Ribeiro

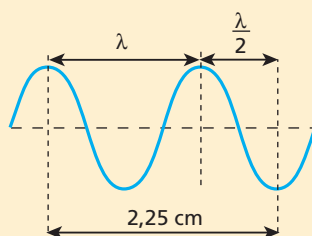
Esse experimento mostra que a onda sonora emitida por um dos participantes se propaga através do barbante esticado atingindo o outro copo, permitindo que ocorra uma conversa sigilosa entre eles.

**15. E.R.** A figura representa um trecho de uma onda que se propaga a uma velocidade de 300 m/s:

Para esta onda, determine:

a) a amplitude;
b) o comprimento de onda;
c) a frequência;
d) o período.

**Resolução:**

a) A amplitude (**A**) é a distância entre o nível de referência (linha horizontal tracejada) e a crista da onda.

Assim:

$$A = \frac{1{,}6 \text{ cm}}{2} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}80 \text{ cm}}$$

b) O comprimento de onda (**λ**) é a distância entre duas cristas (ou dois vales) consecutivos.

Assim:

$$\lambda + \frac{\lambda}{2} = 2{,}25$$

$$1{,}5\,\lambda = 2{,}25 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1{,}5 \text{ cm}} \text{ ou } \boxed{\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

c) Usando a equação da **propagação das ondas**, temos:

$$v = \lambda f$$

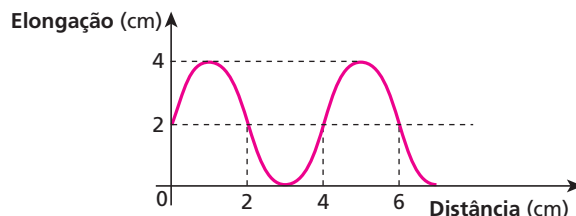
$$300 = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot f$$

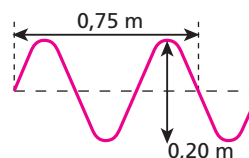
$$\boxed{f = 20\,000 \text{ Hz} = 20 \text{ kHz}}$$

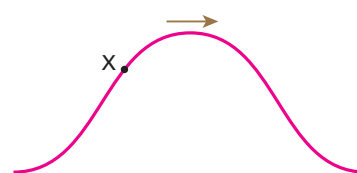
d) O período de uma onda é o inverso da sua frequência.

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{20\,000} \text{ s}$$

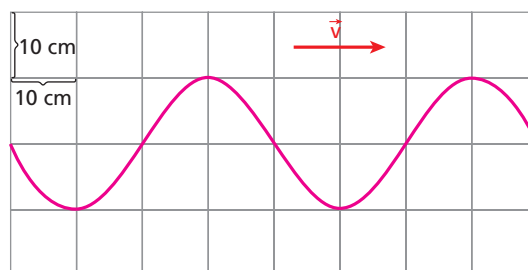
$$\boxed{T = 5{,}0 \cdot 10^{-5} \text{ s}}$$

**16.** O gráfico a seguir mostra a variação da elongação de uma onda transversal com a distância percorrida por ela:

Qual o comprimento de onda e qual a amplitude dessa onda?

**17.** A figura representa a propagação de uma onda ao longo de uma corda com frequência de 20 Hz.

Qual a velocidade de propagação dessa onda?

**18.** (UFPI) A figura abaixo mostra um pulso movendo-se para a direita, ao longo de uma corda.

A direção do movimento do ponto **x** da corda, neste momento, está mais bem representada na alternativa:

a) ↑
b) ↓
c) →
d) ←
e) 

**19.** (Fatec-SP) Uma onda se propaga numa corda, da esquerda para a direita, com frequência de 2,0 hertz, como é mostrado na figura.

De acordo com a figura e a escala anexa, é correto afirmar que:

a) o período da onda é de 2,0 s.
b) a amplitude da onda é de 20 cm.
c) o comprimento da onda é de 20 cm.
d) a velocidade de propagação da onda é de 80 cm/s.
e) todos os pontos da corda se movem para a direita.

**20.** (UnicenP-PR) O físico que se especializa na área médica desenvolve métodos e aparelhos para diagnóstico, prevenção e tratamento de diversas anomalias ou doenças. O grande poder de penetração das radiações eletromagnéticas de determinadas frequências possibilitou a criação de procedimentos médicos como a tomografia computadorizada, a mamografia e a densitometria óssea. Contudo, certas ondas mecânicas também podem fornecer informações sobre o interior do corpo humano, revelando o sexo dos bebês antes do nascimento ou facilitando diagnósticos cardíacos: os ecocardiogramas.
A radiação eletromagnética e a onda mecânica que comumente permitem a realização dos exames médicos citados são, respectivamente:
a) raios "gama" e infrassom.
b) raios infravermelhos e ultrassom.
c) raios ultravioleta e raios "X".
d) raios "X" e ultrassom.
e) ondas de rádio e infrassom.

**21. E.R.** Qual é a frequência de uma onda luminosa, monocromática e de comprimento de onda igual a $6 \cdot 10^3$ Å, quando ela se propaga no ar?
**Dado**: velocidade da luz no ar $= 3 \cdot 10^8$ m/s

**Resolução:**
A relação entre a frequência (**f**), o comprimento de onda (**λ**) e a velocidade (**v**) de uma onda, quando ela se propaga num determinado meio, é:

$$v = \lambda f$$

Assim, sendo $v = 3 \cdot 10^8$ m/s, 1 Å $= 10^{-10}$ m e $\lambda = 6 \cdot 10^3$ Å $=$ $= 6 \cdot 10^{-7}$ m, temos:

$$3 \cdot 10^8 = 6 \cdot 10^{-7} f \Rightarrow \boxed{f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

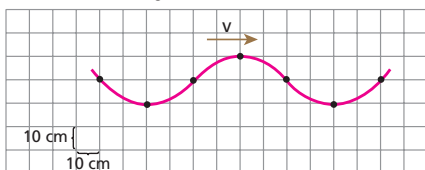
**22.** Para atrair um golfinho, um treinador emite um ultrassom com frequência de 25 000 Hz, que se propaga na água a uma velocidade de 1 500 m/s. Qual é o comprimento de onda desse ultrassom na água?

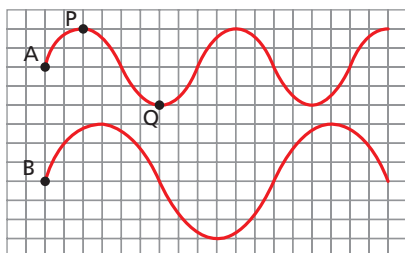
**23.** Os modernos fornos de micro-ondas usados em residências utilizam radiação eletromagnética de pequeno comprimento de onda para cozinhar os alimentos. A frequência da radiação utilizada é de aproximadamente 2 500 MHz. Sendo 300 000 km/s a velocidade da luz no vácuo, qual é, em centímetros, o valor aproximado do comprimento de onda das radiações utilizadas no forno de micro-ondas?

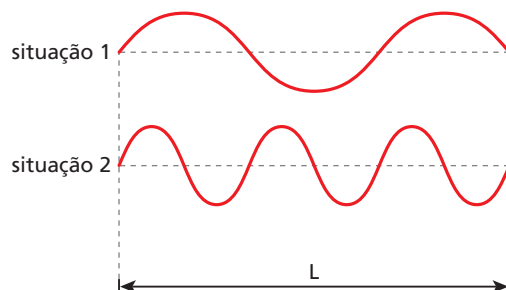
**24.** Uma emissora de rádio, na faixa de FM (Frequência Modulada), transmite utilizando ondas de 3,0 m de comprimento. Sendo $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s a velocidade das ondas eletromagnéticas no ar, qual a frequência dessa emissora de rádio? Dê a resposta em MHz.

**25.** (PUC-SP) Em dezembro de 2004, um terremoto no fundo do oceano, próximo à costa da ilha de Sumatra, foi a perturbação necessária, para a geração de uma onda gigante, um *tsunami*. A onda arrasou várias ilhas e localidades costeiras na Índia, no Sri Lanka, na Indonésia, na Malásia, na Tailândia, dentre outras. Um *tsunami* de comprimento de onda 150 quilômetros pode se deslocar com velocidade de 750 km/h. Quando a profundidade das águas é grande, a amplitude da onda não atinge mais do que 1 metro, de maneira que um barco nessa região praticamente não percebe a passagem da onda.
Quanto tempo demora para um comprimento de onda desse *tsunami* passar pelo barco?
a) 0,5 min
b) 2 min
c) 12 min
d) 30 min
e) 60 min

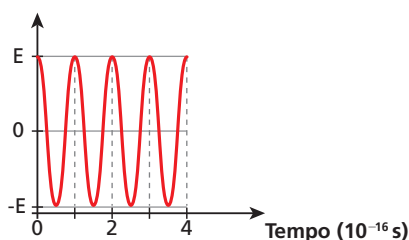
## Exercícios nível 2

**26.** Uma onda periódica, de período igual a 0,25 s, se propaga numa corda conforme a figura abaixo.

Quais os valores do comprimento de onda, da frequência e da velocidade de propagação dessa onda?

**27.** (IJSL) Em duas cordas elásticas idênticas, tracionadas por forças de mesma intensidade, são produzidas duas ondas harmônicas progressivas **A** e **B**. As figuras representam as formas das cordas num determinado instante.

Pode-se afirmar que:
a) As ondas possuem mesma amplitude.
b) Os pontos das cordas oscilam com a mesma frequência.
c) As ondas se propagam com a mesma velocidade.
d) As ondas possuem o mesmo comprimento de onda.
e) Os pontos **P** e **Q** da onda **A** vibram em concordância de fase.

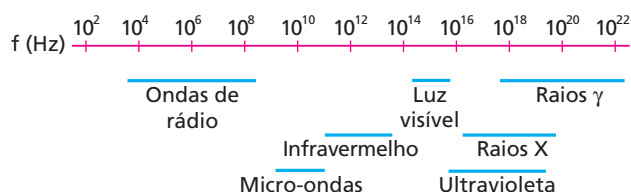
**28.** (UFTM-MG) A figura mostra o perfil de uma mesma corda por onde se propaga uma onda, em duas situações distintas, nas quais a corda está sob ação de uma força de tração de mesma intensidade.

a) Sendo $f_1$ e $f_2$ as frequências de oscilação dos pontos da corda nas situações 1 e 2, respectivamente, determine a razão $\frac{f_2}{f_1}$.

b) Considere L = 4,2 m. Se na primeira situação a frequência de oscilação dos pontos da corda é de 4 Hz, qual a velocidade de propagação das ondas nessa situação, em m/s?

**29.** (Fuvest-SP) Em um ponto fixo do espaço, o campo elétrico de uma radiação eletromagnética tem sempre a mesma direção e oscila no tempo, como mostra o gráfico abaixo, que representa sua projeção **E** nessa direção fixa; **E** é positivo ou negativo conforme o sentido do campo.

| Radiação eletromagnética | Frequência f (Hz) |
|---|---|
| Rádio AM | $10^6$ |
| TV (VHF) | $10^8$ |
| micro-onda | $10^{10}$ |
| infravermelha | $10^{12}$ |
| visível | $10^{14}$ |
| ultravioleta | $10^{16}$ |
| raios X | $10^{18}$ |
| raios γ | $10^{20}$ |

Consultando a tabela acima, que fornece os valores típicos de frequência **f** para diferentes regiões do espectro eletromagnético, e analisando o gráfico de **E** em função do tempo, é possível classificar essa radiação como

a) infravermelha.
b) visível.
c) ultravioleta.
d) raios X.
e) raios γ.

**30.** (UCDB-MT) A figura apresenta a frequência das ondas do espectro eletromagnético:

Admitindo que a velocidade de propagação da luz no ar vale $3,0 \cdot 10^8$ m/s, uma onda com $\lambda = 6,0 \cdot 10^{-7}$ m seria:

a) uma onda de rádio.
b) luz infravermelha.
c) luz visível.
d) luz ultravioleta.
e) raios X.

**31.** O espectro da luz visível ocupa a estreita faixa do espectro eletromagnético cujos comprimentos de onda variam, aproximadamente, entre $4,0 \cdot 10^{-7}$ m a $7,0 \cdot 10^{-7}$ m. Se a velocidade da luz no vácuo é $3,0 \cdot 10^8$ m/s, a frequência das radiações eletromagnéticas visíveis está compreendida no intervalo

a) $1,3 \cdot 10^{-15}$ Hz a $2,3 \cdot 10^{-15}$ Hz.
b) $2,3 \cdot 10^{-15}$ Hz a $3,1 \cdot 10^{-15}$ Hz.
c) $3,4 \cdot 10^{14}$ Hz a $5,7 \cdot 10^{14}$ Hz.
d) $4,3 \cdot 10^{14}$ Hz a $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz.
e) $1,2 \cdot 10^2$ Hz a $2,1 \cdot 10^2$ Hz.

**32.** (PUC-SP) O fone de ouvido tem se tornado cada vez mais um acessório indispensável para os adolescentes que curtem suas músicas em todos os ambientes e horários. Antes do advento do iPod e outros congêneres, para ouvir as músicas da parada de sucessos, os jovens tinham que carregar seu radinho portátil sintonizado em FM (frequência modulada).

| FM | 88 | 92 | 96 | 100 | 104 | 108 MHz TUNE |
|---|---|---|---|---|---|---|

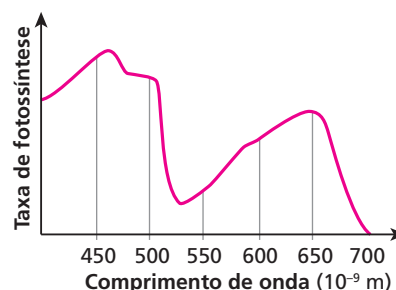
ESCALA 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Observando o painel de um desses rádios, calcule a razão aproximada entre o maior e o menor comprimento de onda para a faixa de valores correspondentes a FM.

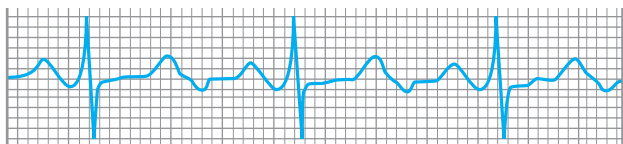
a) 0,81 b) 0,29 c) 1,65 d) 0,36 e) 1,23

**33.** (UFC-CE) Antenas para emissoras de rádio AM (Amplitude Modulada) são frequentemente construídas de modo que a torre emissora tenha uma altura igual a $\frac{1}{4}$ do comprimento de onda das ondas a serem emitidas. Com base nisso, determine a altura, em metros, da torre de uma emissora que emite na frequência de 1000 kHz.

Considere a velocidade da luz igual a $3,0 \cdot 10^8$ m/s.

**34.** (Unifesp-SP) O gráfico mostra a taxa de fotossíntese em função do comprimento de onda da luz incidente sobre uma determinada planta em ambiente terrestre.

Uma cultura dessa planta desenvolver-se-ia mais rapidamente se exposta à luz de frequência, em terahertz ($10^{12}$ Hz), próxima a:

a) 460.
b) 530.
c) 650.
d) 700.
e) 1380.

**35.** (Unifesp-SP) O eletrocardiograma é um dos exames mais comuns da prática cardiológica. Criado no início do século XX, é utilizado para analisar o funcionamento do coração em função das correntes elétricas que nele circulam. Uma pena ou caneta registra a atividade elétrica do coração, movimentando-se transversalmente ao movimento de uma fita de papel milimetrado, que se desloca em movimento uniforme com velocidade de 25 mm/s. A figura mostra parte de uma fita de um eletrocardiograma.

Sabendo-se que a cada pico maior está associada uma contração do coração, a frequência cardíaca dessa pessoa, em batimentos por minuto é:

a) 60. b) 75. c) 80. d) 95. e) 100.

**36.** (UFBA) A maioria dos morcegos possui ecolocalização — um sistema de orientação e localização que os humanos não possuem. Para detectar a presença de presas ou de obstáculos, eles emitem ondas ultrassônicas que, ao atingirem o obstáculo, retornam na forma de eco, percebido por eles. Assim sendo, ao detectarem a direção do eco e o tempo que demora em retornar, os morcegos conseguem localizar eventuais obstáculos ou presas.

Um dispositivo inspirado nessa estratégia é a trena sônica, a qual emite uma onda sonora que é refletida por um obstáculo situado a uma distância que se deseja medir.

Supondo que uma trena emite uma onda ultrassônica com frequência igual a 22,0 kHz e comprimento de onda igual a 1,5 cm, que essa onda é refletida em um obstáculo e que o seu eco é detectado 0,4 s após sua emissão, determine a distância do obstáculo, considerando que as propriedades do ar não mudam durante a propagação da onda e, portanto, a velocidade do som permanece constante.

**37.** (UFTM-MG) Conhecida pelo nome de seu idealizador, a sonda de *Behm* determinava com precisão a profundidade do leito oceânico. Consistia em um cartucho explosivo que era detonado na água, em um dos lados do casco do navio. O abalo produzido, propagando-se na água, atingia o leito do mar e refletia-se para a superfície onde, do outro lado da embarcação, um microfone protegido do som inicial pelo casco do navio recolhia o eco proveniente do fundo.

Um navio em águas oceânicas, após detonar uma sonda, registra o eco 1,2 s após a detonação. Sabendo-se que a velocidade de propagação do som na água do mar é $1,4 \cdot 10^3$ m/s, a profundidade local do leito é, aproximadamente, em m,

a) 260. b) 420. c) 840. d) 1 260. e) 1 680.

**38. E.R.** Em um lago, o vento produz ondas periódicas que se propagam a uma velocidade de 2 m/s. O comprimento de onda é de 10 m. Determine a frequência de oscilação de um barco:

a) quando ancorado nesse lago;
b) quando se movimenta em sentido contrário ao da propagação das ondas, a uma velocidade de 8 m/s.

**Resolução:**

a) Temos que $v = \lambda f$. Sendo $v = 2$ m/s e $\lambda = 10$ m, calculemos a frequência **f** com que o barco ancorado oscila:

$$2 = 10\,f \Rightarrow \boxed{f = 0{,}2 \text{ Hz}}$$

b)

A velocidade relativa entre o barco e as ondas tem módulo igual a 10 m/s. Assim, a velocidade v' das ondas em relação ao barco é igual a 10 m/s e o barco oscila com uma frequência f', tal que:

$$v' = \lambda\, f'$$

Sendo $v' = 10$ m/s e $\lambda = 10$ m, obtemos:

$$10 = 10\,f' \Rightarrow \boxed{f' = 1 \text{ Hz}}$$

**39.** (UFMS) Ao se bater na superfície de um lago, produz-se uma onda, que se propaga com velocidade de 0,4 m/s. A distância entre duas cristas consecutivas da onda é 8 cm. Com base nesses dados, é correto afirmar:

(01) A onda formada tem comprimento de onda igual a 8 cm.
(02) A amplitude da onda certamente vale 4 cm.
(04) A frequência da onda é 5 Hz.
(08) A onda, ao se propagar, transfere energia de um ponto a outro da superfície do lago.
(16) Supondo que sob o efeito da onda um ponto na superfície do lago oscile verticalmente, a onda é do tipo longitudinal.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmativas corretas.

**40.** Um banhista, parado em relação à Terra, conta em uma praia a passagem de 21 cristas de onda equiespaçadas pelo seu corpo. O intervalo de tempo decorrido no evento é de 80 s. Conhecendo a velocidade de propagação das ondas (1,0 m/s), determine o comprimento de onda das ondas do mar nesse local.

**41.** As ondas de um lago chegam de 10 s em 10 s a um ponto da margem. Uma boia desloca-se no sentido contrário ao da propagação das ondas a uma velocidade de 30 cm/s em relação à margem, levando 5,0 s para ir de uma depressão a outra, transpondo 8 cristas. Determine a distância entre duas cristas consecutivas.

**42.** No dia 12 de agosto de 2000, um sábado, uma tragédia abateu-se acima do Círculo Polar Ártico, no mar gelado de Barents, ao norte da Rússia. O submarino nuclear russo Kursk, em treinamento militar, afundou com 118 tripulantes a bordo, que tiveram suas vidas ceifadas sem oportunidade de socorro. O gigantesco Kursk, de 154 metros de comprimento, 18,2 metros de largura e 9 metros de altura, foi localizado com exatidão por embarcações de resgate equipadas com sonares. Esses aparelhos emitiram ultrassons com frequência próxima de 25 000 Hz que se propagaram na água com velocidade de cerca de 1 500 m/s, sendo refletidos pelo submarino e captados de volta.

Com base nos dados do enunciado e sabendo que o intervalo de tempo transcorrido entre a emissão dos ultrassons e a recepção do "eco" determinado pelo Kursk foi de 0,16 s, calcule:

a) a profundidade em que foi localizada a embarcação considerando-se que o barco e o submarino estão na mesma vertical.
b) o comprimento de onda dos ultrassons utilizados.

**43.** (Unicamp-SP) Ondas são fenômenos nos quais há transporte de energia sem que seja necessário o transporte de massa. Um exemplo particularmente extremo são os *tsunamis*, ondas que se formam no oceano, como consequência, por exemplo, de terremotos submarinos.

a) Se, na região de formação, o comprimento de onda de um *tsunami* é de 150 km e sua velocidade é de 200 m/s, qual é o período da onda?
b) A velocidade de propagação da onda é dada por $v = \sqrt{gh}$, em que **h** é a profundidade local do oceano e **g** é a aceleração da gravidade. Qual é a velocidade da onda numa região próxima à costa, onde a profundidade é de 6,4 m? (**Dado:** $g = 10$ m/s²)
c) Sendo **A** a amplitude (altura) da onda e supondo-se que a energia do *tsunami* se conserva, o produto $vA^2$ mantém-se constante durante a propagação. Se a amplitude da onda na região de formação for 1,0 m, qual será a amplitude perto da costa, onde a profundidade é de 6,4 m?

**44. E.R.** Uma corda homogênea de 2,5 m de comprimento e 2,0 kg de massa está submetida a uma força tensora de 80 N. Suas extremidades são fixadas e produz-se na corda uma perturbação. Determine:
a) a densidade linear da corda;
b) a velocidade de propagação da onda na corda.

**Resolução:**
a) A densidade linear de uma corda homogênea é dada pela relação:

$$\delta = \frac{m}{L}$$

Como m = 2,0 kg e L = 2,5 m, vem:

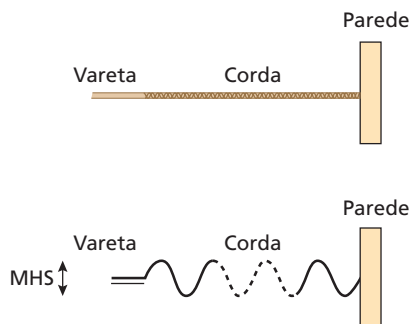
$$\delta = \frac{2,0 \text{ kg}}{2,5 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{\delta = 0,80 \text{ kg/m}}$$

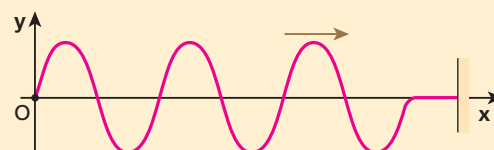
b) A velocidade de propagação da onda na corda tensa é determinada por:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\delta}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{80}{0,8}} \Rightarrow \boxed{v = 10 \text{ m/s}}$$

**45.** Uma corda homogênea de densidade linear igual a 0,50 kg/m está tracionada com uma força de intensidade **F**. Uma perturbação aplicada na corda produz uma onda que se propaga por ela com velocidade de 6,0 m/s. Qual a intensidade **F** da força?

**46.** Traciona-se uma corda homogênea de 4,0 m de comprimento com uma força de intensidade 50 N. Ondas produzidas nessa corda propagam-se com velocidade de 10 m/s. Qual é a massa da corda?

**47.** (Mack-SP) Uma pessoa sustenta uma vareta rígida por uma de suas extremidades, segundo a horizontal. Na outra extremidade, está presa uma corda homogênea, de secção transversal constante, de massa 1,00 kg e comprimento 5,00 m. Prendendo-se a outra extremidade da corda a um ponto fixo de uma parede, a pessoa proporciona à vareta um MHS na direção vertical, de duas oscilações completas por segundo, e aplica à corda uma força tensora de intensidade 1,80 N.

Sabendo-se que a velocidade de propagação de uma onda na corda é dada por $v = \sqrt{\frac{T}{A\mu}}$, onde **T** é a tensão na corda, **A** é a área da secção transversal e $\mu$, sua densidade. As ondas cossenoidais que se propagam na corda possuem comprimento de onda de:
a) 5,00 m.
b) 4,50 m.
c) 3,00 m.
d) 1,50 m.
e) 0,75 m.

**48. E.R.** O esquema a seguir representa uma corda tensa não absorvedora de energia, na qual se propaga um trem de ondas transversais, no sentido dos valores crescentes de **x**:

Em relação ao referencial xOy, a equação dessas ondas é dada por:

$$y = 0,5 \cos [2\pi (20t - 4x)] \quad \text{(SI)}$$

Determine:
a) a amplitude;
b) a frequência e o período;
c) o comprimento de onda;
d) a velocidade de propagação das ondas.

**Resolução:**
A determinação das grandezas associadas às ondas é feita pela comparação da equação dada com a equação geral das ondas:

$$y = A \cos \left[2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$y = 0,5 \cos [2\pi (20t - 4x)]$$

a) Amplitude (**A**): $\boxed{A = 0,5 \text{ m}}$

b) Frequência (**f**) e período (**T**): $\boxed{f = 20 \text{ Hz}}$

Como $f = \frac{1}{T}$, então:

$$20 = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{20} \text{ s} \Rightarrow \boxed{T = 0,05 \text{ s}}$$

c) Comprimento de onda ($\lambda$):

$$\frac{x}{\lambda} = 4x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0,25 \text{ m}}$$

d) Velocidade de propagação (**v**):

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \frac{1}{4} \cdot 20 \Rightarrow \boxed{v = 5 \text{ m/s}}$$

**49.** A equação de uma onda mecânica transversal é expressa por:

$$y = 0{,}2 \cos\left[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right)\right] \text{ (SI)}$$

Determine a amplitude e a velocidade de propagação dessa onda.

**50.** A função de uma onda é dada pela expressão:

$$y = 20 \cos 2\pi\left(4t - \frac{x}{3}\right)$$

em que **x** e **y** estão em centímetros e **t**, em segundos. Determine a amplitude, o período e a frequência dessa onda.

**51.** Um trem de ondas propaga-se em uma corda tensa não absorvedora de energia com velocidade igual a 10 m/s. Sabendo que a amplitude das ondas vale 0,5 m, a frequência é igual a 50 Hz e a fase inicial ($\varphi_0$) é nula, determine a equação dessas ondas.

# Bloco 3

## 10. Reflexão

Dos fenômenos que podem ocorrer com a luz no nosso dia a dia, o mais comum é a **reflexão**. Excluindo-se os corpos que emitem luz, todos os outros podem ser observados por causa da reflexão da luz em sua superfície.

Thinkstock/Getty Images

As ondas luminosas, provenientes do Sol, refletem nas paredes da construção, incidem na superfície do lago e voltam a se propagar no ar.

A respeito do fenômeno ondulatório **reflexão**, podemos dizer:

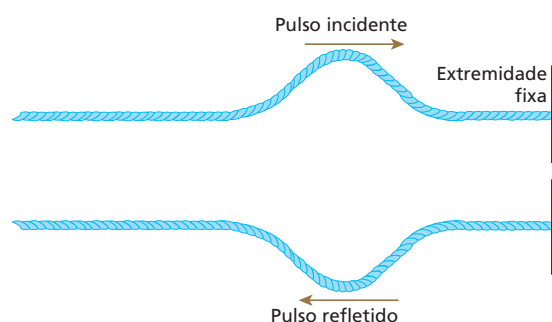
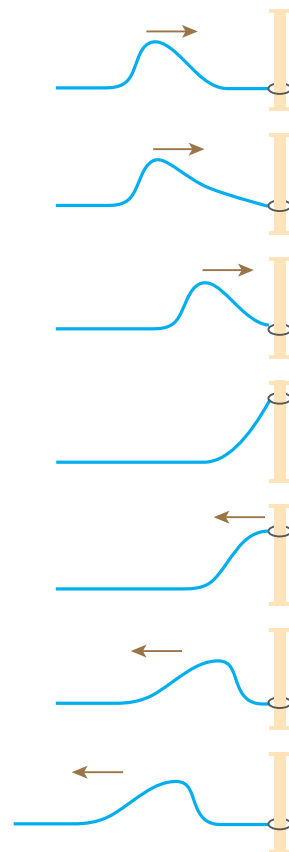
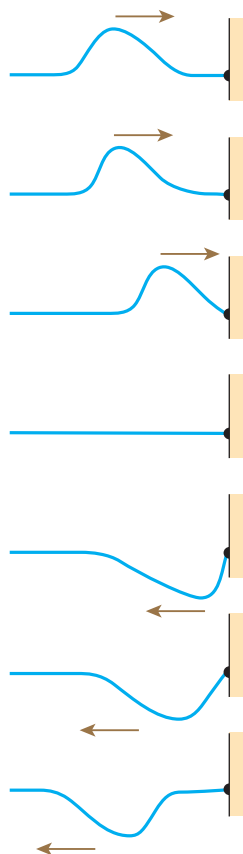
> Uma onda que se propaga em um meio sofre **reflexão** quando, após incidir num segundo meio de características diferentes, volta a se propagar no meio original.

Qualquer que seja o tipo de onda, o módulo de sua velocidade de propagação não se altera na reflexão, pois ela continua a propagar-se no mesmo meio em que estava. Como a frequência, característica da onda que se mantém sempre constante, o comprimento de onda também não varia na reflexão (lembre-se: $v = \lambda f$).

Vejamos dois casos particulares de reflexão: para ondas em cordas e para ondas em superfícies de líquidos. A reflexão de ondas luminosas (luz) será vista na parte de Óptica.

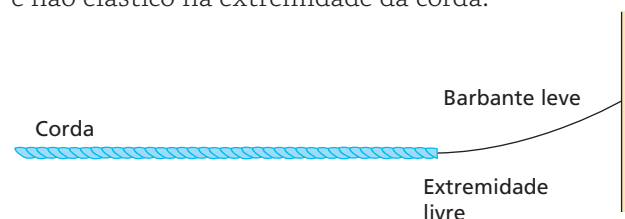
### Reflexão de ondas transversais em cordas

A análise da reflexão de pulsos ou de ondas transversais nas extremidades de cordas deve ser dividida em duas partes:

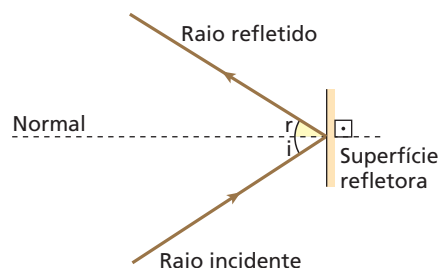
**1ª) Em extremidade fixa:**

O pulso gerado, à medida que passa pelos pontos da corda, faz cada um deles subir e descer. No entanto, quando esse pulso atinge uma extremidade fixa (uma parede, por exemplo) e tenta movê-la, esta, pela 3ª Lei de Newton (Princípio da Ação e Reação), reage sobre a corda, gerando um pulso refletido **invertido** em relação ao pulso incidente. Diz-se, então, que o pulso refletido está em **oposição de fase** em relação ao pulso incidente, pois, se o pulso incidente provoca um sobe e desce, o refletido provoca um desce e sobe. Para entender melhor esse fenômeno, observe a sequência a seguir.

## 2ª) Em extremidade livre:

A extremidade livre pode ser idealizada por um anel leve, que possa deslizar sem atrito ao longo de uma haste.

Quando o pulso atinge o anel, ele sobe e desce e o pulso é refletido **sem inversão**. Dizemos, então, que o pulso refletido está **em fase** com o pulso incidente, pois tanto um como o outro provocam um movimento de sobe e desce. Tal fato é facilmente aceitável, pois se alguém executasse no anel um movimento de sobe e desce seria gerado um pulso que se propagaria para a esquerda com as mesmas características do pulso refletido. Para entender melhor como ocorre esse fenômeno, observe a sequência a seguir.

A extremidade livre costuma ser obtida, na prática, amarrando-se um barbante muito leve, flexível e não elástico na extremidade da corda.

## Reflexão de ondas que se propagam na superfície de líquidos

As reflexões de ondas bidimensionais e tridimensionais podem ser representadas por seus raios de onda ou pelas próprias frentes de onda.

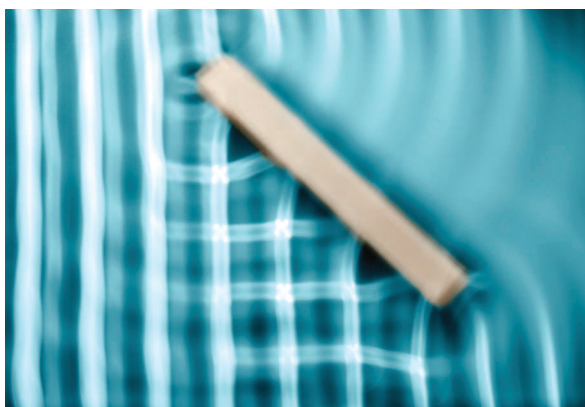
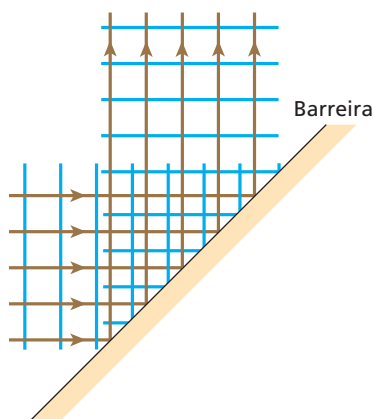
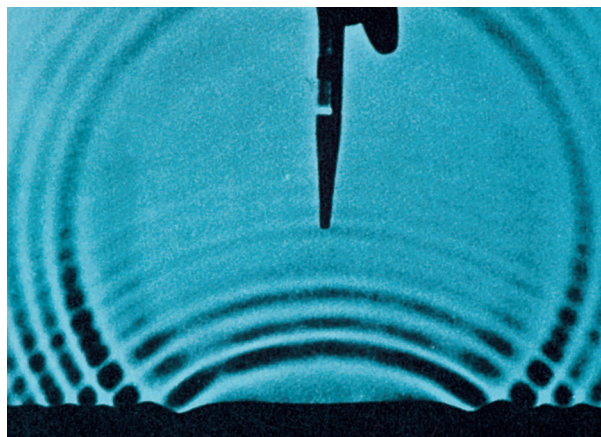
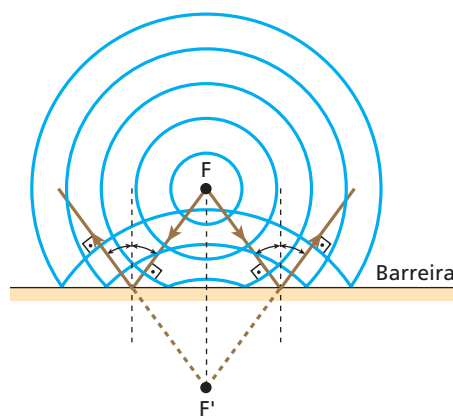
Usando raios de onda como representação, obtemos a figura a seguir, que é útil para a apresentação das duas leis que regem a reflexão de qualquer tipo de onda.

### 1ª Lei da Reflexão

O raio incidente, o raio refletido e a reta normal à superfície refletora no ponto de incidência estão contidos sempre em um mesmo plano (são coplanares).

### 2ª Lei da Reflexão

O ângulo formado pelo raio incidente e a normal (ângulo de incidência **i**) e o ângulo formado pelo raio refletido e a mesma normal (ângulo de reflexão **r**) são sempre de mesma medida:

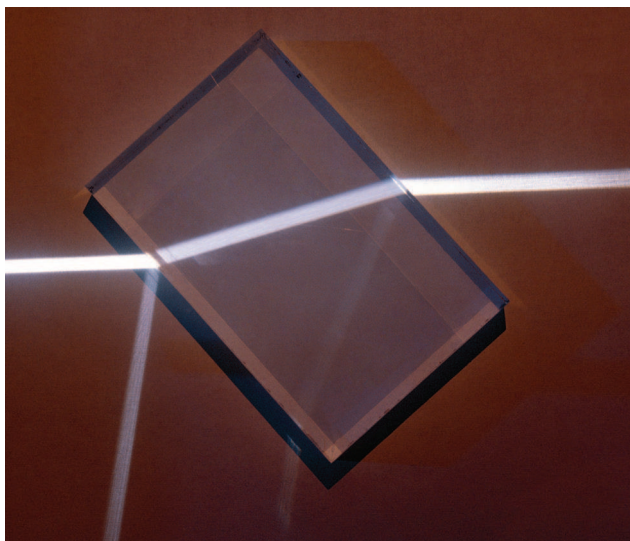
$$i = r$$

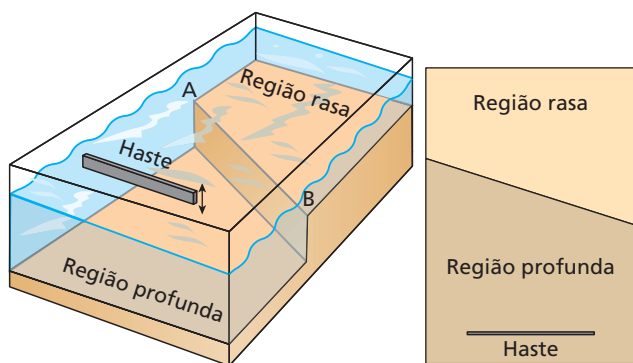
Observe as fotografias e as figuras a seguir. Elas representam a reflexão de ondas retas e ondas circulares que se propagam na superfície da água.

Fotografia de ondas retas que se propagam na superfície da água e refletem em uma barreira plana.

Representação esquemática da situação observada na fotografia.

Fotografia de ondas circulares propagando-se na superfície da água e refletindo em uma barreira plana.

Representação esquemática da situação observada na fotografia. É importante notar que os raios refletidos "partem" do ponto F', simétrico a **F** em relação à barreira plana. Perceba que as ondas refletidas continuam circulares.

## 11. Refração

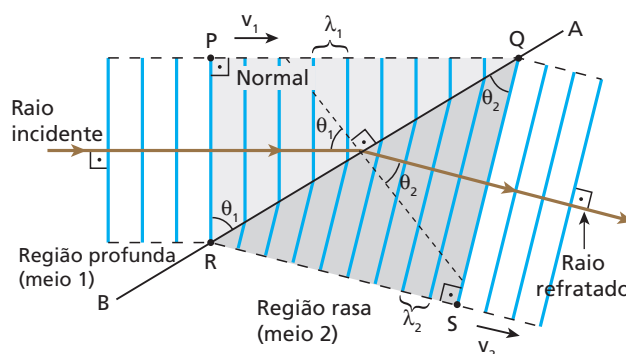
A respeito do fenômeno ondulatório denominado **refração**, podemos dizer que:

Chama-se **refração** de uma onda a passagem dessa onda de um meio para outro, de características diferentes.

Qualquer que seja o tipo de onda, sua frequência não se altera na refração. No entanto, devido à mudança de meio, a velocidade se modifica, o mesmo ocorrendo com o comprimento de onda. A onda refratada está sempre em fase com a onda incidente. Isso é válido para todos os tipos de ondas, o que será reforçado em Óptica, no estudo da refração da luz.

Na fotografia, vemos a passagem da luz através de uma lâmina de vidro. A luz sofre refração ao passar para o interior do vidro e ao sair do vidro para o ar. Observe também que parte da luz incidente reflete na primeira e na segunda face da lâmina.

Como modelo de refração, podemos usar ondas que se propagam na superfície de líquidos.

O recipiente mostrado na figura contém água e possui duas regiões, uma profunda e uma rasa. Uma haste bate periodicamente na superfície da água, gerando ondas retas que se propagam da região profunda para a região rasa, determinando uma refração.

É de verificação experimental que a velocidade de propagação de ondas na superfície de um líquido pode depender da profundidade do local. Observa-se que o módulo da velocidade diminui quando as ondas passam de regiões profundas para regiões rasas (aquelas cujas profundidades são menores que o comprimento de onda dessas ondas ou comparáveis a ele). Dessa forma, meios de diferentes profundidades podem ser considerados diferentes meios de propagação. Ondas que se propagam na superfície da água, por exemplo, sofrem refração quando passam de uma região profunda para uma rasa ou de uma região rasa para uma profunda.

Fotografia de refração de ondas retas que se propagam na superfície da água, passando de uma região de maior profundidade para uma de menor profundidade.

Representação esquemática da refração das ondas que se propagam na superfície da água mostrada na fotografia anterior. A mudança de direção ocorre porque os pontos de uma frente de onda não sofrem mudanças de velocidade simultaneamente.

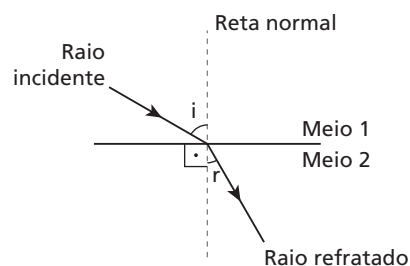
Na figura, temos:

$\theta_1$: ângulo formado pelo raio incidente e pela normal (ângulo de incidência) na região profunda. Observe que o ângulo formado pelas frentes incidentes e pela fronteira entre as duas regiões também vale $\theta_1$;

$\theta_2$: ângulo formado pelo raio refratado e pela normal (ângulo de refração) na região rasa. Também vale $\theta_2$ o ângulo formado pelas frentes refratadas e pela fronteira entre as duas regiões;

$v_1$ e $\lambda_1$: respectivamente velocidade de propagação e comprimento de onda na região profunda;

$v_2$ e $\lambda_2$: respectivamente velocidade de propagação e comprimento de onda na região rasa.

Simplificando a representação da refração, usando um raio de onda, temos:

Sendo:
i = ângulo de incidência
r = ângulo de refração

A refração de ondas obedece a duas leis, apresentadas a seguir.

**1ª Lei da Refração**

O raio incidente, a normal à fronteira no ponto de incidência e o raio refratado estão contidos no mesmo plano (são coplanares).

**2ª Lei da Refração**

Também denominada **Lei de Snell**, a 2ª Lei da Refração é expressa pela relação:

$$\frac{\text{sen}\ \theta_1}{\text{sen}\ \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

(As grandezas $\theta_1$, $\theta_2$, $v_1$, $v_2$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ estão indicadas na figura esquemática e simplificada da refração.)

O matemático holandês Willebrord Snell (1581-1626) descobriu experimentalmente a veracidade da relação existente entre os ângulos de incidência e de refração. Em sua homenagem, essa relação matemática recebeu a denominação de Lei de Snell.

### Demonstração da Lei de Snell

Na figura anterior, você observou que a distância PQ é percorrida com velocidade $v_1$ durante o mesmo intervalo de tempo $\Delta t$ em que a distância RS é percorrida com velocidade $v_2$ ($v_2 < v_1$).

No triângulo retângulo PQR, temos:

$$\text{sen}\ \theta_1 = \frac{PQ}{RQ} = \frac{v_1\ \Delta t}{RQ} \quad \text{(I)}$$

No triângulo retângulo RQS, temos:

$$\text{sen}\ \theta_2 = \frac{RS}{RQ} = \frac{v_2\ \Delta t}{RQ} \quad \text{(II)}$$

Dividindo membro a membro a expressão (I) pela expressão (II), vem:

$$\frac{\text{sen}\ \theta_1}{\text{sen}\ \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{(III)}$$

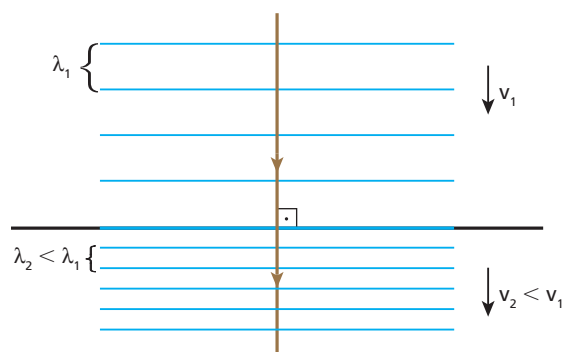
Lembrando que a frequência (**f**) é a mesma nos dois meios, temos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1\ f}{\lambda_2\ f} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{(IV)}$$

Reunindo os resultados (III) e (IV), chegamos à expressão da Lei de Snell, apresentada anteriormente:

$$\frac{\text{sen}\ \theta_1}{\text{sen}\ \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

**Nota:**

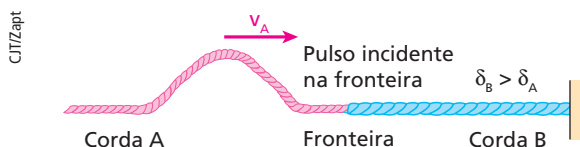
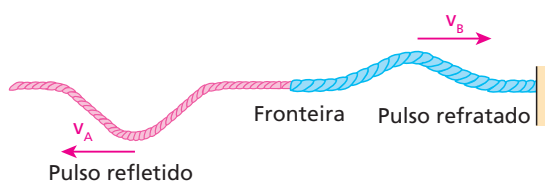
- A incidência de raios perpendiculares à fronteira que separa as duas regiões é um caso particular de refração em que não ocorre desvio na propagação da onda, já que, nesse caso, todos os pontos da frente de onda sofrem mudança de velocidade simultaneamente.

## 12. Refração e reflexão de ondas transversais em cordas

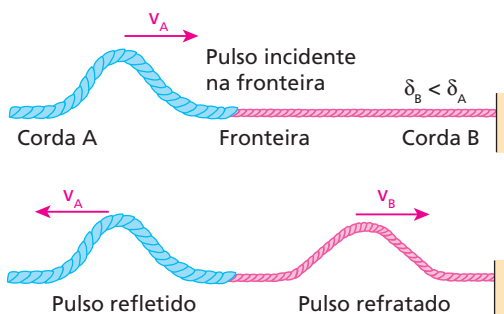
A refração e a reflexão de ondas transversais em cordas tensas podem ser facilmente visualizadas e também obedecem às regras básicas da refração e da reflexão.

Considere duas cordas de densidades lineares diferentes emendadas. Como primeira hipótese, suponha que a densidade linear da corda **B** seja maior que a da corda **A**.

Um pulso gerado na corda **A** propaga-se e incide na fronteira entre **A** e **B**. Nesse local, parte da energia do pulso incidente transmite-se (sofre refração), passando a propagar-se na corda **B**. Note que o pulso refratado está sempre em fase com o pulso incidente, isto é, ambos os pulsos estão "voltados para cima".



TF2-P2T2_198a255_5P.indd 224 17/08/12 18:25

Na mesma fronteira, ocorre reflexão de uma parcela da energia através do pulso refletido. Quando a reflexão ocorre com o pulso propagando-se da corda de menor para a de maior densidade linear, o pulso refletido apresenta-se em **oposição de fase** em relação ao incidente.

Os pulsos incidente e refletido têm velocidades de mesmo módulo $v_A$, enquanto o pulso que sofreu refração tem velocidade de módulo $v_B$. Lembrando que $v = \sqrt{\frac{F}{\delta}}$, concluímos que $v_B$ é menor que $v_A$, pois $\delta_B > \delta_A$ e a força tensora têm o mesmo valor nas duas cordas (pela 3ª Lei de Newton, a força com que **A** puxa **B** e a força com que **B** puxa **A** têm o mesmo módulo).

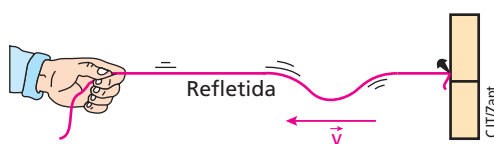
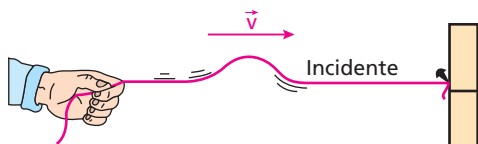
Como segunda hipótese, suponha que a corda **B** tenha menor densidade linear que a corda **A**. Assim, obtemos:

Como sempre, o pulso refratado está em fase com o pulso incidente e sua velocidade é, agora, maior que a do pulso incidente, pois $\delta_B < \delta_A$. Note que, nesse caso, o pulso refletido também está **em fase** com o pulso incidente.

## Até debaixo d'água?

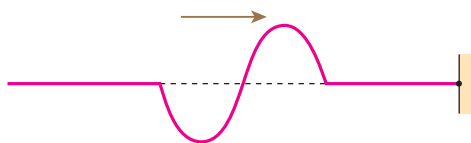
Essa interessante fotografia mostra um homem falando ao telefone celular... debaixo d'água! Tal situação é inviável, já que a água danificaria o aparelho. No entanto, fisicamente isso poderia ocorrer. As ondas eletromagnéticas recebidas e emitidas pelo celular passam do ar para o interior da água e da água para o ar através da **refração**. Nesse fenômeno a frequência das ondas não se altera. O que muda é sua velocidade de propagação e seu comprimento.

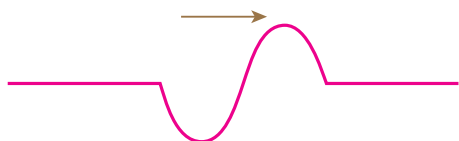
## Exercícios

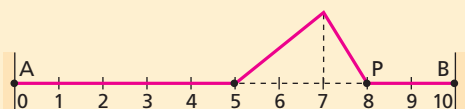
nível 1

**52.** Incidente — Refletida

Um pulso, em uma corda de extremidade fixa, ao refletir, sofre inversão de fase. Observe a figura acima. O fato de ocorrer inversão na fase do pulso está ligado à/ao:

a) 1ª Lei de Newton.
b) Princípio da Conservação da Energia.
c) 3ª Lei de Newton.
d) Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento.
e) Lei de Coulomb.

**53.** Uma corda horizontal tem uma de suas extremidades fixa a uma parede. Na extremidade livre, produz-se um pulso, que se propaga ao longo da corda:

Qual o aspecto da corda logo após a reflexão do pulso na extremidade fixa?

**54.** Uma corda horizontal tem suas duas extremidades livres. Numa delas, produz-se um pulso, que se propaga ao longo da corda:

Qual o aspecto da corda logo após a reflexão do pulso na outra extremidade?

**55. E.R.** Uma corda AB, de comprimento L = 10 m, tem ambas as extremidades fixas. No instante t = 0, o pulso triangular esquematizado a seguir inicia-se em **A**, atingindo o ponto **P** no instante t = 4 s. Sendo AP = 8 m, determine a velocidade de propagação do pulso e o perfil da corda no instante t = 7 s.

**Resolução:**

A velocidade de propagação de um pulso que se propaga num meio homogêneo pode ser calculada pela relação:

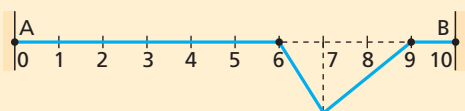
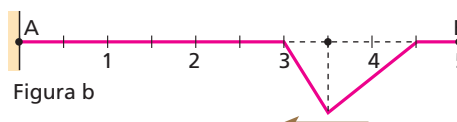
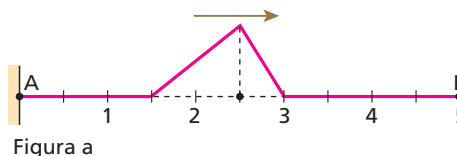
$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

em que **d** é a distância percorrida.
Como, no caso, d = 8 m e $\Delta t$ = 4 s, temos:

$$v = \frac{8\ m}{4\ s} \Rightarrow \boxed{v = 2\ m/s}$$

Assim, até o instante t = 7 s, o pulso terá percorrido:

$$d = v\,\Delta t \Rightarrow d = 2 \cdot 7 \Rightarrow d = 14\ m$$

Como a corda tem apenas 10 m, conclui-se que o pulso refletiu em **B**, com inversão de fase (já que essa extremidade está fixa), e percorreu mais 4 m de volta, propagando-se de **B** para **A**. Portanto, o perfil da corda no instante t = 7 s é:

**56.** Um pulso triangular é produzido na extremidade **A** de uma corda AB, de comprimento L = 5,0 m, cuja outra extremidade **B** é livre. Inicialmente, o pulso se propaga de **A** para **B** com velocidade constante **v**. A figura **a** representa o perfil da corda no instante **t** segundos e a figura **b**, o perfil da corda no instante (t + 7) segundos.

Determine a velocidade (**v**) de propagação da onda, admitindo que a configuração de **b** esteja ocorrendo pela primeira vez após o instante **t**.

**57.** (Enem) Uma equipe de cientistas lançará uma expedição ao Titanic para criar um detalhado mapa 3D que "vai tirar, virtualmente, o Titanic do fundo do mar para o público".
A expedição ao local, a 4 quilômetros de profundidade no Oceano Atlântico, está sendo apresentada como a mais sofisticada expedição científica ao Titanic. Ela utilizará tecnologias de imagem e sonar que nunca tinham sido aplicadas ao navio, para obter o mais completo inventário de seu conteúdo. Esta complementação é necessária em razão das condições do navio, naufragado há um século.
*O Estado de S. Paulo*. Disponível em: <www.estadao.com.br>.
Acesso em: 27 jul. 2010 (adaptado).

No problema apresentado para gerar imagens através de camadas de sedimentos depositados no navio, o sonar é mais adequado, pois a

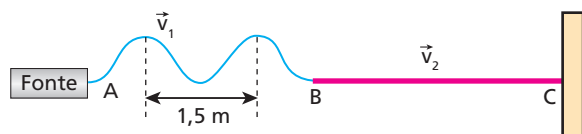
a) propagação da luz na água ocorre a uma velocidade maior que a do som neste meio.
b) absorção da luz ao longo de uma camada de água é facilitada enquanto a absorção do som não.
c) refração da luz a uma grande profundidade acontece com uma intensidade menor que a do som.
d) atenuação da luz nos materiais analisados é distinta da atenuação de som nestes mesmos materiais.
e) reflexão da luz nas camadas de sedimentos é menos intensa do que a reflexão do som neste material.

**58.** Analise as proposições:

I. A refração ocorre quando uma onda atravessa a superfície de separação de dois meios, passando a se propagar no segundo meio.
II. Na refração, a frequência da onda não se altera.
III. Na refração, a velocidade de propagação da onda pode ou não variar.
IV. Na refração, a direção de propagação da onda pode mudar ou não.
V. Na refração, ocorre inversão de fase na onda.

Podemos afirmar que:

a) todas as afirmativas são verdadeiras.
b) todas as afirmativas são falsas.
c) apenas I, II e IV são verdadeiras.
d) apenas I e V são verdadeiras.
e) apenas IV e V são verdadeiras.

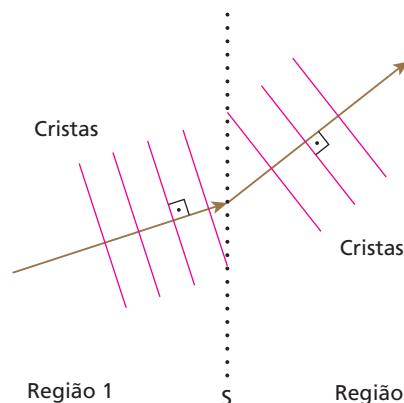
**59.** A figura representa uma onda transversal periódica que se propaga nas cordas AB e BC com as velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, de módulos respectivamente iguais a 12 m/s e 8,0 m/s.

Nessas condições, o comprimento de onda na corda BC, em metros, é:

a) 1,0.
b) 1,5.
c) 2,0.
d) 3,0.
e) 4,0.

**60.** Um gerador de ondas eletromagnéticas emite de um helicóptero ondas com uma frequência definida **f**. Considerando que o helicóptero está a uma altura tal que não provoca alterações na água contida em uma piscina, e que no ar essas ondas de comprimento de onda $\lambda$ viajam com a velocidade da luz no vácuo, é correto afirmar que as ondas que penetrarem na água contida na piscina sofrerão alterações em:

a) sua velocidade **v**, em sua frequência **f** e em seu comprimento de onda $\lambda$.
b) seu comprimento de onda $\lambda$ e em sua frequência **f**.
c) sua velocidade **v** e em sua frequência **f**.
d) sua velocidade **v** e em seu comprimento de onda $\lambda$.
e) somente no comprimento de onda $\lambda$.

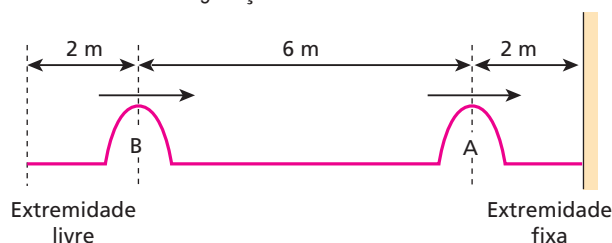
**61.** Uma onda mecânica com 800 Hz de frequência propaga-se em um meio com comprimento de onda igual a 2,0 m. Ao sofrer refração, essa onda tem sua velocidade reduzida a 50% de seu valor inicial. Qual será o seu novo comprimento de onda?

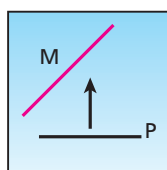
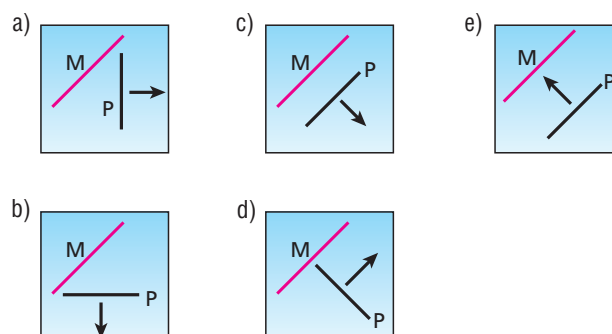
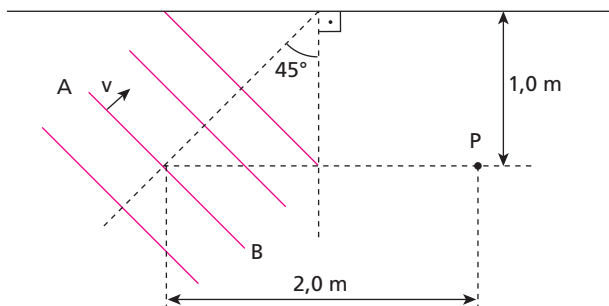
**62.** (UFBA) A figura a seguir mostra, esquematicamente, as frentes de ondas planas, geradas em uma cuba de ondas, em que duas regiões, nas quais a água tem profundidades diferentes, são separadas pela superfície imaginária **S**. As ondas são geradas na região **1**, com frequência de 4 Hz, e se deslocam em direção à região **2**.

Os valores medidos, no experimento, para as distâncias entre duas cristas consecutivas nas regiões **1** e **2** valem, respectivamente, 1,25 cm e 2,00 cm.

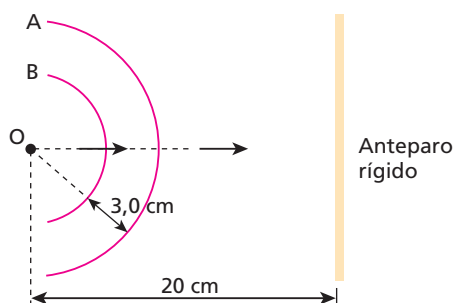
Com base nessas informações e na análise da figura, pode-se afirmar:

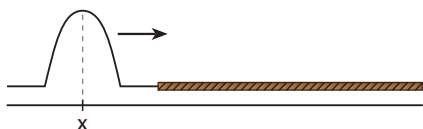
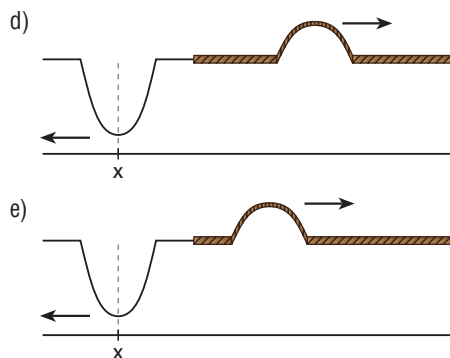
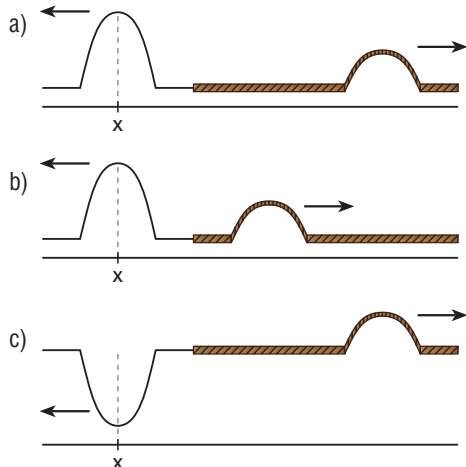
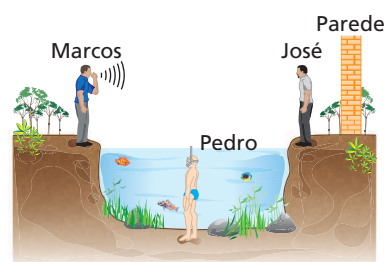
(01) O experimento ilustra o fenômeno da difração de ondas.
(02) A frequência da onda na região **2** vale 4 Hz.
(04) Os comprimentos de onda, nas regiões **1** e **2**, valem, respectivamente, 2,30 cm e 4,00 cm.
(08) A velocidade da onda, na região **2**, é maior que na região **1**.
(16) Seria correto esperar-se que o comprimento de onda fosse menor nas duas regiões, caso a onda gerada tivesse frequência maior que 4 Hz.

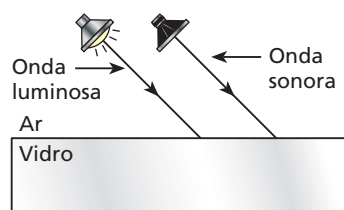
## Exercícios nível 2

**63.** Numa corda homogênea de 10 m de comprimento, propagam-se dois pulsos com velocidades iguais a 1 m/s. No instante t = 0, a configuração da corda é representada pela figura abaixo. Qual será a configuração dessa corda no instante t = 14 s?

**64.** Um pulso reto propaga-se na superfície da água em direção a um obstáculo **M** rígido, onde se reflete.

O pulso e o obstáculo estão representados na figura a seguir. A seta indica o sentido de propagação do pulso.

Entre as figuras abaixo, a que melhor representa o pulso **P**, após sua reflexão em **M**, é:

a)
c)
e)
b)
d)
**65.** (Fuvest-SP) Ondas retas propagam-se na superfície da água com velocidade de módulo igual a 1,4 m/s e são refletidas por uma parede plana vertical, na qual incidem sob o ângulo de 45°. No instante $t_0 = 0$, uma crista AB ocupa a posição indicada na figura.

a) Depois de quanto tempo essa crista atingirá o ponto **P** após ser refletida na parede?
b) Esboce a configuração dessa crista quando passa por **P**.

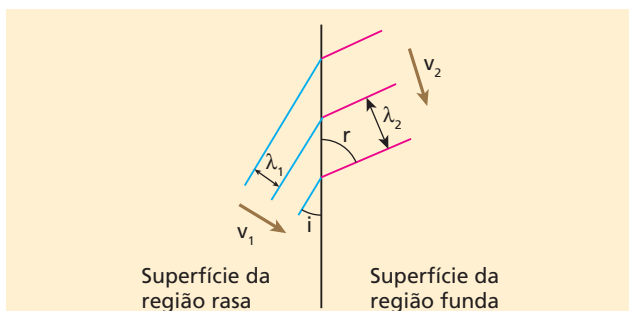
**66.** Dois pulsos circulares **A** e **B** são produzidos no ponto **O** da superfície tranquila da água de uma cuba de ondas. Os pulsos incidem em um anteparo plano colocado dentro da cuba, sofrendo reflexão:

Sabendo que os pulsos se propagam na água com velocidade de 43 cm/s e que **A** foi produzido no instante t = 0, determine a configuração do sistema no instante t = 1,0 s.

**67.** (UFRS) Uma corda é composta de dois segmentos de densidades lineares de massa bem distintas. Um pulso é criado no segmento de menor densidade e se propaga em direção à junção entre os segmentos, conforme representa a figura abaixo.

Assinale, entre as alternativas, aquela que melhor representa a corda quando o pulso refletido está passando pelo mesmo ponto **x** indicado no diagrama acima.

**68.** (UFTM-MG) Marcos está parado na borda de um lago de águas calmas em uma manhã sem ventos, gritando para que seu amigo José, do outro lado do lago, possa ouvi-lo. Dentro do lago outro garoto, Pedro, também parado, ouve os gritos de Marcos.

As velocidades do som no ar e na água, nesse local, valem respectivamente 350 m/s e 1 505 m/s.
a) Determine a razão entre os comprimentos das ondas sonoras emitidas por Marcos e ouvidas diretamente por Pedro e por José, $\frac{\lambda_P}{\lambda_J}$.
b) Considere que na região existe uma parede vertical que permite que Marcos ouça o eco de seu grito 0,4 s depois de tê-lo emitido. Determine a distância entre Marcos e a parede, em metros.

**69.**

a) Uma onda sonora e uma onda luminosa monocromática, após se propagarem no ar, sofrem refração ao passarem do ar para o vidro. Esquematize as trajetórias no vidro, justificando.
b) Se a onda sonora tiver frequência de 1,0 kHz, qual será seu comprimento de onda no vidro? Ela continuará, nesse meio, a ser uma onda sonora? Justifique.

**Dados:** velocidade do som no ar = 340 m/s
velocidade do som no vidro = 5 000 m/s

**70. E.R.** A figura mostra uma cuba com ondas onde há uma região rasa e outra funda. Com uma régua, são provocadas perturbações periódicas retas a cada 0,4 s que se propagam na superfície da água:

Região rasa
Região funda

Sabendo que $\lambda_1$ (comprimento de onda na região rasa) é igual a 2 cm, **i** (ângulo de incidência) é igual a 30° e $v_2$ (velocidade da onda na região funda) é igual a $5\sqrt{2}$ cm/s, determine:

a) a velocidade ($v_1$) da onda, na região rasa;
b) o comprimento de onda ($\lambda_2$), na região funda;
c) o ângulo de refração (**r**).

## Resolução:

a) A velocidade ($v_1$) da onda, na região rasa, pode ser calculada pela **relação fundamental das ondas**:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

Sendo $\lambda_1$ = 2 cm e T = 0,4 s, temos:

$$v_1 = \frac{2}{0,4} \Rightarrow \boxed{v_1 = 5 \text{ cm/s}}$$

b) Para o cálculo do comprimento de onda ($\lambda_2$), na região funda, usamos a mesma relação do item anterior:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v\,T$$

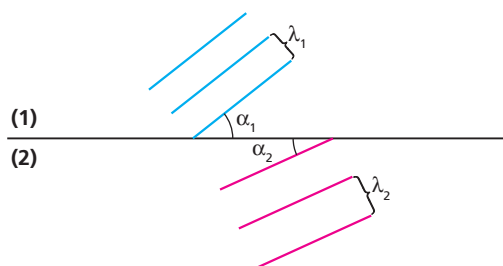
Sendo $v_2 = 5\sqrt{2}$ cm/s e T = 0,4 s, já que o período não muda na refração, temos:

$$\lambda_2 = 5\sqrt{2} \cdot 0,4 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 2\sqrt{2} \text{ cm}}$$

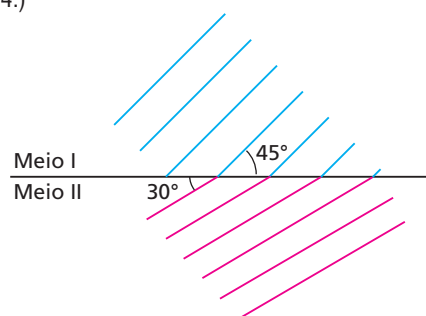
c) Pela Lei de Snell, podemos calcular o ângulo de refração (**r**):

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\text{sen } 30°}{\text{sen } r} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

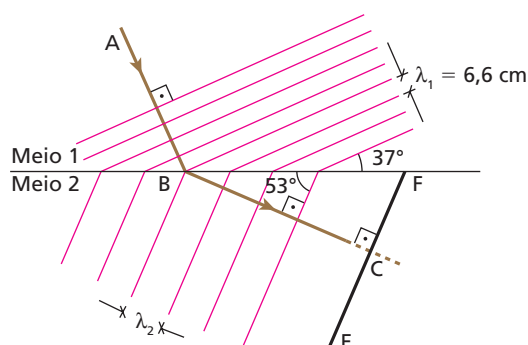
$$\text{sen } r = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow \text{sen } r = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{r = 45°}$$

**71.** A figura a seguir representa um trem de ondas retas que passa de um meio **1** para um meio **2**. A separação entre os traços indica o comprimento de onda **λ**:

Aponte a alternativa correta.

a) A figura não está correta, porque, se $\lambda_2 > \lambda_1$, deveríamos ter $\alpha_1 < \alpha_2$.
b) A figura está correta, e a velocidade de propagação da onda em **2** é maior que em **1**.
c) A figura representa corretamente uma onda passando de um meio para outro mais refringente que o primeiro.
d) A figura não está correta, porque o comprimento de onda não varia quando uma onda passa de um meio para o outro.
e) Todas as afirmações anteriores estão erradas.

**72.** (Cesgranrio-RJ) Um vibrador produz ondas planas na superfície de um líquido com frequência f = 10 Hz e comprimento de onda λ = 28 cm. Ao passarem do meio I para o meio II, como mostra a figura, foi verificada uma mudança na direção de propagação das ondas. (**Dados**: sen 30° = cos 60° = 0,5; sen 60° = = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; sen 45° = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Considere $\sqrt{2}$ = 1,4.)

No meio II, os valores da frequência e do comprimento de onda serão, respectivamente, iguais a:

a) 10 Hz; 14 cm.
b) 10 Hz; 20 cm.
c) 10 Hz; 25 cm.
d) 15 Hz; 14 cm.
e) 15 Hz; 25 cm.

**73.** O esquema a seguir representa a refração de uma onda sonora plana que passa de um meio **1** (ar) para um meio **2** (gás em alta temperatura e alta pressão). Estão indicados o raio incidente AB, o raio refratado BC e algumas frentes de onda. Uma barreira EF está posicionada no meio **2**, perpendicularmente ao raio BC, com o objetivo de refletir o som.

A distância entre os pontos **B** e **F** é igual a 55 cm e adota-se para a intensidade da velocidade do som no meio **1** o valor 330 m/s.

**Dados:** sen 37° = cos 53° = 0,60;
sen 53° = cos 37° = 0,80.

Determine:

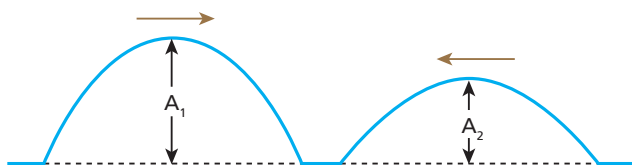
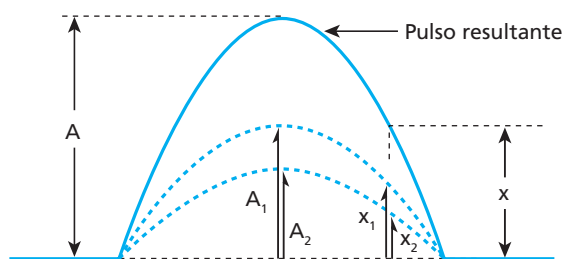
a) as frequências $f_1$ e $f_2$ da onda sonora, respectivamente, nos meios **1** e **2**;
b) o comprimento de onda $\lambda_2$ da onda sonora no meio **2**;
c) o intervalo de tempo Δt transcorrido entre a passagem da onda pelo ponto **B** e seu retorno a esse mesmo ponto depois de sofrer reflexão na barreira.

## Bloco 4

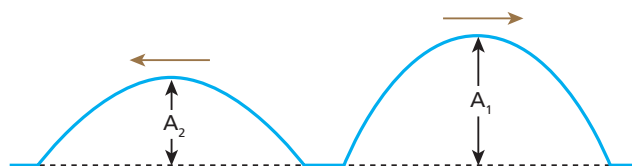
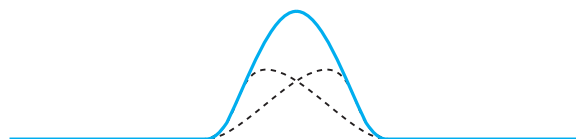
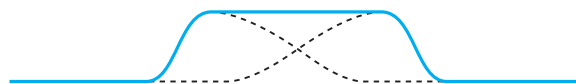
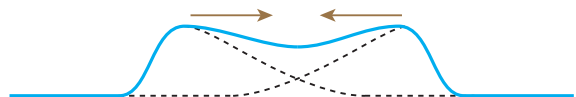
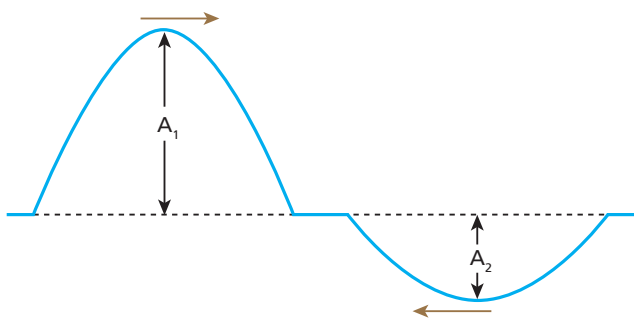
### 13. Superposição de pulsos em cordas

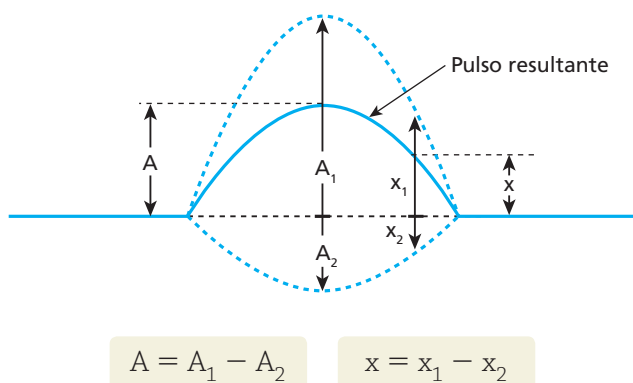
A superposição de duas ou mais ondas de mesma natureza provoca no local da superposição uma perturbação resultante igual à "soma algébrica" das perturbações individuais de cada onda.

Em uma corda tensa fica mais fácil visualizar esse fenômeno. Assim, considere uma corda esticada, disposta horizontalmente. Nas suas extremidades vamos produzir dois pulsos de mesma largura e amplitudes diferentes: $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$. O resultado da superposição depende da forma como esses pulsos foram originados. Devemos, então, considerar duas situações:

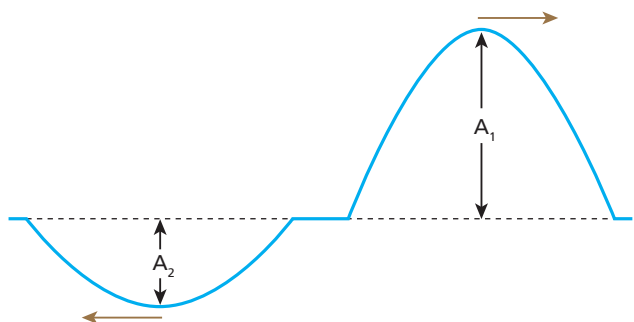
**1ª situação: pulsos em fase**

No instante da superposição dos pulsos **em fase**, observamos que cada ponto da corda na região de superposição apresenta uma elongação **x** igual à soma das elongações $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ que cada pulso produziria nesse ponto se lá chegasse sozinho. É evidente que a crista resultante tem uma amplitude igual à soma das amplitudes individuais dos pulsos.

$A = A_1 + A_2$ $\quad$ $x = x_1 + x_2$

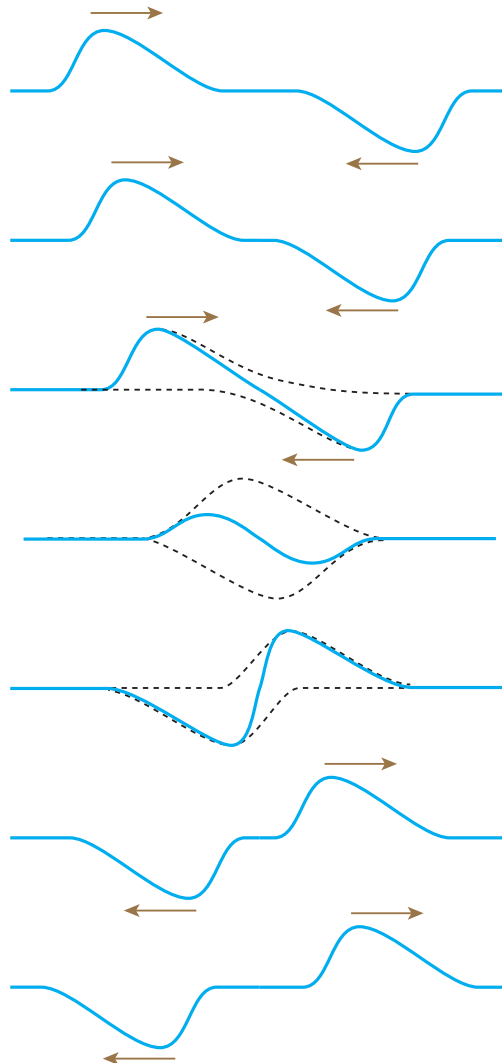
A esse tipo de superposição de pulsos (em fase) dá-se o nome de **interferência construtiva**.

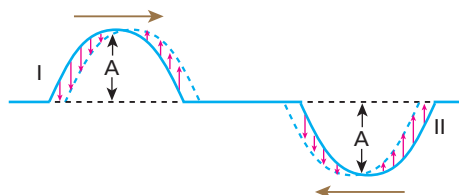
É importante observar que após a superposição os pulsos continuam suas propagações normalmente, como se nada tivesse acontecido. Esse fato justifica-se pelo **Princípio da Independência da Propagação Ondulatória**. Assim, após a superposição, a configuração da corda passa a ser:

Observe a sequência a seguir:

**$2^a$ situação: pulsos em oposição de fase**

No instante da superposição dos pulsos **em oposição de fase**, observamos que cada ponto da corda na região de superposição apresenta uma elongação **x**, igual à diferença das elongações $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ que cada pulso produziria nesse ponto se lá chegasse sozinho. É evidente que a crista resultante tem uma amplitude igual à diferença das amplitudes individuais desses pulsos.

$$A = A_1 - A_2 \qquad x = x_1 - x_2$$

A esse tipo de superposição de pulsos (em oposição de fase) dá-se o nome de **interferência destrutiva**.

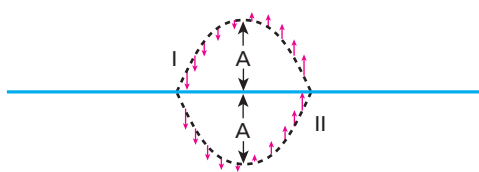
Também nesse caso, após a superposição, os pulsos continuam suas propagações normalmente, como se nada tivesse acontecido. Vale o **Princípio da Independência da Propagação Ondulatória**.

Assim, após a superposição, temos:

O fenômeno da interferência não é privilégio de ondas em cordas, podendo ocorrer também com ondas sonoras, com ondas em superfícies líquidas, com ondas luminosas etc.

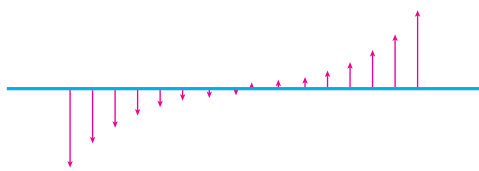
Observe a sequência a seguir:

## Caso particular

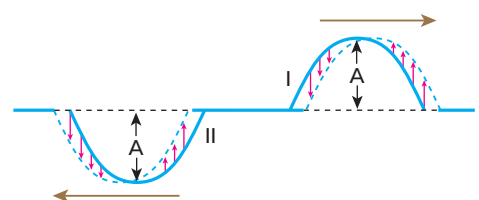
Devemos fazer um estudo do caso particular em que os dois pulsos que se propagam na corda, em oposição de fase, possuem amplitudes iguais ($A_1 = A_2 = A$).

Dois pulsos de mesma amplitude propagando-se numa corda. As setas verticais indicam as velocidades de vibração dos pontos da corda no instante considerado.

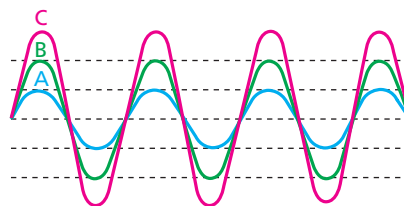
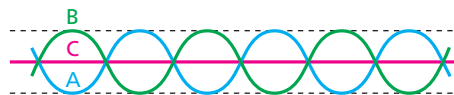
Em cada região por onde os pulsos passam, sempre há energia cinética e energia potencial elástica.

No instante em que se superpõem, os pulsos desaparecem momentaneamente, o mesmo ocorrendo com a deformação da corda e com a energia potencial elástica. Em compensação, a energia cinética dos pedaços de corda da região se intensifica, o que é evidente, pois os pulsos tendem a provocar deslocamentos transversais no mesmo sentido. Além disso, a energia potencial elástica também se converte em energia cinética.

**Interferência destrutiva:** as amplitudes se subtraem. No caso, a amplitude do pulso resultante é nula.

No momento da superposição total, a deformação da corda desaparece, mas seus pontos na região estão em movimento.

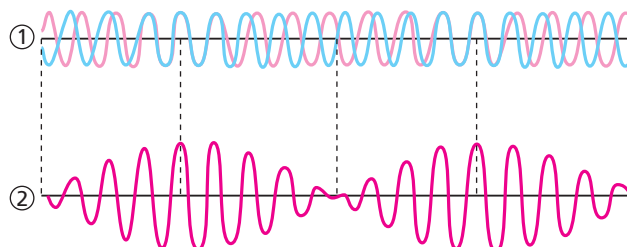
É esse movimento que possibilita o reaparecimento dos pulsos logo em seguida, quando a energia potencial que se converteu em cinética volta a ser potencial.

Região de superposição dos pulsos (ampliada).

De acordo com o Princípio da Independência da Propagação Ondulatória, após a superposição as ondas continuam com suas características iniciais.

## 14. Superposição de ondas periódicas

A onda resultante da superposição de duas ondas periódicas é obtida pelos mesmos conceitos usados para os pulsos do item anterior.

Este é um exemplo de interferência construtiva. As ondas **A** e **B**, de mesma frequência e em concordância de fase, superpõem-se, resultando a onda **C**.

Este é um exemplo de interferência destrutiva. As ondas **A** e **B**, de mesma frequência, mesma amplitude e em oposição de fase, superpõem-se, resultando a onda **C**, de amplitude nula.

Essa superposição de ondas periódicas pode apresentar dois efeitos de particular interesse: o **batimento** e as **ondas estacionárias**.

### Batimento

O fenômeno ondulatório denominado **batimento** é obtido pela superposição de ondas periódicas de frequências ligeiramente diferentes e de mesma amplitude (ou amplitudes próximas).

O número 1 mostra a superposição de duas ondas de frequências ligeiramente diferentes e amplitudes iguais. O número 2, a onda resultante dessa superposição.

Note que a onda resultante da figura tem amplitude variável periodicamente, apresentando pontos de máxima intensidade (interferência construtiva) e pontos de mínima intensidade (interferência destrutiva).

Esse fenômeno ocorre particularmente com ondas sonoras. O observador, estando em um determinado local, receberá as duas ondas sonoras de frequências próximas e ouvirá a onda resultante com amplitude variável. As ondas parciais entram em fase e saem de fase, caracterizando uma interferência temporal, alternando interferências construtivas e destrutivas ao longo do tempo. A passagem pelo máximo de intensidade da onda resultante ocorre periodicamente, assemelhando-se a batidas, daí o nome de **batimento**.

É possível demonstrar que a frequência da onda resultante é dada pela média aritmética entre as frequências das ondas que se superpõem:

$$f_{RES} = \frac{f_I + f_{II}}{2}$$

Pode-se demonstrar também que a frequência de ocorrência dos batimentos é dada pela diferença entre as frequências das ondas que se superpõem:

$$f_{BAT} = f_{II} - f_I \qquad (f_{II} > f_I)$$

A frequência de batimentos ($f_{bat}$) é a frequência de máximos ou de mínimos atingidos pela onda resultante.

Considerando as fases das ondas I e II, temos:

$$\varphi_I = \omega_I t + \varphi_{0_I}$$

$$\varphi_{II} = \omega_{II} t + \varphi_{0_{II}}$$

e a defasagem entre elas é dada por:

$$\Delta\varphi = \varphi_{II} - \varphi_I = (\omega_{II} - \omega_I)t + (\varphi_{0_{II}} - \varphi_{0_I})$$

Cada máximo de intensidade ocorre quando as ondas se superpõem em concordância de fase, isto é, quando ocorre uma interferência construtiva entre elas. Nesse instante (**t**), a defasagem entre as ondas deve ser um múltiplo inteiro de $2\pi$, ou seja, $\Delta\varphi = 2n\pi$, onde n = 0, 1, 2, 3, ...

No instante **t**, temos:

$$\Delta\varphi = 2n\pi = (\omega_{II} - \omega_I)t + (\varphi_{0_{II}} - \varphi_{0_I}) \quad (1)$$

O próximo batimento ocorrerá depois de um tempo $T_{bat}$, período dos batimentos.

$$\Delta\varphi = 2(n + 1)\pi =$$
$$= (\omega_{II} - \omega_I)(t + T_{bat}) + (\varphi_{0_{II}} - \varphi_{0_I}) \quad (2)$$

Subtraindo a expressão (1) de (2), temos:

$$2\pi = (\omega_{II} - \omega_I)\, T_{bat}$$

$$T_{bat} = \frac{2\pi}{(\omega_{II} - \omega_I)}$$

Sendo:

$$f_{bat} = \frac{1}{T_{bat}}$$

vem:

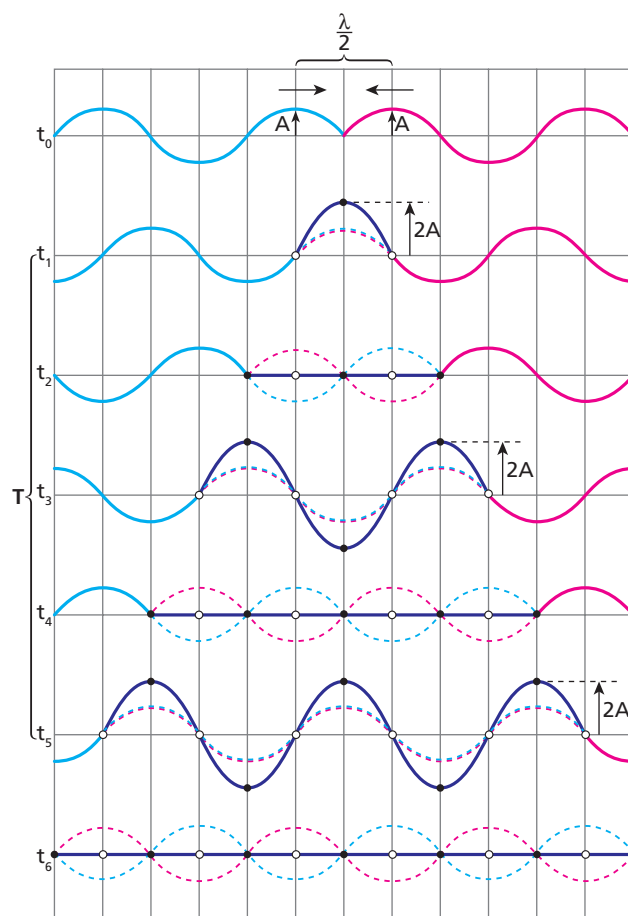
$$f_{bat} = \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2\pi} = \frac{2\pi f_{II} - 2\pi f_I}{2\pi}$$

$$f_{bat} = f_{II} - f_I$$

## Ondas estacionárias

O fenômeno ondulatório denominado **ondas estacionárias** é a configuração resultante da superposição de duas ondas idênticas que se propagam na mesma direção e em sentidos opostos.

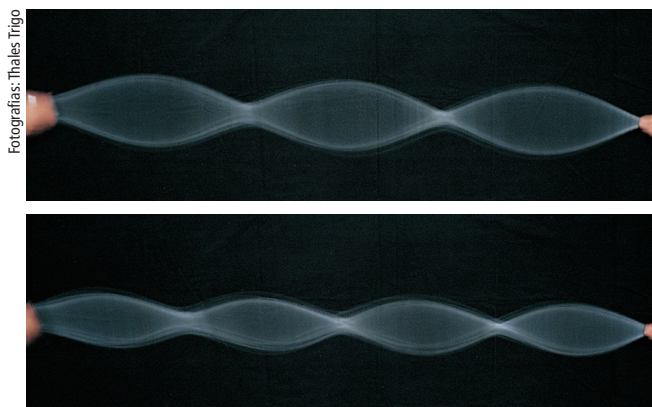
Esse fenômeno é mais facilmente observado com ondas em cordas, apesar de poder ocorrer também com outros tipos de onda.

Para melhor entendimento, vamos considerar uma corda esticada e duas ondas idênticas propagando-se em sentidos opostos.

Podemos observar na figura que os pontos da corda representados por pequenos círculos brancos são pontos que não vibram, ocorrendo neles permanente interferência destrutiva. Esses pontos são denominados **nós** ou **nodos** de deslocamento.

Note, ainda, os pontos da corda representados por pequenos círculos pretos, que vibram com amplitude igual a 2A. Nesses pontos, ocorre permanente interferência construtiva, sendo, por isso, denominados **ventres**, **antinós** ou **antinodos** de deslocamento.

Como esses nós e ventres não se propagam, permanecendo sempre nos mesmos locais da corda, a configuração resultante recebe a denominação de **onda estacionária**.

É importante observar que a distância entre dois nós consecutivos ou dois ventres consecutivos é sempre $\frac{\lambda}{2}$, em que $\boldsymbol{\lambda}$ é o comprimento de onda de cada uma das ondas que se superpõem. Além disso, o período (**T**) das vibrações da onda estacionária é igual ao período das ondas componentes (ver figura anterior).

Fotografias: Thales Trigo

Corda vibrando de maneira estacionária. As diferentes configurações ocorrem porque as frequências das ondas são diferentes em cada situação. Quanto maior é a frequência de vibração, mais ventres são formados na corda.

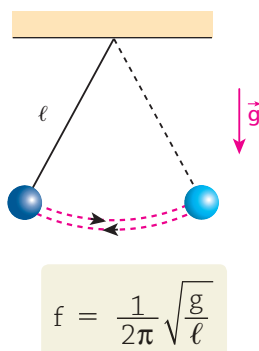
## 15. Ressonância

Todo sistema físico capaz de vibrar, se for excitado, vibrará numa frequência que lhe é característica, que lhe é natural.

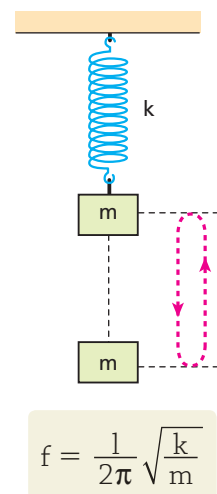
Alguns sistemas admitem uma única frequência natural de vibração e outros, mais de uma. Vejamos alguns exemplos:

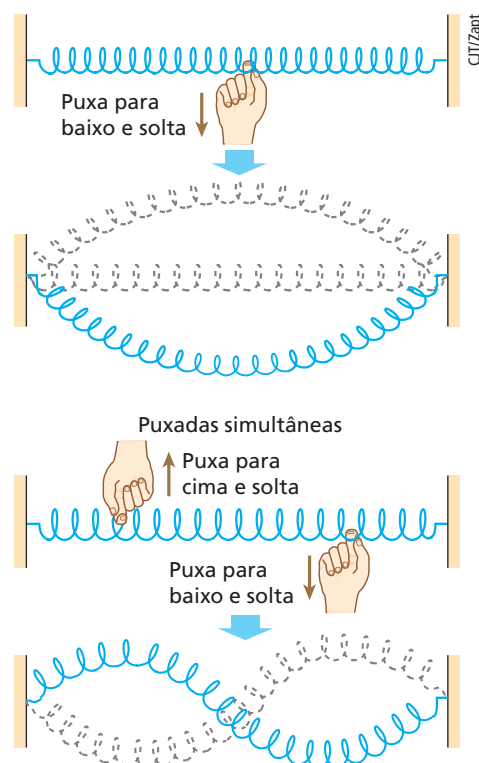
**Exemplo 1:**

Quando um pêndulo simples é excitado, ou seja, afastado de sua posição de equilíbrio, e, em seguida, abandonado, ele oscila numa única frequência natural, dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

**Exemplo 2:**

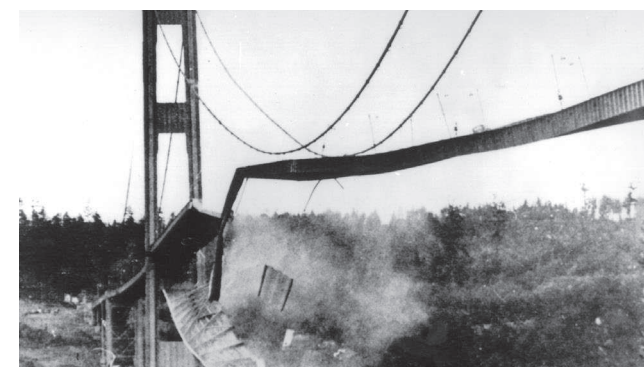
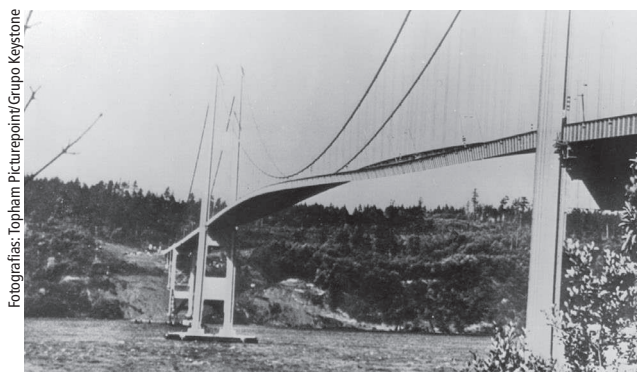
Quando a massa **m** de um sistema massa-mola é excitada e, em seguida, abandonada, ela oscila numa frequência natural, também única, dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Exemplo 3:**

Uma mola, ao contrário dos casos anteriores, pode vibrar em várias frequências naturais, o mesmo ocorrendo com uma corda elástica. A seguir, vemos dois dos muitos modos de vibração de uma mola presa pelas extremidades.

Além desses exemplos, podemos citar as cordas de um violão, a estrutura de um prédio e a de um estádio de futebol, que vibram quando os torcedores batem os pés, e o próprio corpo humano.

O fenômeno da ressonância ocorre quando um sistema físico recebe energia por meio de excitações de frequência igual a uma de suas frequências naturais de vibração. Com essa energia, o sistema físico passa a vibrar com amplitudes cada vez maiores.

Na ressonância, um sistema mecânico pode ter o limite de elasticidade ultrapassado, o que pode provocar seu rompimento. Isso foi o que provavelmente aconteceu na famosa ponte Tacoma Narrows (EUA), em 7 de novembro de 1940, apenas quatro meses após sua inauguração. O vento pode ter causado a vibração da ponte, com amplitudes cada vez maiores, até que ela se rompeu. Há uma teoria de que o vento iniciou a oscilação, mas foram os cabos de sustentação – que ficaram tensos quando a ponte descia e frouxos quando subia – que amplificaram as vibrações até ocorrer o colapso final.

Fotografias: Topham Picturepoint/Grupo Keystone

A fotografia mostra o instante em que a ponte pênsil Tacoma Narrows caía, provavelmente devido ao fenômeno da ressonância. Acredita-se que o responsável por esse desastre tenha sido o vento, que excitava a ponte fornecendo energia para a vibração de sua estrutura.

Podemos dizer, a respeito da ressonância, que:

> Um sistema físico é dito em **ressonância** com um agente excitador quando recebe excitações periódicas numa frequência igual a uma de suas frequências naturais de vibração.

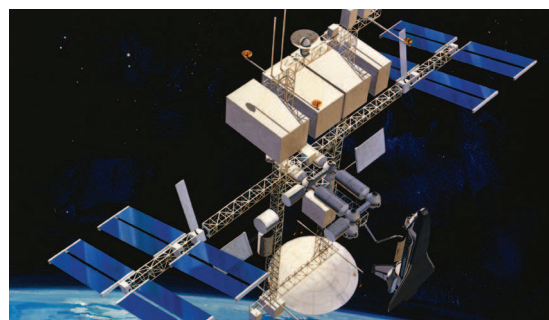
## 16. Micro-ondas

**Micro-ondas** são ondas eletromagnéticas com frequências na faixa de $10^9$ Hz a $10^{12}$ Hz. Como essas ondas se propagam na atmosfera de forma praticamente retilínea, são muito utilizadas nas telecomunicações, por exemplo nas transmissões de sinais de televisão ou na troca de mensagens telefônicas, também via satélite, entre dois continentes.

Nos radares, largamente utilizados na aviação comercial e militar, também são usadas micro-ondas. Observe que a palavra **radar** é uma abreviação das palavras da expressão inglesa ***ra****dio* ***d****etection* ***a****nd* ***r****anging* (detecção e localização por rádio). O princípio básico do radar consiste no envio de um pulso e no recebimento, com identificação, do "eco" dessa radiação refletida no objeto.

USAF/Getty Images

Avião-radar em voo de reconhecimento.

Stocktreck/Photodisc/Getty Images

Satélite espacial orbitando a Terra. As micro-ondas utilizadas em telecomunicações são refletidas em satélites.

A aplicação das micro-ondas na cozinha foi descoberta por acaso. Em 1945, logo após o final da Segunda Guerra Mundial, em Cambridge (EUA), o engenheiro Percy Spencer, inspecionando a fabricação de magnétrons para radares na empresa Raytheon, notou que uma barra de chocolate que estava em seu bolso derreteu "espontaneamente" quando ele se aproximou de radares em funcionamento. Intrigado, colocou milho de pipoca próximo ao magnétron. Após alguns minutos, voltando ao local, observou no chão as pipocas estouradas. Mais tarde descobriu que uma das radiações emitidas pelo radar – ondas de 2,45 gigahertz ($2,45 \cdot 10^9$ Hz) – provocava o aquecimento da água. Usando um magnétron de radar, construiu o primeiro forno de micro-ondas em 1947. Em razão do grande tamanho do magnétron, esse forno tinha quase 2 metros e massa de 340 kg.

O primeiro modelo doméstico foi produzido em 1955 e custava US$ 1.300 (mil e trezentos dólares). Com o desenvolvimento tecnológico, o tamanho do magnétron diminuiu, propiciando, a partir de 1967, a fabricação de fornos mais compactos e práticos. Hoje, o forno de micro-ondas é encontrado na maioria das residências em todo o mundo, sendo usado por milhões de pessoas para o aquecimento ou a preparação de alimentos.

Os aquecimentos tradicionais envolvem sempre a propagação do calor por condução e/ou convecção. Nos fornos de micro-ondas o aquecimento inicial é feito pela absorção de ondas eletromagnéticas em uma camada superficial de 2 a 7 cm, dependendo da densidade do material. Em carnes, por exemplo, materiais mais densos, as ondas penetram apenas de 2 a 3 cm e em pães podem atingir 7 cm de profundidade. As moléculas de água, açúcar e gordura (moléculas polares) existentes nesses materiais, absorvem energia das ondas e passam a vibrar mais intensamente. No movimento, as moléculas se atritam nas vizinhas, transformando a energia das ondas em energia térmica. A parte mais interna dos alimentos recebe energia térmica por condução, como nos aquecimentos tradicionais. Dessa forma, os alimentos não são aquecidos de maneira uniforme, como se acreditava, mas sim de fora para dentro.

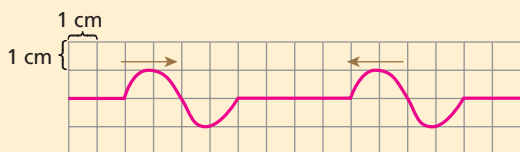
As moléculas de água, que são fortemente polares, tendem a se alinhar com o campo elétrico das ondas eletromagnéticas. Quando essas ondas têm frequência de 2,45 GHz, as moléculas de água entram em ressonância com elas, passando a vibrar intensamente, acompanhando as inversões periódicas do campo elétrico. Isso também ocorre com outras moléculas polares, como as de açúcares e de gorduras. A fricção entre as moléculas provoca o aquecimento do corpo. Como essas moléculas polares, principalmente as de água, estão presente nos alimentos, com este processo podemos obter o aquecimento generalizado deles.

A frequência das ondas emitidas pelo magnétron não é igual à natural de vibração das moléculas de água, açúcares e gorduras. Senão, toda a energia das micro-ondas seria absorvida pela camada externa dos alimentos, queimando a “casca” externa e deixando crua a parte interna. Ondas de frequências mais próximas a 2,45 GHz são as mais eficientes. Frequências menores penetram mais com menos energia e frequências maiores penetram menos com mais energia. Daí a utilização dessas ondas nos fornos de micro-ondas.

Thinkstock/Getty Images

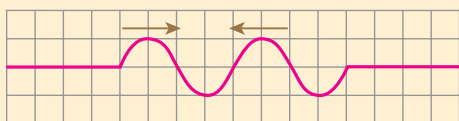
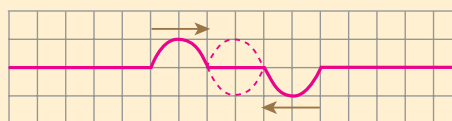
Um forno de micro-ondas pode aquecer corpos que contenham água, açúcares e gordura.

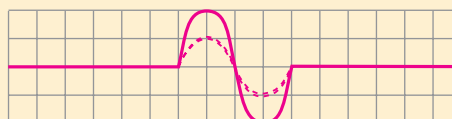
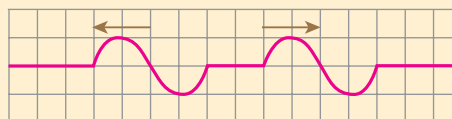
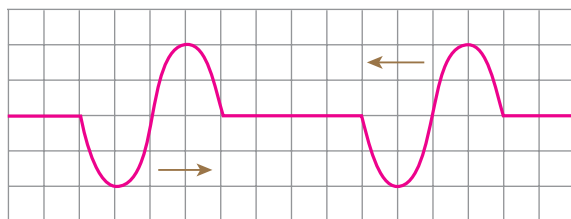
## Exercícios — nível 1

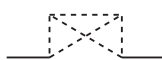
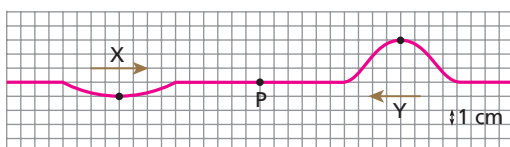
**74. E.R.** No esquema a seguir, observamos duas ondas de mesmo comprimento de onda e mesma amplitude, que se propagam numa mesma corda homogênea em sentidos opostos:

Sabendo que a situação indicada ocorreu no instante t = 0 e que a velocidade das ondas é igual a 1 cm/s, determine o perfil da corda nos instantes:

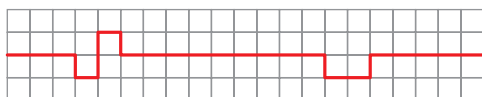
a) $t_1 = 2$ s; b) $t_2 = 3$ s; c) $t_3 = 4$ s; d) $t_4 = 7$ s.

**Resolução:**

a) Até o instante $t_1 = 2$ s, as ondas deslocam-se 2 cm cada uma, no sentido de suas propagações:

b) Do instante $t_1 = 2$ s até o $t_2 = 3$ s, as ondas avançam mais 1 cm cada uma. Então, temos a seguinte configuração:

Note que na parte central da corda houve uma interferência destrutiva.

c) No instante $t_3 = 4$ s, as ondas se superpõem em concordância de fase, ocorrendo uma interferência construtiva:

d) De $t_3 = 4$ s até $t_4 = 7$ s, as ondas percorrem mais 3 cm. Temos, então, o seguinte perfil na corda:

**75.** A figura abaixo mostra, em um certo instante, duas ondas que se propagam numa corda longa, com o mesmo período T = 4 s:

Qual será a forma da onda resultante três segundos após o instante mostrado acima?

**76.** Em uma mesma corda são produzidos dois pulsos, que se propagam em sentidos opostos (figura **A**). No instante em que esses pulsos estiverem totalmente superpostos (figura **B**), qual será a forma da corda?

**77.** Dois pulsos, **X** e **Y**, propagam-se ao longo de um fio homogêneo, como indicado na figura a seguir:

Quando os pulsos estiverem exatamente superpostos, qual será a amplitude do pulso resultante no ponto **P**?

**78.** (FGV-SP) A figura mostra dois pulsos que se movimentam em sentidos contrários, um em direção ao outro sobre a mesma corda, que pode ser considerada ideal.

No momento em que houver sobreposição total, a disposição esperada para os pontos da corda estará melhor indicada por:

**79.** Um afinador de pianos, ao realizar seu trabalho, vale-se de diapasões que emitem sons de frequências-padrão. Para afinar certa nota, após acioná-la, ele percute o diapasão correspondente e ouve os dois sons. A afinação da nota será considerada finda quando o afinador não observar entre os sons do piano e do diapasão:

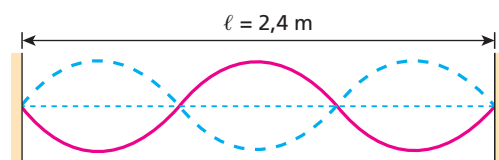
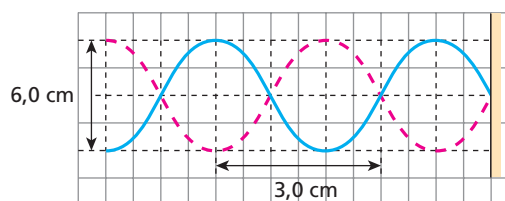
a) interferência.
b) polarização.
c) batimentos.
d) ressonância.
e) reflexão.

**80.** Em uma corda vibrante, é possível observar ondas estacionárias. Elas se formam devido aos fenômenos de:

a) reflexão e refração.
b) dispersão e reflexão.
c) refração e polarização.
d) reflexão e interferência.
e) interferência e polarização.

**81.** Uma onda estacionária é estabelecida numa corda, de modo a formar três ventres e quatro nós, como está esquematizado na figura:

Sabendo que a distância entre os nós extremos é de 1,5 m e a velocidade da onda é de 10 m/s, determine a frequência dessa onda.

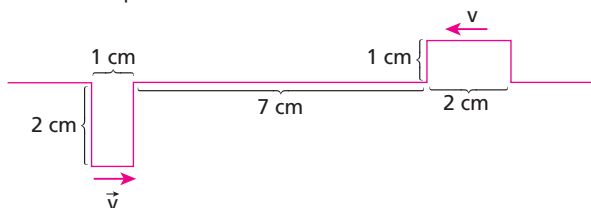
**82.** Uma corda de comprimento $\ell = 2,4$ m vibra com frequência de 300 Hz no estado estacionário representado na figura. Qual a velocidade de propagação da onda na corda?

**83.** O esquema seguinte representa a configuração estacionária formada numa corda elástica, que tem uma extremidade fixa e outra vibrante:

A respeito da onda estacionária formada na corda, aponte a alternativa verdadeira:

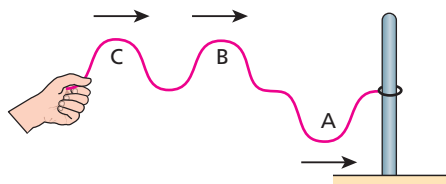
a) Embora sua velocidade de propagação seja nula, transporta energia.
b) Sua amplitude vale 6,0 cm.
c) Seu comprimento de onda vale 3,0 cm.
d) A distância entre dois de seus nós pode ser de 6,0 cm.
e) A distância entre dois de seus ventres é de 4,0 cm.

**84.** (Aman-RJ) Em um forno de micro-ondas, o processo de aquecimento é feito por ondas eletromagnéticas que atingem o alimento ali colocado, incidindo assim nas moléculas de água nele presentes. Tais ondas, de frequência 2,45 GHz, atingem aquelas moléculas, que, por possuírem esta mesma frequência natural, passam a vibrar cada vez mais intensamente. Desse modo, podemos afirmar que o aquecimento descrito é decorrente do seguinte fenômeno ondulatório:

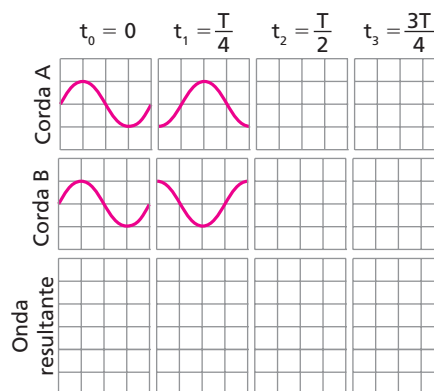
a) batimento.
b) refração.
c) interferência.
d) ressonância.
e) difração.

## Exercícios nível 2

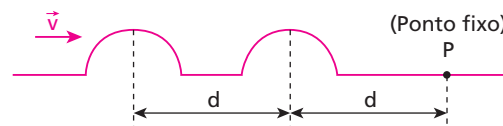
**85.** (UFSCar-SP) A figura mostra dois pulsos numa corda tensionada no instante t = 0 s, propagando-se com velocidade de 2 m/s em sentidos opostos:

A configuração da corda no instante t = 20 s é:

**86.** Durante uma aula de ondulatória, o professor de Física levou a classe para o pátio da escola. Utilizando uma corda e uma mola, mostrou aos alunos ondas que se propagavam ao longo desses disposittivos. Em um dos experimentos, o mestre fixou uma das extremidades da corda em um anel que foi encaixado, com folga, em um pequeno poste fixo ao chão e, com movimentos verticais, produziu na outra três pulsos transversais que se propagaram para a direita. Veja a situação representada na figura a seguir.

A partir do instante visualizado, até que ocorra a reflexão total do último pulso, ocorrerão, sequencialmente:

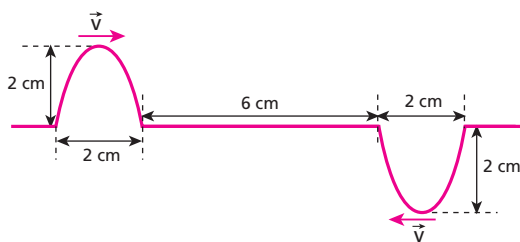
a) duas interferências construtivas.
b) duas interferências construtivas e uma destrutiva.
c) uma interferência destrutiva, uma construtiva e outra destrutiva.
d) duas interferências destrutivas.
e) duas interferências destrutivas e uma construtiva.

**87.** Duas ondas harmônicas, de mesma frequência e igual comprimento de onda, propagam-se em duas cordas idênticas. Os esquemas representam o perfil de um mesmo trecho das cordas nos instantes $t_0 = 0$ e $t_1 = \frac{T}{4}$, em que **T** é o período das ondas:

Determine:

a) o sentido de propagação das ondas, em cada corda;
b) o perfil das cordas nos instantes $t_2 = \frac{T}{2}$ e $t_3 = \frac{3T}{4}$;
c) o perfil de uma única corda, nos instantes considerados, supondo que as ondas se superpõem, ocorrendo interferência entre elas.

**88.** Dois pulsos idênticos se propagam numa mola perfeitamente elástica com velocidade $\vec{v}$ e são refletidos no ponto fixo **P**. O esquema representa a posição dos pulsos no instante t = 0:

**Obs.: d** é medido em metros.

Para que as deformações se anulem totalmente, por interferência, no instante t = 1 s, qual deve ser o valor da velocidade de propagação, em metros por segundo?

**89.** (UFSC) A figura representa dois pulsos de onda, inicialmente separados por 6,0 cm, propagando-se em um meio com velocidades iguais a 2,0 cm/s, em sentidos opostos.

Considerando a situação descrita, indique a(s) proposição(ões) correta(s).

(01) Inicialmente, as amplitudes dos pulsos são idênticas e iguais a 2,0 cm.

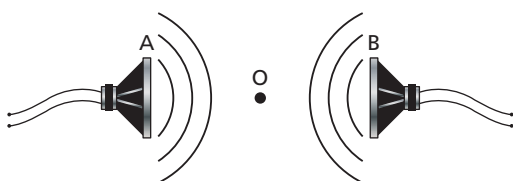
(02) Decorridos 8,0 segundos, os pulsos continuarão com a mesma velocidade e forma de onda, independentemente um do outro.

(04) Decorridos 2,0 segundos, haverá sobreposição dos pulsos e a amplitude será nula nesse instante.

(08) Decorridos 2,0 segundos, haverá sobreposição dos pulsos e a amplitude será máxima nesse instante e igual a 2,0 cm.

(16) Quando os pulsos se encontrarem, haverá interferência de um sobre o outro e não mais haverá propagação dos mesmos.

Dê como resposta o somatório dos itens corretos.

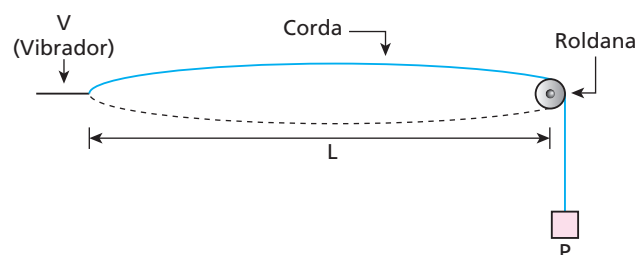
**90.** Dois alto-falantes **A** e **B** colocados próximos um do outro, conforme representa a figura abaixo, estão ligados em sistemas de amplificação diferentes e emitem sons simples de intensidades iguais, com frequências respectivamente iguais a 1 490 Hz e 1 486 Hz.

Um observador situado no ponto **O**, mais próximo de **A**:

a) ouvirá apenas o som do alto-falante **A**.
b) ouvirá apenas o som do alto-falante **B**.
c) não ouvirá som algum.
d) ouvirá um som de frequência e intensidade constantes.
e) ouvirá um som de frequência igual a 1 488 Hz e de intensidade variável, que passa por máximos quatro vezes por segundo.

**91.** (UEL-PR) Há algum tempo um repórter de televisão noticiou uma marcha em algum lugar do Brasil. Em dado momento, citou que os seus integrantes pararam de marchar quando estavam passando sobre uma ponte, com medo de que pudesse cair. Na ocasião, o repórter atribuiu tal receio a “crendices populares”. Com base nos conceitos da Física, é correto afirmar que os integrantes da marcha agiram corretamente, pois a ponte poderia cair devido ao fenômeno da(o):

a) reverberação.
b) interferência.
c) ressonância.
d) batimento.
e) efeito Doppler.

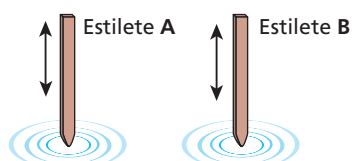
**92.** (Cefet-MG) Uma corda com comprimento livre **L** possui uma de suas extremidades presa à haste de um vibrador e a outra, passando por uma roldana, sustentando um peso **P**. A velocidade de propagação das ondas na corda é expressa por $v = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$, em que $\mu$ representa a massa específica linear da corda $\left(\frac{m}{L}\right)$. Os valores de **P**, **L** e **m** encontram-se na tabela.

| | |
|---|---|
| P | 1 N |
| L | 1 m |
| m | 0,04 kg |

Considerando que a corda é posta para vibrar, adquirindo o formato mostrado, é correto afirmar que o valor da frequência **f** de vibração, em oscilações/segundo, é igual a:

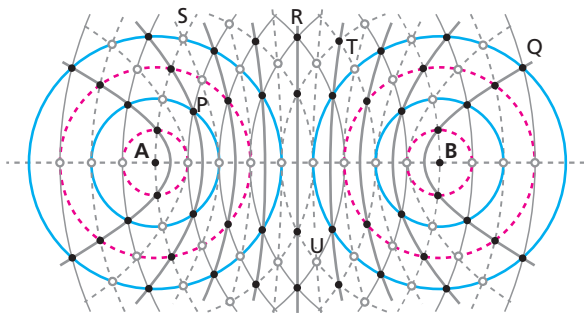
a) 1,5.
b) 2,5.
c) 4,5.
d) 5,0.
e) 7,0.

# Bloco 5

## 17. Interferência de ondas bidimensionais e tridimensionais

Para ilustrar o fenômeno da interferência de ondas bidimensionais, vamos considerar dois estiletes que vibram verticalmente, produzindo na superfície da água ondas idênticas e em fase, ou seja, quando um estilete produz uma crista, o outro faz o mesmo.

Algum tempo após o início das vibrações dos estiletes, a superfície livre da água apresenta-se como na fotografia a seguir.

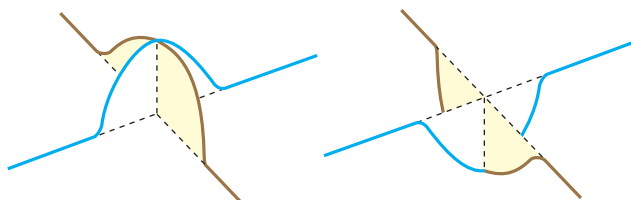
Fundamental Photographs

Interferência de ondas circulares na superfície da água.

Representação esquemática da interferência de ondas circulares na superfície da água.

Na figura, as circunferências azuis representam as cristas das ondas, enquanto as circunferências vermelhas representam os vales das ondas.

Uma análise mais detalhada do que está acontecendo nos pontos onde ocorre superposição dessas ondas mostra duas situações de grande interesse.

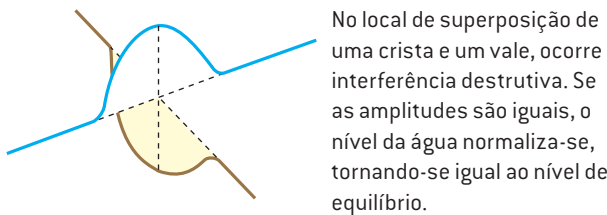
**1ª situação:**

Nos pontos onde ocorre a superposição de duas cristas ou de dois vales, a amplitude da perturbação resultante é igual à soma das amplitudes individuais dessas ondas. Nesses pontos, está ocorrendo uma **interferência construtiva**.

No local da superposição de duas cristas, ocorre uma interferência construtiva.

A interferência construtiva também ocorre nos pontos de superposição de dois vales.

Esses locais de interferência construtiva estão representados, na figura do topo da página, por pequenos círculos cheios.

**2ª situação:**

Nos pontos onde uma crista e um vale se superpõem, ocorre interferência destrutiva.

No local de superposição de uma crista e um vale, ocorre interferência destrutiva. Se as amplitudes são iguais, o nível da água normaliza-se, tornando-se igual ao nível de equilíbrio.

Esses locais de interferência destrutiva estão representados, ainda na figura do topo da página, por pequenos círculos vazios.

É importante observar que nessa figura os pontos de interferência construtiva (círculos cheios) e os pontos de interferência destrutiva (círculos vazios) pertencem a hipérboles intercaladas, todas de focos coincidentes com as fontes **A** e **B**. As hipérboles determinadas pelos pontos de interferência construtiva são denominadas **linhas ventrais** e as determinadas pelos pontos de interferência destrutiva são denominadas **linhas nodais**. Essas linhas são curvas hiperbólicas porque todos os pontos de uma mesma hipérbole apresentam a mesma diferença de distância em relação às fontes (focos) **A** e **B**.

Quando comparadas com as amplitudes de vibração dos pontos vizinhos, notamos que nas linhas ventrais os pontos vibram com amplitudes máximas, enquanto nas linhas nodais os pontos não vibram (ou praticamente não vibram).

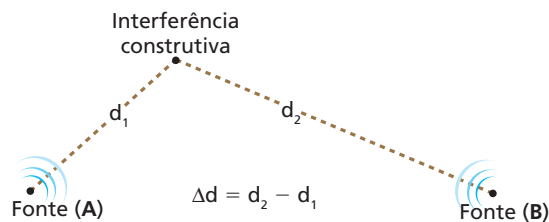
No segmento AB, que liga as duas fontes, observamos a formação de ondas estacionárias. Nos demais locais, formam-se ondas progressivas de amplitude máxima nas linhas ventrais.

## Condição de interferência construtiva

Na figura esquemática da interferência de ondas circulares (nesta página) notamos que, para qualquer ponto ventral (interferência construtiva), a diferença das distâncias entre um ponto e as fontes é nula ou um múltiplo par de meios comprimentos de onda.

Como exemplos, observe os pontos **P**, **Q** e **R** dessa figura:

- O ponto **P** dista $1\lambda$ de **A** e $4\lambda$ de **B**. Assim, a diferença entre essas distâncias é igual a $3\lambda$, ou $\frac{6\lambda}{2}$.
- O ponto **Q** dista $5{,}5\lambda$ de **A** e $1{,}5\lambda$ de **B**. Assim, a diferença entre essas distâncias é igual a $4\lambda$, ou $\frac{8\lambda}{2}$.
- O ponto **R** dista $3\lambda$ de **A** e $3\lambda$ de **B**. Assim, a diferença entre essas distâncias é zero.

Portanto, na interferência de ondas geradas por fontes coerentes (mesma frequência e em concordância de fase), para que um ponto pertença a uma linha ventral, isto é, para que nesse ponto as ondas interfiram construtivamente, é preciso que a diferença entre as distâncias desse ponto às fontes seja nula ou um número par de meios comprimentos de onda:

$$\Delta d = N\frac{\lambda}{2} \quad \text{em que } N = 0, 2, 4, 6, ...$$

Caso as fontes estejam em **oposição de fase**, situação em que uma fonte gera um vale enquanto a outra gera uma crista, a condição muda para **N** igual a um número ímpar de meios comprimentos de onda:

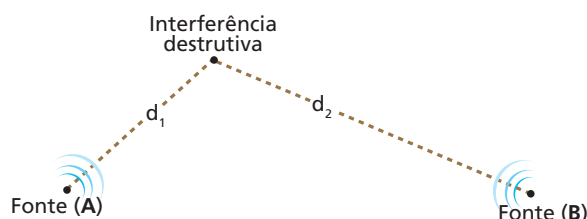
$$\Delta d = N\frac{\lambda}{2} \quad \text{em que } N = 1, 3, 5, 7, ...$$

## Condição de interferência destrutiva

Voltando à figura esquemática de interferência de ondas circulares (página 240), notamos que, para qualquer ponto nodal (interferência destrutiva), a diferença das distâncias de um ponto à fonte **A** e desse mesmo ponto à fonte **B** é um número ímpar de meios comprimentos de onda.

Como exemplos, consideremos os pontos **S**, **T** e **U** dessa figura:

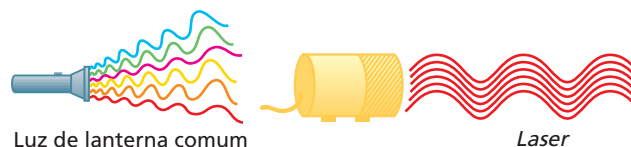
- O ponto **S** dista $2\lambda$ de **A** e $4{,}5\lambda$ de **B**. Assim, a diferença entre essas distâncias é igual a $2{,}5\lambda$, ou $\frac{5\lambda}{2}$.
- O ponto **T** dista $3{,}5\lambda$ de **A** e $2\lambda$ de **B**. Assim, a diferença entre essas distâncias é igual a $1{,}5\lambda$, ou $\frac{3\lambda}{2}$.
- O ponto **U** dista $3\lambda$ de **A** e $2{,}5\lambda$ de **B**. Assim, a diferença entre essas distâncias é igual a $0{,}5\lambda$, ou $\frac{1\lambda}{2}$.

Portanto, na interferência de ondas geradas por fontes coerentes (mesma frequência e em concordância de fase), para que um ponto pertença a uma linha nodal, isto é, para que nesse ponto as ondas interfiram destrutivamente, é preciso que a diferença entre as distâncias desse ponto às fontes seja um número ímpar de meios comprimentos de onda:

$$\Delta d = N\frac{\lambda}{2} \quad \text{em que } N = 1, 3, 5, 7, ...$$

Caso as fontes estejam em **oposição de fase**, a condição muda para **N** nulo ou igual a um número par de meios comprimentos de onda:

$$\Delta d = N\frac{\lambda}{2} \quad \text{em que } N = 0, 2, 4, 6, ...$$

**Nota:**

- As condições estudadas são válidas também quando a interferência ocorre entre ondas tridimensionais, como as ondas sonoras e as luminosas.

A luz emitida por uma lanterna comum é constituída de ondas eletromagnéticas de diversas frequências, aleatoriamente defasadas. O *laser*, por sua vez, é constituído de ondas eletromagnéticas de mesma frequência em concordância de fase (luz coerente).

## Barulho + barulho = silêncio

O título pode parecer estranho para uma pessoa que nunca tenha estudado o fenômeno da interferência. No entanto, sabemos que duas ondas podem interferir destrutivamente, proporcionando o anulamento de seus efeitos.

Alamy/Diomedia

No interior da cabine de um avião, os sons indesejáveis podem ser "anulados" por meio da interferência destrutiva.

Na cabine de um avião, por exemplo, é possível que haja um som de fundo, devido aos motores. Os tripulantes, ficando expostos a esses sons durante uma longa viagem, podem se sentir incomodados. Para resolver esse problema, um computador instalado na cabine recebe o som de fundo, por meio de um microfone, e o analisa. Em seguida emite, por meio de alto-falantes, uma onda sonora idêntica à recebida, com exceção da fase, que será invertida. A superposição dessas duas ondas idênticas, porém em oposição de fase, proporciona um "silêncio" no interior da cabine.

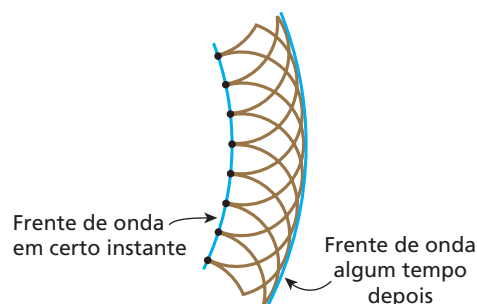
Outra situação em que a interferência destrutiva atua é o bloqueio de celulares. Nos jornais sempre há manchetes dizendo que o governo pretende blindar os presídios, não deixando os presos utilizarem seus celulares. Esse bloqueio é feito por meio de emissões de ondas eletromagnéticas nas mesmas frequências das emitidas pelas operadoras, porém em oposição de fase. A finalidade é provocar uma interferência destrutiva, evitando que os celulares existentes no interior dos presídios possam receber ligações. Outra maneira de evitar que ligações sejam recebidas é emitir ondas nas mesmas frequências das operadoras, porém com intensidades bem maiores. O aparelho receptor (o celular) irá decodificar as ondas de maior energia. Assim, a pessoa que está usando o celular apenas escutará um zumbido. Isso também ocorre quando, ao viajar por uma estrada com o rádio ligado, passamos por uma região que tem uma emissora de rádio que transmite na mesma frequência daquela em que estamos sintonizados. Notamos que esta interfere na recepção da primeira e o aparelho, ao receber as duas ondas, dará preferência para a onda de maior intensidade.

Thinkstock/Getty Images

Os celulares podem ser bloqueados por meio da emissão de ondas eletromagnéticas que interferem destrutivamente com as ondas recebidas das operadoras.

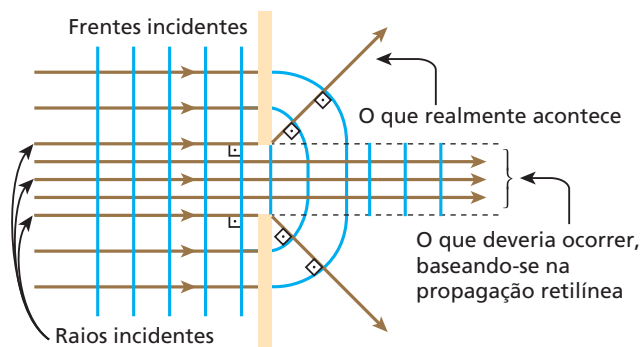
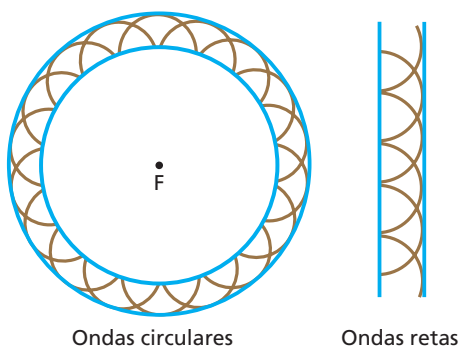
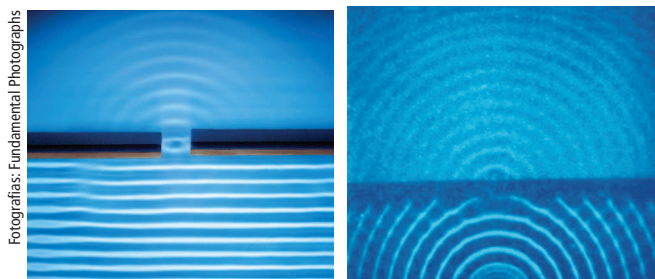
## 18. Princípio de Huygens

No final do século XVII, Huygens propôs, em seu *Tratado da luz*, um método de construção gráfica de frentes de onda que ficou conhecido como **Princípio de Huygens**. Segundo esse princípio:

> Cada ponto de uma frente de onda comporta-se como uma nova fonte de ondas elementares, que se propagam para além da região já atingida pela onda original e com a mesma frequência que ela.

Num instante considerado, cada ponto da frente de onda, representado por uma bolinha preta, comporta-se como fonte das ondas elementares de Huygens. Passado algum tempo, a frente de onda envolve as ondas elementares.

SuperStock/Diomedia

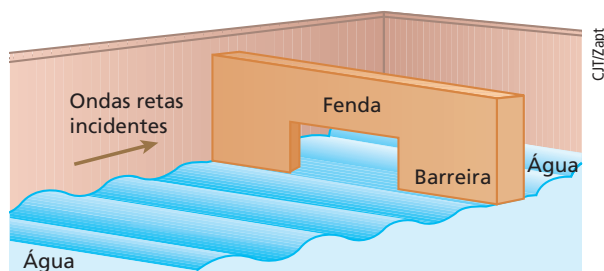
**Christiaan Huygens** (1629-1695), físico e astrônomo holandês. Em 1690, publicou a obra *Tratado da luz*, em que formula a teoria ondulatória para a luz. Suas ideias contrariavam a teoria corpuscular, aceita pela comunidade científica da época e defendida por Isaac Newton.

Podemos concluir que, em meios homogêneos e isótropos, a frente de onda desloca-se mantendo sua forma geométrica. Portanto, uma frente circular continua circular, uma frente reta continua reta, uma frente esférica continua esférica, e assim por diante, desde que não haja obstáculos que afetem a propagação.

Esquema da difração de ondas retas que se propagam na superfície da água.

As fotografias mostram as ondas elementares de Huygens na superfície da água. Note que elas são circulares, independentemente de as ondas originais também o serem ou não.

## 19. Difração

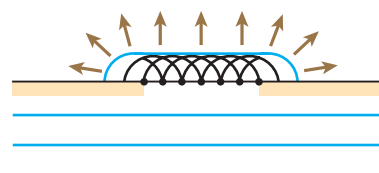
A **difração** é um fenômeno ondulatório que só pode ser explicado utilizando-se o Princípio de Huygens.

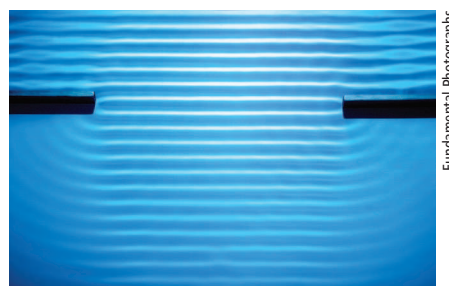
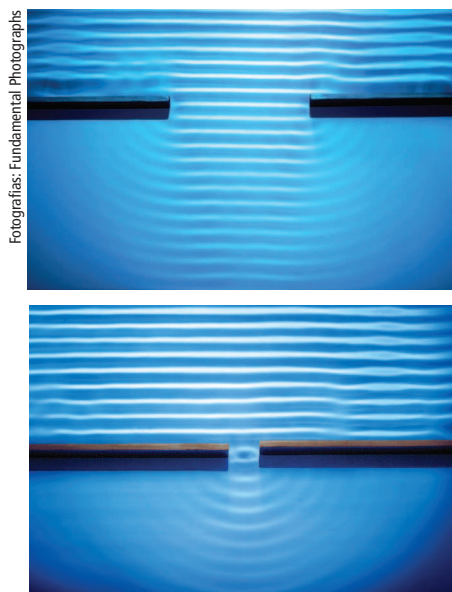
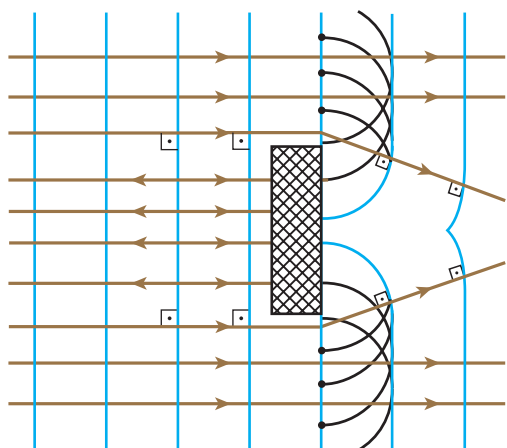
Chama-se **difração** de uma onda o encurvamento sofrido por seus raios quando a onda encontra obstáculos à sua propagação. O fenômeno da difração prova ser incorreta a generalização de que os raios de onda são retilíneos (ainda que em meios homogêneos e isótopos).

Como ilustração, considere um exemplo bastante simples: um trem de ondas retas propagando-se na superfície da água e atingindo uma barreira onde existe uma fenda.

Note que a parte da frente de onda que incide na barreira é refletida, mas a parte que atinge a fenda passa por ela.

Se a propagação das ondas ocorresse sempre em linha reta, elas continuariam retas após atravessar a fenda, e observaríamos apenas uma faixa de largura igual à da fenda. No entanto, podemos notar que, nas bordas da fenda, as ondas sofrem um desvio. Esse desvio é observado quando a largura da fenda é da ordem do comprimento de onda das ondas incidentes.

A rigor, a difração de uma onda em fendas sempre ocorre. Entretanto, o desvio torna-se tanto mais acentuado quanto menor é a largura da fenda.

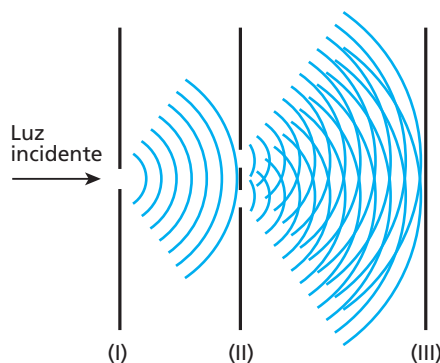
Particularmente no caso em que as dimensões da largura são bem inferiores às do comprimento de onda, as ondas difratadas tornam-se aproximadamente circulares, mesmo que as ondas incidentes não o sejam.

Cada ponto da frente de onda que atravessa a fenda comporta-se como uma fonte das ondas elementares de Huygens.

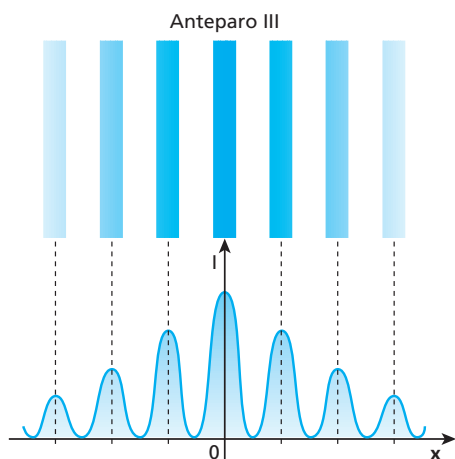
Observe, na sequência de fotografias realizadas com ondas retas na superfície da água, que a diminuição da largura da fenda acentua o fenômeno da difração.

Se, em vez de uma fenda, essas ondas encontrassem um obstáculo, continuaríamos tendo difração. Nesse caso, as ondas se desviariam, contornando o obstáculo.

A difração intensifica-se quando as dimensões da fenda ou do obstáculo são inferiores às do comprimento da onda ou pelo menos da mesma ordem de grandeza.

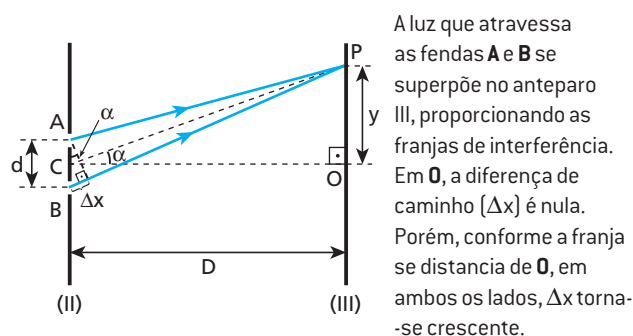
## 20. Experiência de Young

Apesar de Christiaan Huygens ter publicado em 1690 o seu *Tratado da luz*, no qual defendia a teoria ondulatória para a luz, a teoria corpuscular idealizada por Isaac Newton permaneceu aceita pela comunidade científica. Em 1801, Thomas Young demonstrou, baseado em sólidos resultados experimentais, a existência do fenômeno da interferência luminosa.

**Thomas Young** (1773–1829), médico e físico inglês, foi o primeiro a demonstrar a teoria ondulatória da luz com sólida base experimental. Suas descobertas reforçaram as teorias de Huygens publicadas no final do século XVII.

Na experiência realizada por Young, foram usados três anteparos. No primeiro, havia um pequeno orifício, em que ocorria a primeira difração da luz monocromática. No segundo, havia dois orifícios, colocados lado a lado, em que novas difrações aconteciam com a luz já difratada no primeiro orifício. No último anteparo, eram projetadas as "manchas" de interferência e podiam ser observados os **máximos** (regiões mais bem iluminadas) e os **mínimos** (regiões mal iluminadas) de intensidade. Quando os orifícios são substituídos por estreitas fendas, essas "manchas" tornam-se "franjas" de interferência, que são mais bem visualizadas.

O esquema acima mostra como Young obteve o espectro de interferência no anteparo III. O orifício único no primeiro anteparo fazia com que a luz atingisse os orifícios do segundo anteparo em fase, transformando-os em "fontes" coerentes, já que pertenciam a uma mesma frente de onda.

O esquema a seguir mostra a variação da intensidade da luz projetada no anteparo III. A "franja" central é o máximo de maior intensidade. Observe que para a direita e para a esquerda do máximo central temos, de forma intercalada, mínimos e máximos, sendo que os máximos apresentam intensidades decrescentes.

Como as “fontes” (orifícios do segundo anteparo) são coerentes, isto é, estão em fase, as interferências observadas no anteparo III dependem apenas da diferença ($\Delta x$) entre os caminhos percorridos pelos raios de luz.

A luz que atravessa as fendas **A** e **B** se superpõe no anteparo III, proporcionando as franjas de interferência. Em **O**, a diferença de caminho ($\Delta x$) é nula. Porém, conforme a franja se distancia de **O**, em ambos os lados, $\Delta x$ torna-se crescente.

Na figura acima, para existir em **P** um **máximo** de intensidade (franja clara), é necessário que $\Delta x$ contenha um número inteiro de comprimentos de onda ou um número par de meios comprimentos de onda.

$$\Delta x = k\frac{\lambda}{2} \quad \text{em que } k = 0, 2, 4, 6, \ldots$$

Para existir em **P** um **mínimo** de intensidade (franja escura), é necessário que $\Delta x$ contenha um número ímpar de meios comprimentos de onda.

$$\Delta x = k\frac{\lambda}{2} \quad \text{em que } k = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Como **D** é da ordem de metros e **d** é da ordem de milímetros, AP, BP e CP são praticamente paralelos. Daí a igualdade dos ângulos $\boldsymbol{\alpha}$.

No desenho que representa a experiência de Young, podemos observar que, sendo a distância **d** entre as fendas muito menor que a distância **D** entre os anteparos II e III, o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ é pequeno o suficiente para que seja válida a relação: $\operatorname{sen} \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha$.

Assim, no triângulo retângulo pequeno, temos: $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\Delta x}{d}$.

No triângulo retângulo CPO, temos: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y}{D}$.

Então, como $\operatorname{sen} \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha$, podemos escrever: $\dfrac{\Delta x}{d} = \dfrac{y}{D}$, mas $\Delta x = k\dfrac{\lambda}{2}$. Então: $k\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{yd}{D}$

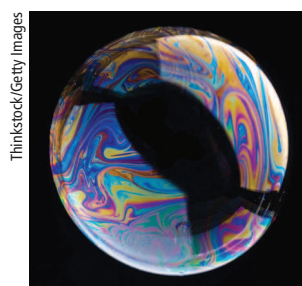
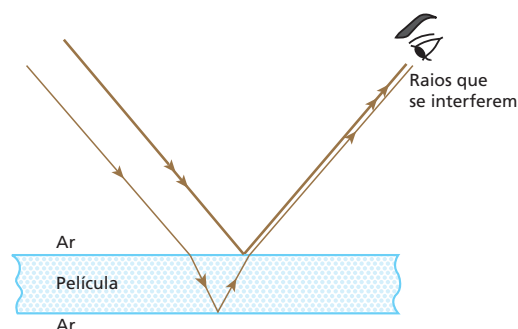
$$\lambda = \frac{2yd}{kD}$$

Essa expressão pode ser usada para calcular a frequência ou o comprimento de onda da luz monocromática incidente no anteparo II.

Observe que **y** é a distância entre a franja considerada e o máximo central (a distância entre duas franjas claras ou entre duas franjas escuras consecutivas é a mesma), **d** é o espaçamento entre as duas fendas do anteparo II, **D** é a distância entre os anteparos II e III e **k** é um número inteiro relacionado com a ordem da franja: para $k = 0, 2, 4, \ldots$ temos franjas claras; para $k = 1, 3, 5, \ldots$ temos franjas escuras.

## 21. Interferência em películas delgadas

As cores que observamos em bolhas de sabão ou em finas manchas de óleo no chão aparecem devido à interferência de raios de luz que refletem na sua superfície externa e interna. A diferença do caminho percorrido por esses dois raios e a inversão de fase na reflexão da superfície externa podem proporcionar interferências construtivas ou destrutivas entre eles.

Thinkstock/Getty Images

Na fotografia, podemos observar manchas multicoloridas na superfície de uma bolha de sabão. Esse fenômeno ocorre devido à interferência da luz.

## Leitura

### Procurando o sinal

Enrique Algarra/Grupo Keystone

A telefonia celular é um dos serviços que mais crescem no mundo. No Brasil, o número de aparelhos celulares já ultrapassou o de telefones fixos. A principal característica da telefonia celular é a mobilidade, ou seja, com ela o usuário consegue estabelecer contatos telefônicos mesmo em deslocamento. Isso é possível porque a comunicação é feita sem o emprego de fios, utilizando-se ondas eletromagnéticas de frequência compreendida entre 1 GHz e 3 GHz. O sistema celular é formado por três componentes: a estação móvel, que é o telefone celular propriamente dito, a estação rádio-base, que é a antena responsável pelo encaminhamento das ligações, e a central de comutação e controle, que é o cérebro do sistema, responsável pelo gerenciamento das chamadas e pela conexão com outras estações rádio-base. O atual estágio da telefonia celular permite que um telefone dentro de sua área de cobertura seja localizado mesmo no interior de veículos (carros, ônibus, trens etc.), contido em bolsos de roupas ou dentro de malas ou sacolas. Nesses casos, a onda é detectada depois de sofrer reflexões, refrações e difrações. É importante notar que as ondas hertzianas utilizadas na telefonia celular difratam-se com grande facilidade em fendas de pequenas dimensões, como os quase invisíveis orifícios existentes em tramas têxteis, já que seu comprimento de onda é da ordem de $10^1$ cm.

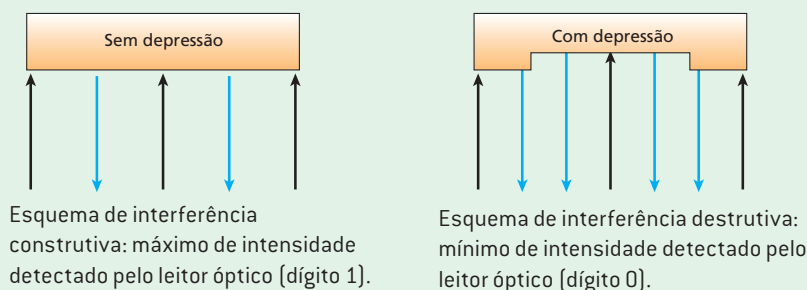
### *Compact disc* (CD)

Alamy/Other Images

O *compact disc* (CD) é um disco de policarbonato transparente de 12 cm de diâmetro. Em uma de suas faces, existe uma fina camada de uma liga metálica na qual podem ser estampadas microscópicas depressões. As regiões com depressões e as regiões sem depressões representam em conjunto as informações por meio de um sistema binário. Esses dados são gravados a partir de 2 cm do centro do disco em uma trilha espiralada que se afasta com passo constante.

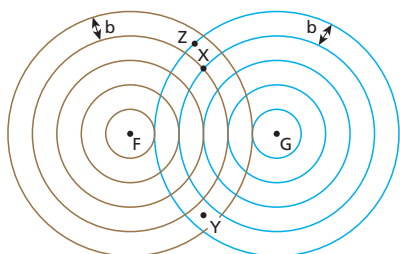
A leitura das informações é realizada utilizando-se um *laser* de baixa potência, que "lê" as depressões e as ausências de depressões do centro para a extremidade do disco. Quando o *laser* está iluminando uma região de ausência de depressão, ocorre uma interferência construtiva entre os raios luminosos refletidos, o que será interpretado pelo leitor óptico como dígito 1 (um). Quando a luz incide em uma região onde existe depressão, raios refletidos na depressão e raios refletidos nas bordas da depressão, devido à diferença de caminho, irão sofrer interferência destrutiva, chegando com intensidade menor ao leitor óptico, sendo interpretado como o dígito 0 (zero). Uma sequência de tais informações é decodificada pelo sistema e enviada para um alto-falante (no caso de sons) ou para uma tela de computador (no caso de imagens).

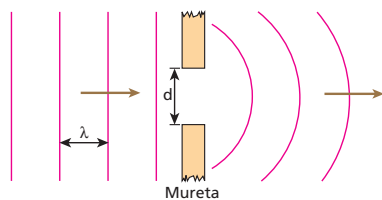
Esquema de interferência construtiva: máximo de intensidade detectado pelo leitor óptico (dígito 1).

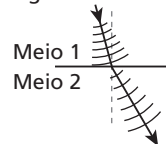
Esquema de interferência destrutiva: mínimo de intensidade detectado pelo leitor óptico (dígito 0).

O nome CD é utilizado para os discos comprados nas lojas nos quais encontramos músicas gravadas. Aqueles que trazem informações de *softwares* de computadores são denominados CD-ROM, que são gravados pelo fabricante, não podendo ser alterados. Encontramos também os discos virgens para gravação, os CD-R e os CD-RW, que podem ser regravados. Os DVDs utilizam teconologia semelhante à dos CDs.

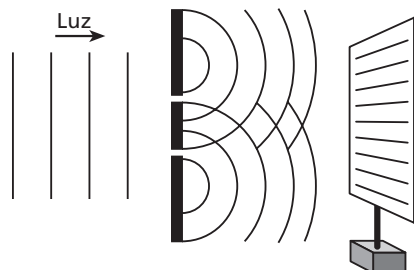
## Exercícios

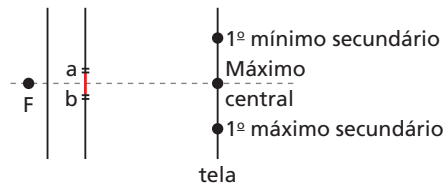
nível 1

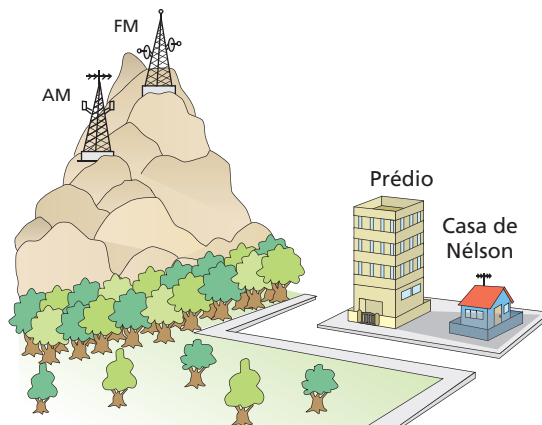
**93.** A figura seguinte representa as ondas produzidas por duas fontes, **F** e **G**, que vibram na superfície de um líquido. **X**, **Y** e **Z** são pontos da superfície do líquido. As circunferências indicam cristas. Considere que na região indicada não há amortecimento das ondas.

a) Se **f** é a frequência da fonte **F**, qual a frequência da fonte **G**?
b) Se **x**, **y** e **z** são amplitudes de vibração da água nos pontos **X**, **Y** e **Z**, compare **x**, **y** e **z**.

**94.** O esquema a seguir representa, visto de cima, a evolução de ondas na superfície da água. Elas se propagam da esquerda para a direita, incidindo na mureta indicada, na qual há uma abertura de largura **d**:

As ondas, cujo comprimento de onda vale **λ**, conseguem "contornar" a mureta, propagando-se à sua direita. É correto que:
a) ocorreu refração, e $d > \lambda$.
b) ocorreu refração, e $d = \lambda$.
c) ocorreu difração, e $d < \lambda$.
d) ocorreu reflexão, e $d > \lambda$.
e) tudo o que se afirmou não tem relação alguma com o fenômeno ocorrido.

**95.** (UFC) Sabemos que a luz apresenta propriedades de polarização, interferência, refração e difração. Os diagramas identificam estas propriedades.

Dentre as opções apresentadas, indique aquela que contém as propriedades na seguinte ordem: difração, interferência, refração e polarização.
a) I, II, IV e III
b) II, I, IV e III
c) IV, II, I e III
d) III, IV, I e II
e) IV, I, III e II

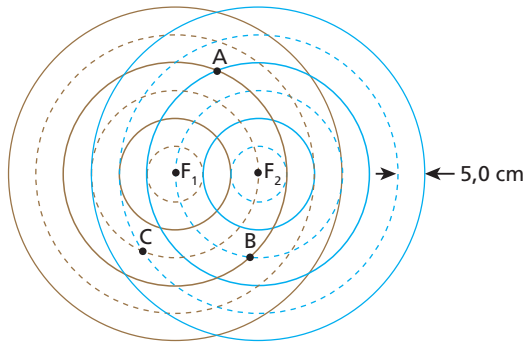
**96.** A figura a seguir representa um feixe de luz propagando-se da esquerda para a direita, incidindo em dois anteparos: o primeiro com dois pequenos orifícios e o segundo opaco. Neste, forma-se uma série de franjas claras e escuras.

Os fenômenos responsáveis pelo aparecimento das franjas são, sucessivamente,
a) a refração e a interferência;
b) a polarização e a interferência;
c) a reflexão e a difração;
d) a difração e a polarização;
e) a difração e a interferência.

**97.** Na montagem da experiência de Young, esquematizada abaixo, **F** é uma fonte de luz monocromática de comprimento de onda igual a **λ**.

Determine a diferença entre os percursos ópticos dos raios provenientes das fendas **a** e **b**, em cada caso a seguir.
a) 1º máximo secundário;
b) 2º mínimo secundário.

**98.** (UFMG) No alto da Serra do Curral, estão instaladas duas antenas transmissoras – uma de rádio AM e outra de rádio FM. Entre essa serra e a casa de Nélson, há um prédio, como mostrado na figura a seguir:

Na casa de Nélson, a recepção de rádio FM é ruim, mas a de rádio AM é boa.
Com base nessas informações, **explique** por que isso acontece.

## Exercícios

nível 2

**99.** (UFSC) Na figura abaixo estão representadas as cristas (circunferências contínuas) e os vales (circunferências tracejadas) das ondas produzidas pelas fontes $F_1$ e $F_2$, num determinado instante. A amplitude de cada onda é igual a 1,0 cm e a frequência de vibração de $F_1$ como a de $F_2$ é igual a 10 Hz.

Indique a(s) proposição(ões) verdadeira(s):

(01) Cada uma das ondas independentemente é unidimensional.

(02) No ponto **A**, há uma interferência construtiva com amplitude de vibração de 2,0 cm.

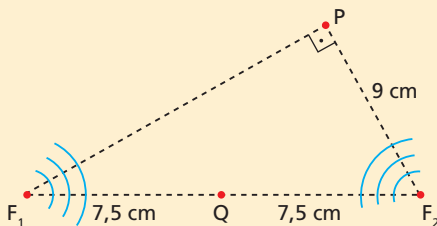
(04) No ponto **B**, há uma interferência destrutiva com amplitude de vibração nula.

(08) No ponto **C**, há uma interferência construtiva com amplitude de vibração de 2,0 cm.

(16) O comprimento de onda de cada onda é 5,0 cm.

(32) O valor da velocidade de propagação de cada onda é $v = 100$ cm/s.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

**100. E.R.** Numa cuba de ondas de profundidade constante, dois estiletes funcionam como fontes de ondas circulares, vibrando em fase com frequência de 5 Hz. Sabendo que a velocidade dessas ondas na superfície da água é de 10 cm/s, determine o tipo de interferência que ocorre nos pontos **P** e **Q** da figura.

**Resolução:**

**Ponto Q**

Como o ponto **Q** está a igual distância das fontes e estas vibram em fase, a interferência nesse local é **construtiva**, pois $\Delta d = 0$.

E sendo $\Delta d = N\frac{\lambda}{2}$, temos $N = 0$.

Obs.: Para $N = 0, 2, 4, 6, 8, ...$, teremos interferência construtiva (IC) e para $N = 1, 3, 5, 7, ...$, teremos interferência destrutiva (ID), caso as fontes estejam em concordância de fase (se estiverem em oposição, as condições se inverterão).

**Ponto P**

Para o ponto **P**, temos $PF_2 = 9$ cm e $PF_1$ pode ser calculado pelo Teorema de Pitágoras, já que o triângulo $F_1PF_2$ é retângulo. Então:

$$(\overline{F_1F_2})^2 = (\overline{PF_1})^2 + (\overline{PF_2})^2$$

$$15^2 = (\overline{PF_1})^2 + 9^2 \Rightarrow (\overline{PF_1})^2 = 225 - 81 = 144$$

$$\overline{PF_1} = 12 \text{ cm}$$

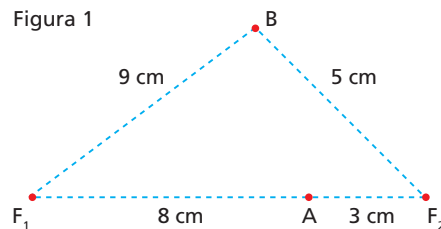
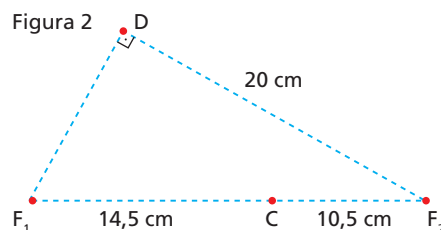
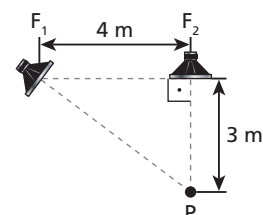
Assim, temos:

$$\Delta d = \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 12 - 9 \Rightarrow \Delta d = 3 \text{ cm}$$

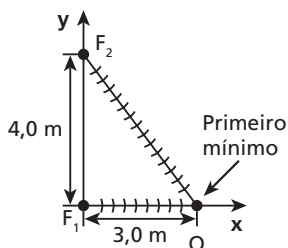
Da relação $\Delta d = N\frac{\lambda}{2}$, sendo $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10 \text{ cm/s}}{5 \text{ Hz}} = 2\text{cm}$, vem:

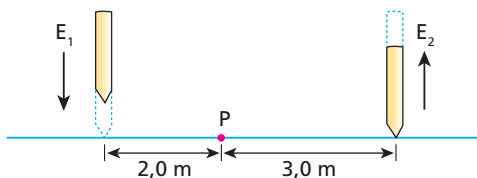
$$3 = N \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{N = 3}$$

Portanto, em **P** a interferência é destrutiva.

**101.** Nas figuras, $F_1$ e $F_2$ são duas fontes de ondas circulares de mesma frequência que se propagam na superfície da água. Supondo que na primeira figura as fontes estejam em concordância de fase e que na segunda estejam em oposição, determine o tipo de interferência que ocorre nos pontos **A**, **B**, **C** e **D**. As ondas propagam-se com comprimentos de onda iguais a 2 cm.

**102.** (UFV-MG) Duas fontes de ondas sonoras, situadas nos pontos $F_1$ e $F_2$, emitem ondas de mesma frequência e em fase. Uma pessoa situada no ponto **P** recebe as duas ondas com a mesma intensidade não nula, vindas diretamente das fontes. A figura abaixo mostra a disposição das fontes e da pessoa.

O maior comprimento de onda, em metros, que deve ser emitido pelas fontes para que a pessoa não escute o som produzido por elas é:

a) 0,5 b) 1 c) 2 d) 4

**103.** (UFPE) Duas fontes sonoras pontuais $F_1$ e $F_2$, separadas entre si de 4,0 m, emitem em fase e na mesma frequência. Um observador **O**, afastando-se lentamente da fonte $F_1$, ao longo do eixo **x**, detecta o primeiro mínimo de intensidade sonora, devido à interferência das ondas geradas por $F_1$ e $F_2$, na posição x = 3,0 m.

Sabendo-se que a velocidade do som é 340 m/s, qual a frequência das ondas sonoras emitidas, em Hz?

**104.** Dois estiletes $E_1$ e $E_2$ vibram verticalmente, executando movimentos harmônicos simples, de frequências iguais. Suas extremidades colidem com a superfície da água de um lago, provocando ondas de amplitudes iguais que se propagam sem amortecimento, com velocidade de 10 m/s.

Sabendo que os estiletes vibram em oposição de fase, calcule a menor frequência de suas oscilações para que no ponto **P** indicado se observe:

a) o máximo reforço das ondas que se superpõem;

b) o anulamento das ondas que se superpõem.

**105. E.R.** Um tanque de fundo plano contém benzeno transparente de índice de refração absoluto igual a 1,5. Um onda de telecomunicações com frequência igual a 100 MHz, emitida de um satélite, incide verticalmente sobre a superfície tranquila do benzeno, sendo em parte refletida na superfície líquida e em parte refletida no fundo do tanque. Sabendo-se que a intensidade da velocidade da luz no vácuo é igual a $3,0 \cdot 10^8$ m/s, determine:

a) a intensidade da velocidade da onda no interior do benzeno, bem como seu respectivo comprimento de onda;

b) as três menores alturas do benzeno dentro do tanque para que a parcela da onda refletida na superfície líquida seja cancelada pela parcela da onda refletida no fundo do tanque.

**Resolução:**

a) A intensidade da velocidade da onda no interior do benzeno é calculada por:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow 1,5 = \frac{3,0 \cdot 10^8}{v} \Rightarrow \boxed{v = 2,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

Aplicando-se a **Equação Fundamental da Ondulatória**, determinamos o comprimento de onda da onda do satélite no interior do benzeno.

$$v = \lambda f \Rightarrow 2,0 \cdot 10^8 = \lambda 100 \cdot 10^6 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2,0 \text{ m}}$$

É importante notar que mesmo sofrendo sucessivas refrações a onda mantém inalterada sua frequência de 100 MHz.

b)

Condição de ID: $\Delta y = \frac{\lambda}{2}$

Mas, $\Delta y = 2h$, logo:

$$2h = k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow h = k\frac{2,0}{4} \text{ (m)}$$

Donde: $h = k\ 0,50$ (m)

(k = 1, 3, 5, ...)

Os três menores valores de h correspondem aos três menores valores de **k** (k = 1, k = 3 e k = 5).

Assim:

Para k = 1: $h = 1 \cdot 0,50 \text{ m} \Rightarrow \boxed{h = 0,50 \text{ m}}$

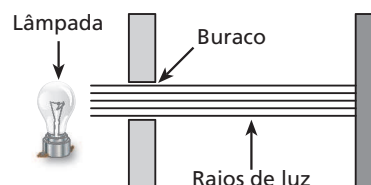
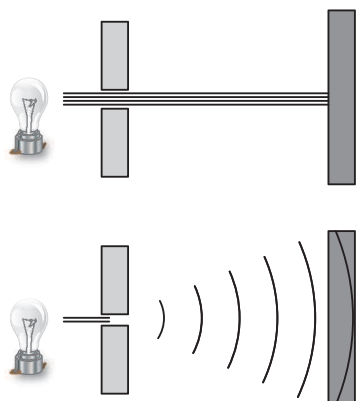
Para k = 3: $h = 3 \cdot 0,50 \text{ m} \Rightarrow \boxed{h = 1,5 \text{ m}}$

Para k = 5: $h = 5 \cdot 0,50 \text{ m} \Rightarrow \boxed{h = 2,5 \text{ m}}$

**106.** (Uece) Um método muito usado para inibir a reflexão da luz em vidros é recobri-los com um filme fino e transparente. A espessura mínima, em nm, que um filme fino com índice de refração 1,25 deve ter para que uma luz de comprimento de onda igual a 620 nm, no vácuo, não seja refletida, quando incide praticamente normal a um vidro de índice de refração 1,50, é:

a) 155. b) 124. c) 112. d) 103.

**107.** (ITA-SP) Uma fina película de fluoreto de magnésio recobre o espelho retrovisor de um carro a fim de reduzir a reflexão luminosa. Determine a menor espessura da película para que produza a reflexão mínima no centro do espectro visível. Considere o comprimento de onda $\lambda = 5\,500$ Å, o índice de refração do vidro $n_v = 1,50$ e o da película $n_p = 1,30$. Admita a incidência luminosa como quase perpendicular ao espelho.

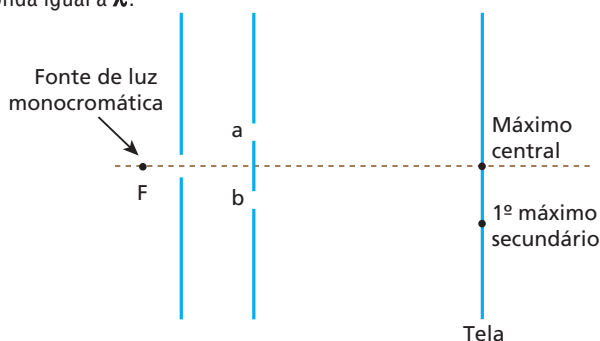
**108.** (Enem) Ao diminuir o tamanho de um orifício atravessado por um feixe de luz, passa menos luz por intervalo de tempo, e próximo da situação de completo fechamento do orifício verifica-se que a luz apresenta um comportamento como o ilustrado nas figuras. Sabe-se que o som, dentro de suas particularidades, também pode se comportar dessa forma.

FIOLHAIS, G. *Física divertida*. Brasília: UnB, 2000 (adaptado).

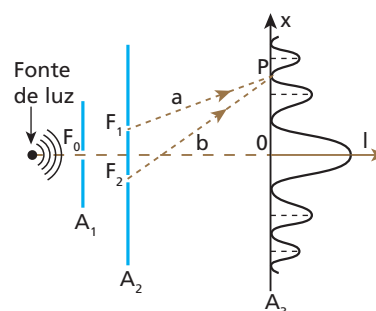
Em qual das situações a seguir está representado o fenômeno descrito no texto?

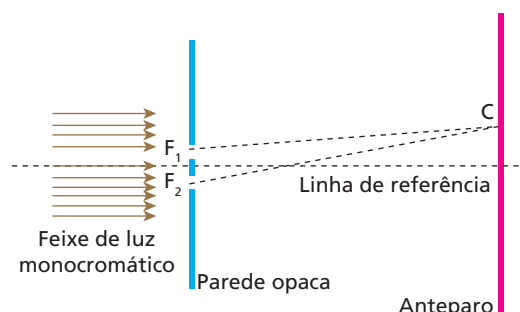
a) Ao se esconder atrás de um muro, um menino ouve a conversa de seus colegas.
b) Ao gritar diante de um desfiladeiro, uma pessoa ouve a repetição do seu próprio grito.
c) Ao encostar o ouvido no chão, um homem percebe o som de uma locomotiva antes de ouvi-lo pelo ar.
d) Ao ouvir uma ambulância se aproximando, uma pessoa percebe o som mais agudo do que quando aquela se afasta.
e) Ao emitir uma nota musical muito aguda, uma cantora de ópera faz com que uma taça de cristal se despedace.

**109.** (Olimpíada Brasileira de Física) Ondas de 6 cm de comprimento, produzidas na superfície de um tanque, propagam-se com uma velocidade de 0,06 m/s. Essas ondas encontram um anteparo com uma abertura de 3 cm. Pode-se afirmar que:

a) ocorre difração e o comprimento de onda, após a abertura, é metade do anterior;
b) ocorre difração e a frequência das ondas é sempre 1 Hz;
c) ocorre refração e a velocidade de propagação das ondas aumenta;
d) ocorre refração, embora as ondas se desloquem na mesma direção;
e) as ondas sofrem reflexão, porque a abertura é menor que o comprimento de onda.

**110.** Na montagem da experiência de Young, esquematizada abaixo, **F** é uma fonte de luz monocromática de comprimento de onda igual a $\lambda$.

Na região onde se localiza o primeiro máximo secundário, qual a diferença entre os percursos ópticos dos raios provenientes das fendas **a** e **b**?

**111.** (UFBA) Na experiência de Thomas Young, a luz monocromática difratada pelas fendas $F_1$ e $F_2$ se superpõe na região limitada pelos anteparos $A_2$ e $A_3$, produzindo o padrão de interferência mostrado na figura.

Sabendo que a luz utilizada tem frequência igual a $6{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz e se propaga com velocidade de módulo igual a $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s, determine, em unidades do Sistema Internacional, a diferença entre os percursos ópticos **a** e **b** dos raios que partem de $F_1$ e $F_2$ e atingem o ponto **P**.

**112.** (Furg-RS) A figura mostra a montagem da experiência de Young sobre o fenômento da interferência da luz. Um feixe de luz monocromático incide perpendicularmente sobre a parede opaca da esquerda, que tem duas fendas $F_1$ e $F_2$, próximas entre si. A luz, após passar pelas fendas, forma uma figura de interferência no anteparo da direita. O ponto **C** é a posição da primeira franja escura, contada a partir da franja clara central. A diferença de percurso entre as luzes provenientes das fendas é $2{,}4 \cdot 10^{-7}$ m.

| Cor | Comprimento de onda |
|---|---|
| Vermelha | $6{,}5 \cdot 10^{-7}$ m |
| Amarela | $5{,}7 \cdot 10^{-7}$ m |
| Verde | $5{,}4 \cdot 10^{-7}$ m |
| Azul | $4{,}8 \cdot 10^{-7}$ m |
| Violeta | $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ m |

De acordo com a tabela dada, identifique qual é a cor da luz do experimento.

a) Vermelha.
b) Amarela.
c) Verde.
d) Azul.
e) Violeta.

## Descubra mais

**ATENÇÃO!** Não realize este experimento: perigo de queimaduras.

**1.** Se uma porção de água for colocada (**em recipiente não metálico**) no interior de um forno de micro-ondas por alguns minutos, para aquecer, ao ser retirada, a agitação do recipiente poderá desencadear uma reação violenta, provocando uma "explosão" de massa líquida. Como você explica essa "explosão" da água? Quais são as condições para que isso ocorra? Por que o recipiente não pode ser metálico?

**2.** Nos fornos de micro-ondas antigos, não existia o prato giratório, porém, nos mais novos, encontramos esse dispositivo. Esse prato giratório é realmente necessário? Ele proporciona alguma vantagem para o usuário?

**3.** O aquecimento dos alimentos, utilizando as micro-ondas, pode fazer mal à saúde?

## Exercícios nível 3

**113.** (Cesubra-DF) Um ser humano é capaz de perceber sons que variam entre 20 Hz e 20 kHz. Ondas semelhantes, acima de 20 kHz, são chamadas de ultrassom. Na Medicina, o ultrassom, com frequências entre $1,0 \cdot 10^6$ Hz e $10 \cdot 10^6$ Hz, é utilizado para analisar órgãos internos do corpo humano. Já o olho humano é capaz de perceber ondas de frequências compreendidas entre $4,5 \cdot 10^{14}$ Hz e $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz e, imediatamente acima desta última, tem-se o ultravioleta, que, em excesso, pode provocar o aparecimento de câncer de pele. A velocidade de propagação do som nos sólidos tem valor próximo a 1 500 m/s e da luz no ar (ou vácuo), aproximadamente 300 000 km/s. Com base no texto e nos seus conhecimentos sobre o assunto, julgue os itens a seguir, classificando-os como verdadeiros ou falsos.

(1) Quando um paciente submete-se ao exame de ultrassom, seu corpo é permeado por ondas mecânicas cujos comprimentos de onda variam entre 0,15 mm e 1,5 mm.
(2) Ondas de rádio são mecânicas e suas frequências estão compreendidas entre 20 Hz e 20 kHz.
(3) Quando um olho emetrope percebe a luz solar, as células da retina (os cones e os bastonetes) sensibilizam-se, porque estão recebendo ondas cujos comprimentos estão compreendidos entre $4,0 \cdot 10^{-7}$ m e $6,6 \cdot 10^{-7}$ m, aproximadamente.
(4) Admitindo que a velocidade de propagação do som no ar seja igual a 340 m/s, um trovão que é ouvido 4 s após a visualização do relâmpago indica que o trovão e o relâmpago ocorreram a 1360 m do observador, aproximadamente.
(5) É impossível que uma onda sonora sofra interferência com uma onda luminosa.

**114.** (FMJ-SP) O telefone de latinha é uma brincadeira muito antiga. Consiste de duas latas com um furo no fundo de cada uma e um barbante longo com as extremidades presas nesses furos. Com o barbante esticado, se uma pessoa falar com a boca próxima a uma das latas, outra pessoa pode escutar colocando o ouvido próximo da outra lata.

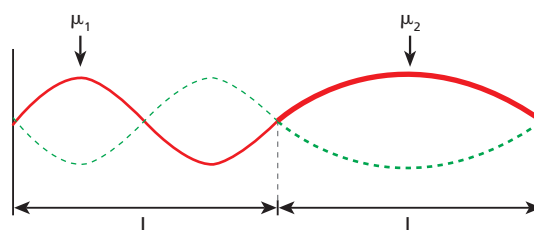
Vicente Mendonça

A respeito do observado nessa brincadeira, são feitas as seguintes afirmações:

I. O som pode se propagar pelo barbante porque se trata de uma onda mecânica.
II. O som propaga-se apenas pelo barbante e não pelo ar.
III. Quanto mais tenso o barbante estiver, mais rápido o som propaga-se por ele.
IV. Mesmo variando a tensão no barbante, não variará a frequência da onda sonora que se propaga por ele.

Está correto apenas o contido em

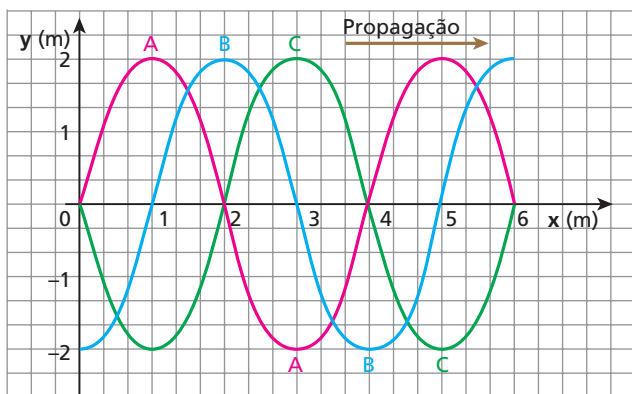
a) I, II e III.
b) I, III e IV.
c) II, III e IV.
d) I e III.
e) II e III.

**115.** (UFV-MG) Duas cordas com densidades lineares de massa $\mu_1$ e $\mu_2$ são unidas entre si formando uma única corda não homogênea. Esta corda não homogênea é esticada na posição horizontal, suas extremidades são fixadas em duas paredes e ela é colocada para oscilar, formando uma onda estacionária, conforme a figura abaixo.

Considerando que a tensão é a mesma em todos os pontos da corda não homogênea, é correto afirmar que:

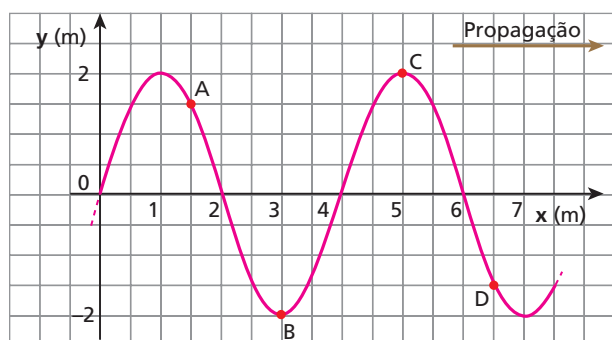
a) $2\mu_1 = \mu_2$
b) $4\mu_1 = \mu_2$
c) $\mu_1 = 2\mu_2$
d) $\mu_1 = 4\mu_2$

**116.** A figura seguinte representa três fotografias do mesmo trecho de uma corda, por onde se propaga um trem de ondas senoidais sem dissipação de energia.



TF2-P2T2_198a255_5P.indd 251 17/08/12 18:27

A primeira fotografia, identificada pela letra **A**, foi obtida no instante $t = 0$; a segunda, **B**, foi obtida no instante $t = 0{,}05$ s e a terceira, **C**, no instante $t = 0{,}10$ s. Em relação ao sistema cartesiano xOy, determine:

a) a velocidade de propagação das ondas;
b) o comprimento de onda, a frequência e o período;
c) a "equação" $y = f(x, t)$ das ondas referidas.

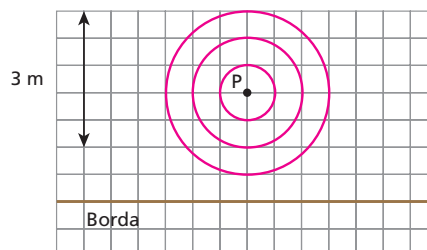
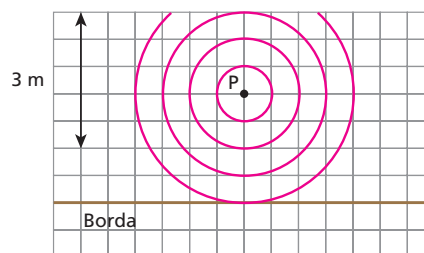
**117.** A figura representa no instante $t_0 = 0$ um trecho de uma corda elástica e não absorvedora percorrida por um trem de ondas harmônicas que se propagam para a direita, com velocidade de intensidade igual a 2 m/s.

Considerando o referencial cartesiano xOy, responda:

a) Qual a equação das ondas, $y = f(x, t)$, dada em unidades do SI?
b) Qual a defasagem, em radianos, entre os pontos **A** e **D**?
c) Os pontos **B** e **C** estão vibrando em concordância ou em oposição de fase? Justifique.

**118.** (Olimpíada Brasileira de Física) Sendo dada a expressão de uma onda sob a forma $F = A \cos (\omega t - \beta z)$, sabe-se que $\boldsymbol{\beta}$ e **v** estão relacionados por $\beta v = \omega$, em que **v** é a velocidade de propagação da onda. Sabendo que uma onda com velocidade $v = 10^6$ m/s é descrita por $y = 10 \cos (4z + \omega t)$, onde **y** e **z** são dados em metros e **t** em segundos, pede-se:

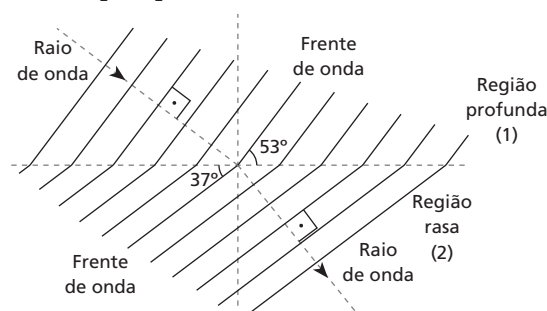
a) o comprimento de onda ($\boldsymbol{\lambda}$);
b) um esboço (gráfico) da onda em função de **z**, para $t = t_0 = 0$;
c) o cálculo da fração de comprimento de onda que ela caminha entre os instantes $t = t_0 = 0$ e $t = t_1 = 0{,}523 \cdot 10^{-6}$ s.

**Sugestão:** para obter o esboço (gráfico), considere os pontos **y** para $z = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{4}$ e $\lambda$.

**119.** (Fuvest-SP) Em um grande tanque, uma haste vertical sobe e desce continuamente sobre a superfície da água, em um ponto **P**, com frequência constante, gerando ondas, que são fotografadas em diferentes instantes. A partir dessas fotografias, podem ser construídos esquemas, onde se representam as cristas (regiões de máxima amplitude) das ondas, que correspondem a círculos concêntricos com centro em **P**. Dois desses esquemas estão apresentados a seguir, para um determinado instante $t_0 = 0$ s e para outro instante posterior, $t = 2$ s. Ao incidirem na borda do tanque, essas ondas são refletidas, voltando a se propagar pelo tanque, podendo ser visualizadas através de suas cristas.
Considerando tais esquemas:

Ondas no instante $t_0 = 0$ s

Ondas no instante $t = 2$ s

a) Estime a velocidade de propagação **v**, em m/s, das ondas produzidas na superfície da água do tanque.
b) Estime a frequência **f**, em Hz, das ondas produzidas na superfície da água do tanque.
c) Represente, em seu caderno, as cristas das ondas que seriam visualizadas em uma fotografia obtida no instante $t = 6$ s, incluindo as ondas refletidas pela borda do tanque.

**Note e adote:**
Ondas, na superfície de água, refletidas por uma borda vertical e plana propagam-se como se tivessem sua origem em uma imagem da fonte, de forma semelhante à luz refletida por um espelho.

**120.** Na situação esquematizada na figura, ondas retas, propagando-se na superfície da água de um tanque, passam de uma região profunda (1) para outra mais rasa (2). Com isso, o comprimento de onda (distância entre duas frentes de onda consecutivas) e a velocidade de propagação sofrem reduções de $p_1$% ($p_1$ por cento) e $p_2$% ($p_2$ por cento), respectivamente.

Aponte a alternativa em que os valores de $p_1$ e $p_2$ estão corretamente indicados. Adote, se necessário, sen 37° = cos 53° = 0,60; sen 53° = cos 37° = 0,80.

a) $p_1 = 75$ e $p_2 = 75$
b) $p_1 = 75$ e $p_2 = 25$
c) $p_1 = 50$ e $p_2 = 50$
d) $p_1 = 25$ e $p_2 = 75$
e) $p_1 = 25$ e $p_2 = 25$

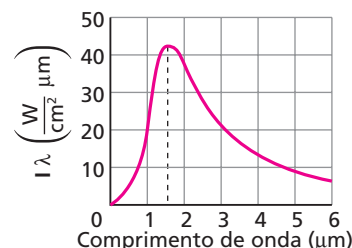
**121.** (PUC-PR) A produção de alimentos, sua conservação e distribuição são, de longa data, problemas estratégicos a serem resolvidos com a máxima urgência, pois, como se sabe, o crescimento populacional é mais acelerado do que o da disponibilidade de alimentos. A simples produção de alimentos não é tudo. Se não houver meios adequados para conservá-los e distribuí-los, o problema mundial não irá somente persistir, mas será severamente agravado. Um dos processos que vem sendo utilizado com esse propósito é a irradiação de alimentos, que é aplicada para aumentar o tempo de prateleira e destruir os microrganismos patogênicos (causadores de doenças) e deteriorantes (responsáveis pela decomposição dos alimentos). Segundo a Organização das Nações Unidas para a Agricultura e Alimentação (FAO), cerca de 25% de toda a produção mundial de alimentos se perde pela ação de microrganismos, insetos e roedores. O processo de irradiação consiste em submeter os alimentos, já embalados ou a granel, a uma quantidade controlada de radiações ionizantes. Os principais tipos de radiações ionizantes são as radiações alfa, beta, gama, raios X e nêutrons. As radiações ionizantes podem ser classificadas como partículas (ex.: radiação alfa, beta e nêutrons) e como ondas eletromagnéticas de alta frequência (radiação gama e raios X). Os tipos de radiações ionizantes utilizados no tratamento de materiais se limitam aos raios X e gama de alta energia e também elétrons acelerados. A radiação gama e os raios X são semelhantes às ondas de rádio, às micro-ondas e aos raios de luz visível. Eles formam parte do espectro eletromagnético na faixa de curto comprimento de onda e alta energia. Os raios gama e X têm as mesmas propriedades e os mesmos efeitos sobre os materiais, sendo somente diferenciados pela sua origem.

Sobre o espectro eletromagnético, indique a alternativa **correta**:

a) A velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo é de aproximadamente $3,0 \cdot 10^8$ m/s e a região dos raios X do espectro corresponde a comprimentos de onda entre $10^{-8}$ e $10^{-13}$ m. Isso significa que a frequência dessa radiação está compreendida no intervalo de 10 a $10^{-5}$ Hz.
b) As ondas sonoras, os raios X, os raios gama são todos manifestações do mesmo fenômeno de radiação eletromagnética diferenciadas pelo comprimento de onda.
c) Quando os raios gama passam do ar para o alimento, não há alteração na velocidade de propagação dessas ondas.
d) A radiação gama, os raios X e todas as demais radiações do espectro eletromagnético não precisam de um meio material para se propagar.
e) Os raios X têm frequência diretamente proporcional ao comprimento de onda quando não há alteração nas características do meio.

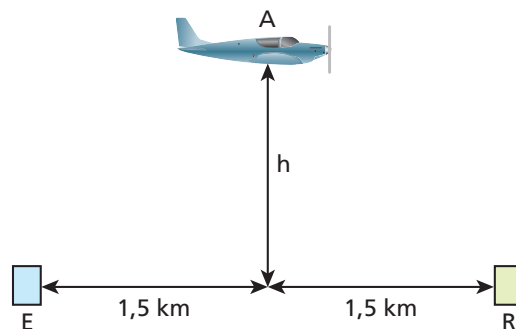
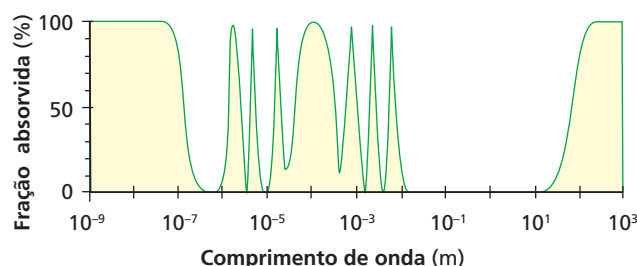
**122.** Em 1894, o físico alemão Wilhelm Wien (1864-1928) propôs que o produto entre o comprimento de onda da radiação de máxima intensidade emitida por um corpo ($\lambda_{máx}$) e sua respectiva temperatura absoluta (**T**) é aproximadamente constante, conforme a expressão:

$$\lambda_{máx}\, T \cong 3,0 \cdot 10^3\ (\mu m \cdot K)$$

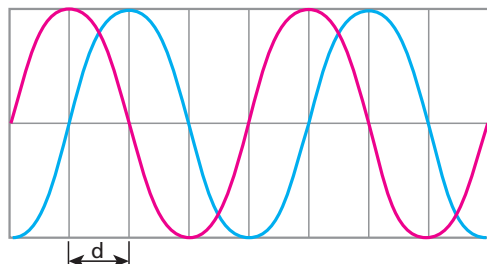
A radiação térmica proveniente de uma fornalha utilizada para fundir materiais pode ser analisada por um espectrômetro. A intensidade das radiações emitidas por essa fornalha a uma determinada temperatura foi registrada pelo equipamento em função do comprimento de onda correspondente, obtendo-se a curva espectral a seguir.

De acordo com as informações do texto e do gráfico e adotando-se para a intensidade da velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas o valor $3,0 \cdot 10^8$ m/s, pode-se afirmar que a temperatura da fornalha e a frequência da radiação de máxima intensidade emitida valem, respectivamente:

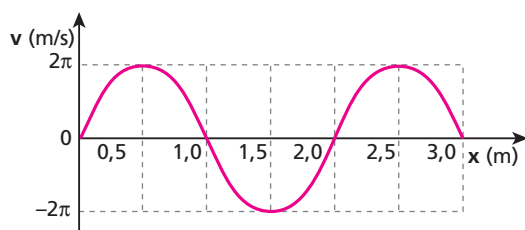
a) $3,0 \cdot 10^3$ K e $5,0 \cdot 10^{14}$ Hz.
b) $3,0 \cdot 10^3$ K e $2,0 \cdot 10^{14}$ Hz.
c) $2,0 \cdot 10^3$ K e $5,0 \cdot 10^{14}$ Hz.
d) $2,0 \cdot 10^3$ K e $2,0 \cdot 10^{14}$ Hz.
e) $5,0 \cdot 10^3$ K e $2,5 \cdot 10^{14}$ Hz.

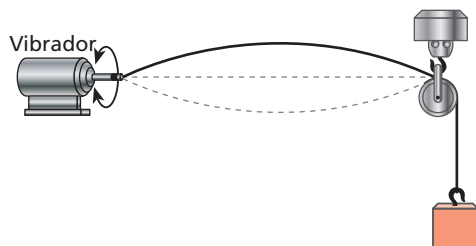
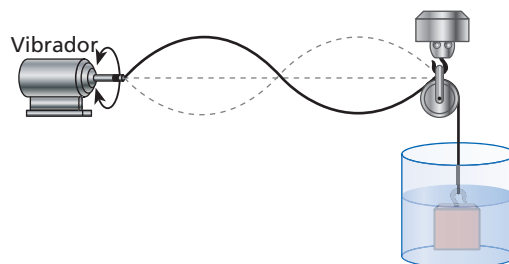
**123.** (UFC-CE) Uma estação (**E**) de rádio AM, transmitindo na frequência f = 750 kHz, está sendo sintonizada por um receptor (**R**), localizado a 3,0 km de distância. A recepção é, momentaneamente, interrompida devido a uma interferência destrutiva entre a onda que chega direto da estação e a que sofre reflexão no avião (**A**), que voa a uma altura **h**, a meio caminho entre a estação e o receptor (veja figura abaixo). Determine o menor valor possível de **h**. A velocidade da luz no ar é $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s.

**Obs.:** a onda refletida sofre uma inversão de fase.

**124.** (Unicamp-SP) O sistema GPS (*Global Positioning System*) consiste em um conjunto de satélites em órbita em torno da Terra que transmitem sinais eletromagnéticos para receptores na superfície terrestre. A velocidade de propagação dos sinais é de 300000 km/s. Para que o sistema funcione bem, a absorção atmosférica desse sinal eletromagnético deve ser pequena. A figura a seguir mostra a porcentagem de radiação eletromagnética absorvida pela atmosfera em função do comprimento de onda.

a) A frequência do sinal GPS é igual a 1 500 MHz. Qual o comprimento de onda correspondente? Qual a porcentagem de absorção do sinal pela atmosfera?
b) Uma das aplicações mais importantes do sistema GPS é a determinação da posição de um receptor na Terra. Essa determinação é feita por meio da medida do tempo que o sinal leva para ir do satélite até o receptor. Qual é a variação $\Delta t$ na medida do tempo feita pelo receptor que corresponde a uma variação na distância satélite-receptor de $\Delta x = 100$ m? Considere que a trajetória do sinal seja retilínea.

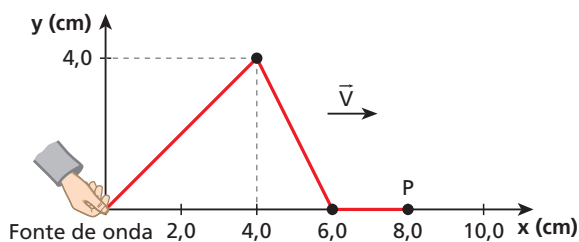
## Para raciocinar um pouco mais

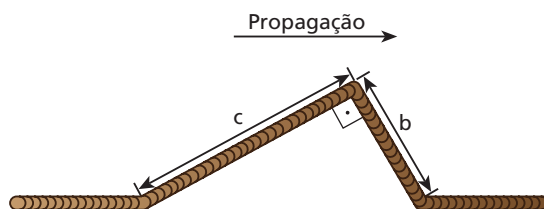
**125.** A figura mostra uma onda progressiva em dois instantes de tempo: $t_1 = 1{,}0$ s (—) e $t_2 = 9{,}0$ s (—). Se a distância indicada for $d = 2{,}0$ m, o período (em segundos) da onda não poderá ser igual a:

a) 32. b) 16. c) 6,4. d) 3,5. e) 2,5.

**126.** Considere uma onda senoidal propagando-se com velocidade igual a 4,0 m/s ao longo de uma corda elástica coincidente com um eixo de referência Ox. O gráfico mostra, em determinado instante, os valores algébricos das velocidades transversais de alguns pontos da corda, compreendidos entre as posições $x_0 = 0$ e $x_1 = 3{,}0$ m.

a) Determine a frequência e a amplitude da onda.
b) No instante considerado, qual será o perfil da corda compreendido entre as posições $x_0 = 0$ e $x_1 = 3{,}0$ m?
c) Calcule, no instante considerado, o valor algébrico da aceleração do ponto da corda situado na posição $x = 2{,}0$ m.

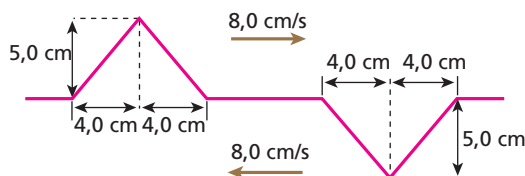
**127.** O experimento esquematizado a seguir tem a finalidade de determinar a densidade de um bloco maciço, feito de um material homogêneo, em relação a um determinado líquido. Fazem parte do aparato utilizado: um vibrador que opera em frequência constante, um fio flexível e inextensível, uma polia fixa isenta de atritos, o bloco citado e o líquido, contido num recipiente.
Num primeiro procedimento, o vibrador impõe ao trecho horizontal do fio uma onda estacionária constituída de dois nós e um ventre (modo fundamental de vibração)

Numa outra etapa, com o bloco totalmente imerso no líquido, o vibrador impõe ao trecho horizontal do fio uma onda estacionária constituída de três nós e dois ventres.

A densidade do bloco em relação ao líquido é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) 2 e) $\frac{5}{2}$

**128.** Um pulso triangular produzido na extremidade de uma corda tensa está na posição mostrada na figura 1,5 s após o início do movimento da fonte de onda indicada. A velocidade do ponto **P** ($x = 8{,}0$ cm), marcado no esquema, no instante 3,0 s é:

a) 2,0 cm/s para cima.
b) 2,0 cm/s para baixo.
c) 4,0 cm/s para cima.
d) 4,0 cm/s para baixo.
e) 5,0 cm/s para baixo.

**129.** (CEPERJ) Um pulso triangular, com a forma de um triângulo retângulo, está-se propagando numa corda, para a direita, como mostra a figura abaixo.

O tempo gasto por um ponto qualquer da corda para ir de sua posição normal ao topo do pulso é **t**; já para voltar do topo à sua posição normal, é **t'**. Sendo **b** e **c** os comprimentos dos catetos menor e maior, respectivamente, do pulso triangular, a razão $\frac{t'}{t}$ é igual a:

a) $\frac{c}{b}$
b) $\frac{c^2}{b^2}$
c) $\frac{c^2}{c^2 + b^2}$
d) $\frac{b^2}{c^2 + b^2}$
e) $\frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2}$

**130.** Dois pulsos triangulares, de mesma largura e amplitude, propagam-se em oposição de fase ao longo de uma corda elástica, não dispersiva e de densidade linear igual a 10 g/cm.

Suas velocidades são opostas, apresentando módulo de 8,0 cm/s. Sabendo que cada pulso transporta uma energia potencial elástica de $4,0 \cdot 10^{-4}$ J, calcule:

a) a energia cinética transportada por pulso antes de eles estarem superpostos;

b) a energia cinética total associada ao sistema no instante em que os pulsos estiverem perfeitamente superpostos.

**131.** A telefonia móvel foi introduzida no Brasil em 1972, utilizando um sistema anterior à tecnologia celular. Era um sistema rudimentar para os padrões atuais, com baixa capacidade, utilizando a tecnologia IMTS, sigla em inglês para *Improved Mobile Telephone System*, instalado em Brasília, com apenas 150 terminais.

Hoje, passadas quase quatro décadas, as redes de telefonia celular abrangem praticamente todo o território nacional, com mais de 185 milhões de linhas habilitadas (dado de agosto de 2010), que se valem das tecnologias 2G, 3G e da emergente 4G, que emprega a quarta geração de telefones celulares.

Considere um carro trafegando ao longo de uma rodovia retilínea situada numa região em que há uma única antena transmissora/receptora de sinais de telefonia celular. Suponha que essa antena esteja localizada junto à posição x = 0 de um eixo de abscissas Ox coincidente com o eixo longitudinal da pista. Admita ainda que os sinais da antena sejam constituídos de ondas eletromagnéticas esféricas, centradas na extremidade da antena, e que essas ondas se propaguem sem dissipação de energia.

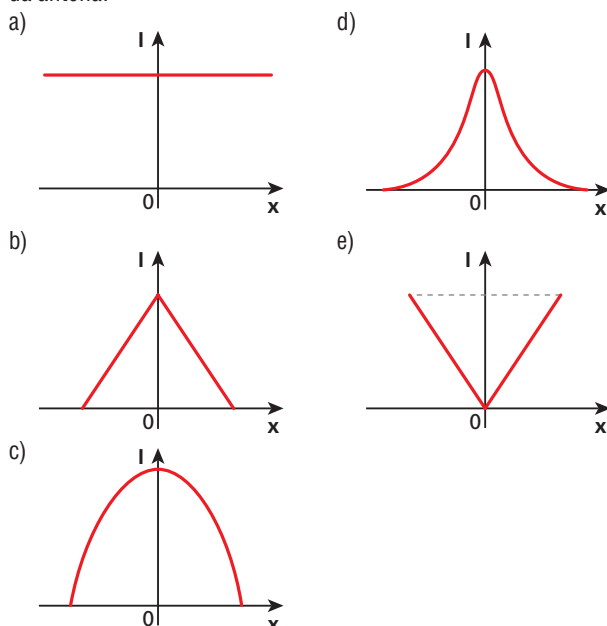
O motorista do carro tem um telefone celular que irá "perceber" a presença da antena. Sendo **I** a intensidade do sinal captado pelo aparelho, aponte o gráfico que mais bem representa a variação de **I** em função da posição **x** do veículo durante sua passagem diante da antena.

a) 


d)

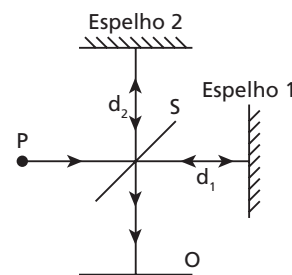
b)

e)

c)

**132.** Uma emissora de rádio AM opera com frequência de 600 kHz e sua antena transmissora está distante 180 km de um determinado aparelho receptor. Entre a antena e o receptor o solo é praticamente plano e horizontal e não existem barreiras prejudicando a propagação das ondas de telecomunicações, que, no local, têm velocidade de intensidade $3,0 \cdot 10^8$ m/s. O sinal que atinge o receptor chega por dois caminhos: o direto e o via reflexão na ionosfera, admitida paralela à superfície terrestre e situada, num instante $t_0 = 0$, a 120 km de altitude. Nesse instante, o receptor recebe um sinal resultante reforçado como consequência da interferência construtiva ocorrida entre os dois sinais que o atingem. Em seguida, o sinal captado torna-se mais fraco, voltando, pela primeira vez, a apresentar-se intensificado como antes no instante t = 2,6 min. Isso pode ser explicado pelo fato de a ionosfera ter-se aproximado do solo com uma velocidade escalar média do módulo **v**.

a) Calcule o comprimento de onda **λ** das ondas irradiadas pela emissora.

b) Determine o valor de **v**.

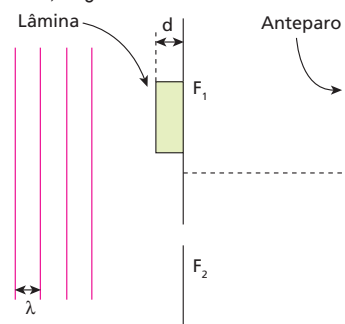
**133.** (Unicamp) Pode-se detectar a deflexão de uma haste usando-se o interferômetro ilustrado na figura ao lado. Nele, um feixe de luz de comprimento de onda **λ** parte do ponto **P** e é dividido em dois pelo espelho semitransparente **S**. A partir desse ponto, os feixes percorrem caminhos ópticos diferentes, antes de atingirem o anteparo **O**.

Há interferência construtiva no anteparo quando os feixes percorrem distâncias que diferem entre si de Δd = n λ, onde **n** é um número inteiro. Caso as distâncias percorridas difiram de $\Delta d = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$, a interferência é destrutiva. Considere que na situação descrita na figura há interferência construtiva para luz com frequência $f = 5,0 \cdot 10^{14}$ Hz.

Sabendo que a velocidade da luz é $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s, a menor distância que o espelho 2 deve ser deslocado para que ocorra interferência destrutiva é de:

a) 50 nm. b) 150 nm. c) 300 nm. d) 600 nm.

**134.** (ITA-SP) Num experimento de duas fendas de Young, com luz monocromática de comprimento de onda **λ**, coloca-se uma lâmina delgada de vidro ($n_v = 1,6$) sobre uma das fendas.

Isso produz um deslocamento das franjas na figura de interferência. Considere que o efeito da lâmina é alterar a fase da onda. Nessas circunstâncias, pode-se afirmar que a espessura **d** da lâmina, que provoca o deslocamento da franja central brilhante (ordem zero) para a posição que era ocupada pela franja brilhante de primeira ordem, é igual a:

a) 0,38 λ. b) 0,60 λ. c) λ. d) 1,2 λ. e) 1,7 λ.

# Tópico 3

# Acústica

## Bloco 1

### 1. Introdução

Prosseguindo em nossos estudos de Ondulatória, abordaremos agora outro assunto de grande importância prática: a Acústica.

Em Acústica, estudamos as fontes das ondas sonoras e os fenômenos ondulatórios que podem ocorrer durante a propagação dessas ondas.

Entre as **fontes sonoras**, além do nosso aparelho fonador, merecem destaque as cordas, as colunas de ar e as membranas vibrantes, principalmente pelo uso delas na maioria dos instrumentos musicais.

Fazendo uma fonte sonora vibrar, ela também faz vibrar o meio em que se encontra, em geral o ar; assim acontece a emissão do som.

Quando fazemos uma corda de um instrumento vibrar, ela o faz simultaneamente em diversas frequências. Então, o som que ela emite também é composto de diversas frequências: cada uma é denominada um **harmônico** do som emitido.

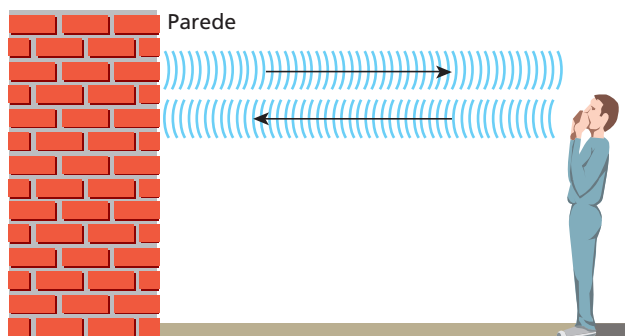
Thinkstock/Getty Images

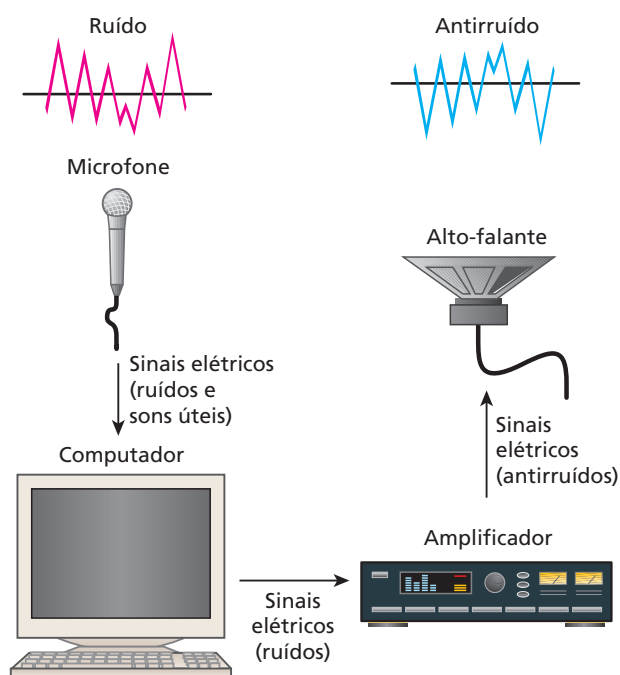
Nos instrumentos de sopro, o som produzido na embocadura é constituído de muitas frequências diferentes, mas só os sons de determinadas frequências entram em ressonância com uma coluna de ar. Assim, os sons que têm essas frequências se reforçam, e cada uma delas também é um dos vários harmônicos do som emitido.

David Muir/Masterfile/Other Images

Opção Brasil Imagens

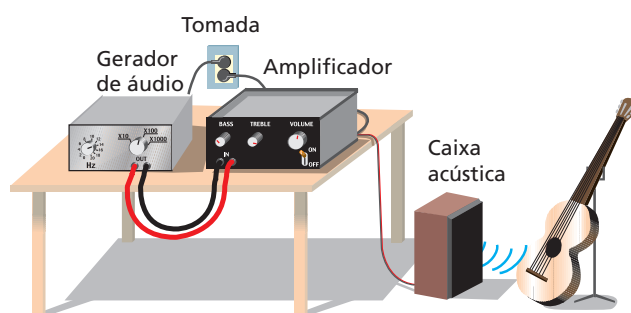
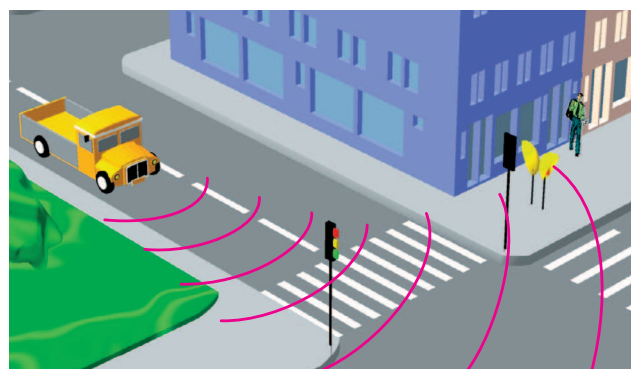
O som emitido por membranas vibrantes também é composto de diversos harmônicos.

Entre os fenômenos ondulatórios que podem ocorrer com o som, destacam-se a reflexão, a refração, a interferência, a ressonância, a difração e o efeito Doppler.

Se a pessoa estiver suficientemente afastada do paredão e emitir um som forte, o som **refletirá** na parede e retornará a ela, que poderá perceber, então, o fenômeno do eco.

A **interferência** de ondas sonoras vem sendo usada cada vez mais para reduzir o nível de ruído de ambientes. Basicamente, o processo é o seguinte: um microfone capta os sons úteis e os ruídos produzidos em determinado ambiente e gera sinais elétricos correspondentes aos sons e aos ruídos.

Esses sinais são levados a um computador, que os analisa, separando aqueles que correspondem aos ruídos e enviando-os a um amplificador. O amplificador, por sua vez, inverte a fase dos sinais recebidos e os amplifica. Os sinais invertidos e amplificados são levados a um alto-falante, que então emite os antirruídos no ambiente. A interferência dos ruídos com os antirruídos acarreta um significativo cancelamento dos ruídos.

Esse recurso é bastante útil em cabines de aviões, em automóveis e em ventiladores, por exemplo.

Veja mais exemplos de fenômenos relacionados ao som:

- Quando se aumenta a frequência do sinal produzido pelo gerador de áudio a partir de zero, observa-se que, para diversas frequências, as cordas do violão começam a vibrar sem que ninguém as tenha tocado. Isso acontece porque, para diversas frequências, as cordas entram em **ressonância** com o som produzido.

- Embora a pessoa não veja o veículo, ela ouve o ruído produzido por ele, pois o ruído "dobra a esquina" devido à **difração** do som.

- Quando o carro se aproxima e depois se afasta, a plateia ouve seus ruídos, respectivamente mais agudos e mais graves do que se o veículo estivesse parado. Isso é um exemplo da ocorrência do **efeito Doppler**, que também pode ser percebido quando assistimos a uma corrida pela televisão.

Rogerio Reis/Pulsar Imagens

## 2. O som e sua propagação

Agora veremos como são geradas as ondas sonoras e como se dá sua propagação.

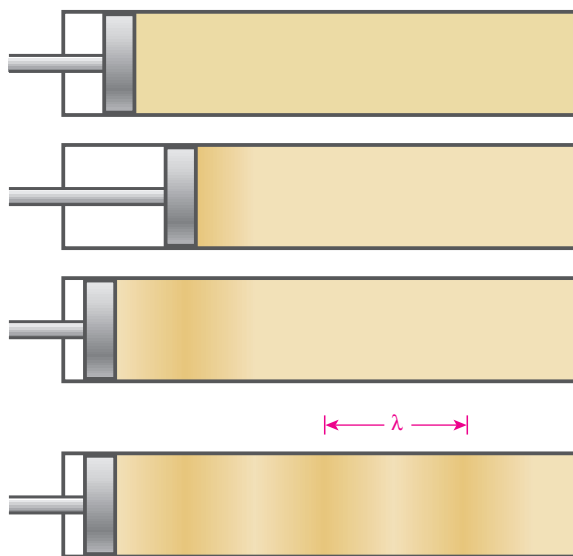
O som é uma propagação de vibrações longitudinais através de meios materiais, compreendendo compressões e rarefações que se propagam. Nas compressões, a pressão é mais elevada do que seria caso não houvesse ondas (meio em equilíbrio). Nas rarefações, a pressão é mais baixa que no equilíbrio.

Essas compressões e rarefações propagam-se de maneira análoga às ondas longitudinais em molas, assunto visto no tópico anterior. É importante destacar, porém, que em geral as ondas sonoras propagam-se em três dimensões pelo espaço. São, portanto, ondas tridimensionais.

Como modelo de produção e propagação de ondas sonoras, podemos pensar em um êmbolo que gera compressões e rarefações no ar do interior de um cilindro, como ilustra a figura a seguir.

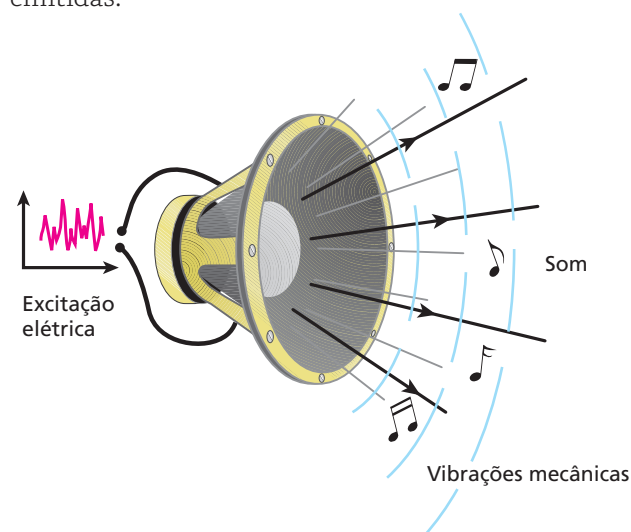
Suponhamos que o êmbolo seja posto a oscilar periodicamente. Quando se desloca para a direita, ele gera uma compressão no ar interno ao cilindro. Essa compressão, então, propaga-se.

Em seguida, o êmbolo volta à posição inicial. Durante essa volta, gera uma rarefação que também se propaga.

Logo após, mais uma compressão é produzida, depois outra rarefação e assim por diante.

Como a onda gerada é periódica, continua válida a expressão $v = \lambda f$, em que **v** é a velocidade de propagação da onda, $\boldsymbol{\lambda}$ é seu comprimento de onda e **f** é sua frequência.

Um ponto qualquer atingido por essas compressões e rarefações oscila na mesma direção da propagação. Por isso, as ondas sonoras são longitudinais.

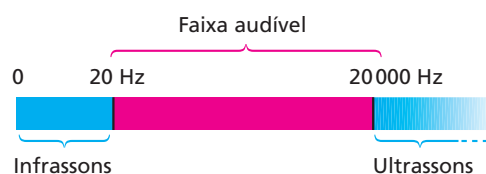
Quando a onda passa, ela não arrasta a partícula de ar. O que ocorre é que a partícula de ar vibra em torno de sua posição de equilíbrio.

O alto-falante é um exemplo interessante de fonte sonora. Nesse dispositivo, um diafragma (cone) é posto a vibrar e produz compressões e rarefações que se propagam, constituindo as ondas sonoras emitidas:

**Nota:**

- Para simplificar a linguagem, toda vez que nos referirmos ao módulo da velocidade do som diremos simplesmente **velocidade do som**.

## 3. Considerações gerais sobre o som

### Vibrações mecânicas audíveis

O **som** é uma onda mecânica que, ao atingir nossa orelha, causa a sensação da audição. Para que a sensação sonora seja percebida, é necessário que a frequência dessas ondas mecânicas esteja dentro de certa faixa de valores. A faixa, por sua vez, depende do ouvinte e varia conforme a idade. De modo geral, são audíveis as ondas mecânicas com frequências compreendidas entre 20 Hz e 20 000 Hz. Apesar disso, também são chamadas de vibrações acústicas as vibrações mecânicas cujas frequências estão acima (ultrassons) ou abaixo (infrassons) desses limites.

Os sons agradáveis ou musicais são aqueles constituídos de vibrações periódicas. Nos demais casos, o som é chamado de ruído.

### Altura de um som

A **altura** de um som é a sensação de grave ou agudo que ele provoca. Costuma-se dizer que um som de frequência $f_1$ é mais alto (ou mais agudo) que outro de frequência $f_2$ se $f_1$ é maior que $f_2$; e mais baixo (ou mais grave) se $f_1$ é menor que $f_2$.

Não se deve confundir alto e baixo com forte e fraco – estes últimos estão relacionados com a **intensidade** do som, que estudaremos adiante.

Pense, por exemplo, nos sons produzidos por um boi mugindo e por um gato miando. O som emitido pelo boi é mais baixo (mais grave, de menor frequência) que o emitido pelo gato, embora o som do boi normalmente seja muito mais forte (mais intenso) que o do felino.

Numa caixa acústica, como na fotografia a seguir, é comum haver três tipos de alto-falantes: o *woofer*, que é o maior e reproduz uma faixa de frequências baixas (sons mais graves); o *tweeter*, que é o menor e reproduz uma faixa de frequências altas (sons mais agudos); e o *mid range*, que reproduz uma faixa de frequências intermediárias. Os sinais elétricos provenientes do amplificador contêm as três faixas, que passam por um circuito denominado divisor de frequências. Ele separa as três faixas e as distribui aos alto-falantes adequados.

Thinkstock/Getty Images

### Ondas sonoras: longitudinais ou mistas

São as propriedades elásticas dos meios materiais que determinam se é possível haver propagação de ondas mecânicas transversais e longitudinais através deles.

As ondas mecânicas longitudinais serão possíveis sempre que surgirem forças elásticas do meio opondo-se às compressões nele provocadas. Isso pode ocorrer tanto com meios no estado gasoso quanto com meios no estado líquido ou sólido.

Suponha agora que uma camada do meio seja deslocada paralelamente a outra camada vizinha e que surjam, então, forças elásticas tentando fazer com que a camada deslocada retorne a sua posição original. Com isso, as ondas transversais serão possíveis nesse meio. Isso só pode ocorrer em meios materiais sólidos – com exceção da componente transversal das ondas nas superfícies líquidas.

Como vimos, as ondas sonoras são longitudinais. A rigor, isso é correto nos meios materiais gasosos e líquidos. Nos meios sólidos, entretanto, as ondas sonoras podem ter, ainda, uma componente transversal, além da longitudinal. Essa componente longitudinal propaga-se mais velozmente que a transversal (quando temos ondas mecânicas propagando-se num mesmo meio, as vibrações longitudinais são sempre mais velozes que as transversais).

Em termos de audição, essa componente transversal não tem nenhum interesse, pois as vibrações sonoras que chegam ao tímpano precisam atravessar o ar, sendo, por isso, exclusivamente longitudinais.

## 4. Intervalo acústico entre dois sons

O intervalo acústico entre dois sons de frequências $f_1$ e $f_2$ é o quociente dessas frequências:

$$i = \frac{f_2}{f_1} \qquad (f_2 > f_1)$$

Como $f_1$ e $f_2$ são medidas na mesma unidade (o hertz, no SI), o intervalo acústico **i** é uma grandeza adimensional, isto é, um simples número.

Se $f_2$ for o dobro de $f_1$, por exemplo, teremos $i = 2$; dizemos, nesse caso, que o intervalo entre os dois sons é de uma **oitava**.

| Intervalo acústico | Razão de frequência |
|---|---|
| Uníssono | 1:1 |
| Oitava | 2:1 |
| Quinta | 3:2 |
| Quarta | 4:3 |
| Terça maior | 5:4 |
| Terça menor | 6:5 |
| Sexta maior | 5:3 |
| Sexta menor | 8:5 |
| Tom maior (**M**) | 9:8 |
| Tom menor (**m**) | 10:9 |
| Semitom (**s**) | 16:15 |

# Leitura

## Som estereofônico

As vibrações produzidas pelos sons que um microfone recebe são convertidas em pequenos sinais elétricos, que são depois amplificados.

KMazur/WireImage/Getty Images

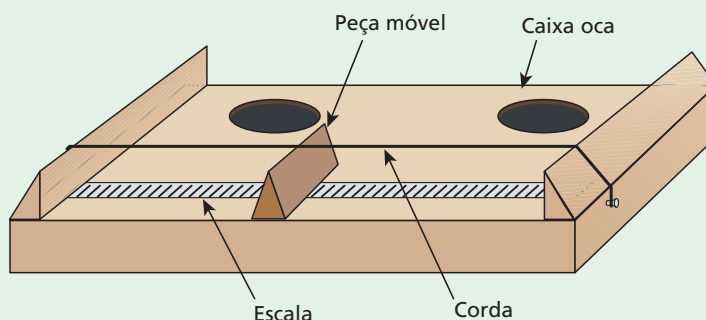
Uma gravação estereofônica é feita com dois microfones que captam sons em locais diferentes. Na figura ao lado, o artista Kid Rock (esquerda) canta mais perto do microfone esquerdo (**E**), enquanto o artista Stevie Wonder (direita) canta e toca mais perto do direito (**D**).

Vamos admitir que os sons captados pelos microfones **E** e **D** serão gravados em uma fita, em gravação estereofônica. Nesse tipo de gravação, os sons são registrados em duas regiões da fita (canais). Em um dos canais, ficará gravado mais intensamente o som de Kid Rock; no outro, o som de Stevie Wonder.

Na reprodução, em aparelho também estereofônico, o som de um aparecerá mais intensamente em um dos alto-falantes, enquanto o de outro aparecerá mais intensamente no outro alto-falante. Assim, ao ouvir a gravação, teremos a percepção das posições dos artistas cantando e tocando.

## Os intervalos acústicos e os matemáticos gregos

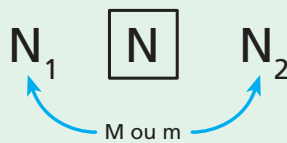
A partir do século VI a.C., os matemáticos gregos, discípulos de Pitágoras, observaram que dois sons provocam uma sensação agradável quando a razão entre suas frequências é "simples", isto é, formada de números inteiros e pequenos, como $\frac{3}{4}$, por exemplo. Entretanto, se essa razão for "complexa", como $\frac{137}{171}$, por exemplo, a sensação será desagradável.

Diversos intervalos acústicos foram definidos com o uso de um instrumento conhecido por monocórdio, que tinha, em sua versão mais simples, uma única corda (de tripa) esticada sobre uma caixa oca dotada de aberturas. Uma peça móvel, comprimida pela corda, podia deslizar sobre uma escala graduada construída sobre a caixa, dividindo a corda em duas partes.

Representação esquemática do monocórdio.

Quando a corda era tangida sem a presença da peça móvel, produzia-se determinado som. Colocando-se essa peça no meio da corda, cada metade dela emitia um som uma **oitava** acima do primeiro. Quando a peça dividia a corda na razão três para dois, os sons emitidos pelas duas partes determinavam o intervalo acústico de uma **quinta**. Do mesmo modo, o monocórdio era usado para observar outros intervalos acústicos.

## Escalas musicais

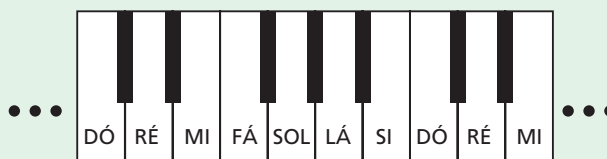
Escala musical é uma sequência de notas musicais dispostas em ordem crescente de frequências convencionais, havendo entre elas intervalos acústicos bem definidos. Chama-se **gama** o conjunto de notas dentro de uma oitava. A gama representada no pentagrama ao lado é denominada **escala natural**. Nessa escala, as gamas se sucedem, mantendo-se as denominações das notas e a sequência de intervalos.

O tom maior e o tom menor são intervalos aproximadamente iguais, porém maiores que o semitom. Assim, na escala natural, entre duas notas $N_1$ e $N_2$, separadas por um tom maior ou menor, pode-se intercalar outra nota **N**:

Representação de escala musical natural.

A frequência dessa nota **N** é igual à frequência da nota $N_1$ multiplicada por $\frac{25}{24}$ e é denominada **sustenido** de $N_1$ (símbolo $N_1{}^{\#}$) ou **bemol** de $N_2$ ($N_{2b}$).

Assim, obtemos uma gama constituída de treze notas, que são:

| | DÓ # | | RÉ # | | | FÁ # | | SOL # | | LÁ # | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DÓ | **ou** | RÉ | **ou** | MI | FÁ | **ou** | SOL | **ou** | LÁ | **ou** | SI | DÓ |
| | $RÉ_b$ | | $MI_b$ | | | $SOL_b$ | | $LÁ_b$ | | $SI_b$ | | |

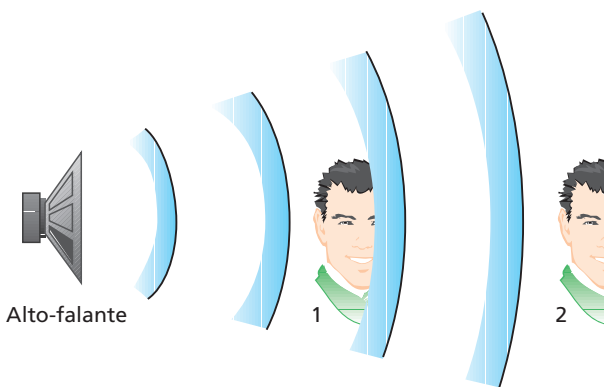
Como essas treze notas estão separadas por intervalos **quase** iguais, foi conveniente a criação de outra escala, denominada **escala temperada**, em que cada gama é constituída de treze notas separadas por doze intervalos realmente iguais. É a escala temperada que se usa, por exemplo, nos pianos e órgãos. Nessa escala, o intervalo entre duas notas consecutivas é igual a $\sqrt[12]{2}$ ($\sqrt[12]{2} \cong 1,05946$). Representamos, a seguir, uma gama de escala temperada:

Num piano ou teclado, as teclas pretas correspondem às notas intermediárias da escala.

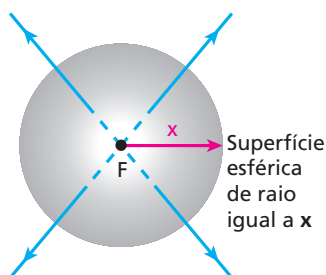
## 5. Intensidade sonora

Por ser uma propagação ondulatória, o som é um processo de transporte de energia (no caso, mecânica).

Para garantir uma boa qualidade de audição, é importante, para um ouvinte, a quantidade de energia sonora que o atinge por unidade de área e por unidade de tempo. Por isso, definimos mais uma grandeza – a **intensidade sonora**:

A **intensidade sonora** é a quantidade de energia sonora que atravessa a unidade de área de uma superfície disposta perpendicularmente à direção de propagação, na unidade de tempo. Em outras palavras, é a potência sonora recebida por unidade de área da superfície. No SI, a unidade de medida da intensidade sonora é $\frac{J}{m^2 s}$ ou $\frac{W}{m^2}$.

Observe o esquema a seguir, em que 1 e 2 são duas posições que uma pessoa pode escolher para ouvir o som emitido por um alto-falante.

Suponha que a onda sonora se propague sem dissipação de energia. Assim, à medida que essa propagação ocorre, a **mesma** potência emitida pelo alto-falante se "dilui" cada vez mais, pois fica espalhada numa superfície cada vez maior. Então, o canal auditivo de uma pessoa (que podemos considerar tendo uma unidade de área) recebe mais energia por unidade de tempo na posição 1 que na posição 2. Isso significa que a intensidade sonora é maior em 1 que em 2.

Observe a figura ao lado, em que uma fonte sonora **F**, considerada puntiforme, está emitindo som num meio homogêneo em que a velocidade de propagação da onda é a mesma em todas as direções (meio acusticamente isótropo ou isotrópico).

A superfície esférica de raio igual a **x** e centro na fonte sonora é uma superfície perpendicular às direções de propagação do som. Supondo que a energia emitida pela fonte não seja absorvida pelo meio de propagação (caso ideal), a potência sonora da fonte será totalmente recebida na superfície esférica considerada. Simbolizando por **Pot** a potência da fonte e por **A** a área da superfície esférica ($A = 4\pi x^2$), temos:

$$I = \frac{Pot}{A} \Rightarrow I = \frac{Pot}{4\pi x^2},$$

em que **I** é a intensidade do som.

Note que, nessa expressão, se desprezarmos a absorção do meio, a intensidade de uma onda sonora esférica será inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte. Assim, se a intensidade do som é **I** a uma distância **d** da fonte sonora, ela será $\frac{I}{4}$ a uma distância 2d.

Para finalizar, é importante salientar que a intensidade da onda sonora é, para uma dada frequência e um dado meio, proporcional ao quadrado da **amplitude**. Assim, a uma distância maior da fonte, a intensidade a amplitude da onda são menores.

**Nota:**

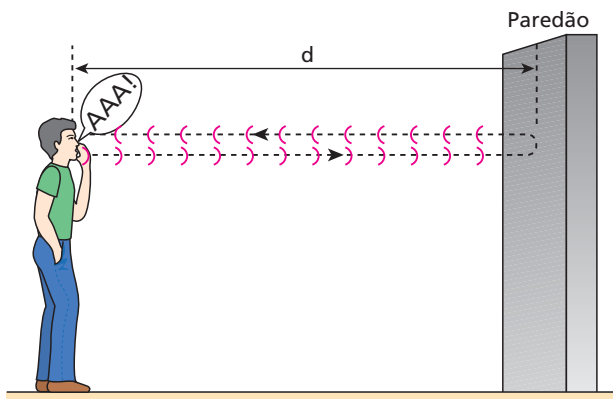
- A intensidade das ondas eletromagnéticas esféricas também obedece às considerações feitas para as ondas sonoras esféricas.

## 6. Reflexão do som

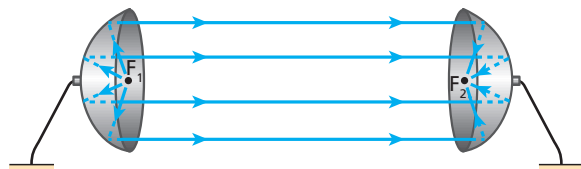
Quando as ondas sonoras atingem um obstáculo fixo, como uma parede, elas sofrem reflexão com inversão de fase.

Como acontece com qualquer onda, o som refletido também tem a mesma velocidade de propagação (em módulo), a mesma frequência e o mesmo comprimento de onda que o som incidente.

A reflexão do som envolve os fenômenos do **eco** e da **reverberação**.

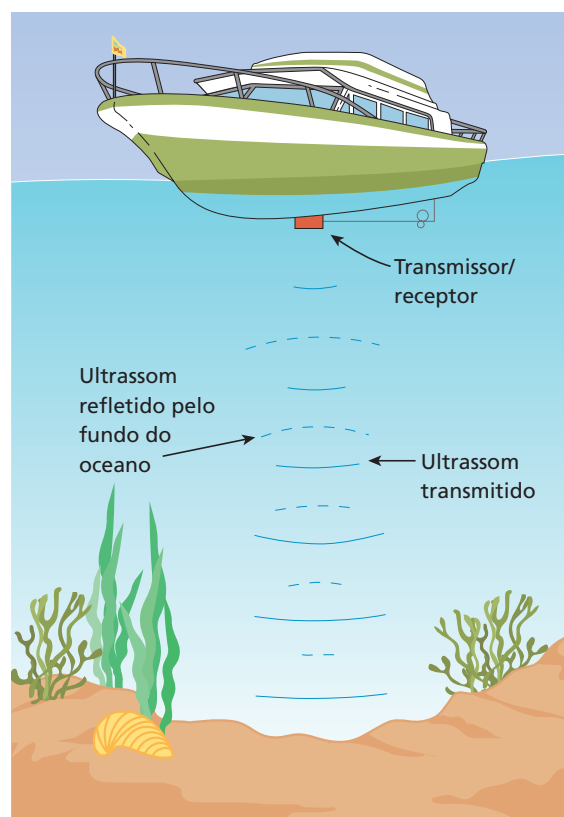
Quando recebemos um som, a sensação sonora causada por ele persiste em nós por aproximadamente um décimo de segundo (0,1 s). A esse intervalo de tempo dá-se o nome de **persistência acústica**. Se uma pessoa emite um som que atinge um paredão e reflete, ela ouve dois sons: o **som direto**, no momento em que ele é emitido, e, algum tempo depois, o **som refletido** pelo paredão.

Sendo **v** o módulo da velocidade de propagação do som no ar, o som refletido chegará à pessoa após um intervalo de tempo $\Delta t$, tal que:

$$v = \frac{2d}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2d}{v}$$

Se esse intervalo de tempo for inferior a 0,1 s, o som refletido chegará à pessoa quando ela ainda estiver com a sensação do som direto. A pessoa perceberá, então, um prolongamento do som direto, que é denominado **reverberação**. Entretanto, se o intervalo de tempo for superior a 0,1 s, o som refletido chegará depois de cessada a sensação do som direto. Assim, o som refletido será percebido separado do som direto, fenômeno que recebe o nome de **eco**.

A ilustração representa dois bons refletores de som parabólicos, com cerca de 2 m de diâmetro cada um. Se uma pessoa falar naturalmente nas proximidades do foco $F_1$, outra pessoa no foco $F_2$ a ouvirá perfeitamente, mesmo que a distância entre os paraboloides seja grande, como 50 m, por exemplo.

## Sonar e radar

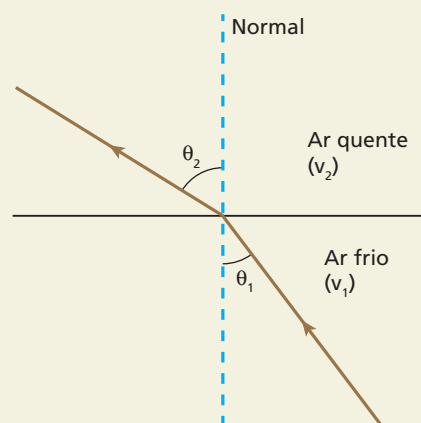
O sonar instalado num barco emite ultrassom dirigido para o fundo do mar. O ultrassom refletido é recebido pelo sonar, que determina a que distância dele está o corpo refletor, a partir do tempo de ida e volta do sinal. Assim, o sonar permite determinar a profundidade do mar e localizar objetos, submarinos e cardumes, por exemplo.

O radar também usa esse princípio, mas opera com ondas eletromagnéticas.

Representação de barco equipado com sonar.

## Refração do som

Como você verá no Bloco 4 deste Tópico, a velocidade do som no ar quente é maior do que no ar frio. Por isso, um raio de onda sonora que se propaga no ar frio afasta-se da normal quando se refrata ao incidir obliquamente no ar quente, como está representado no modelo ao lado:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Como $v_2 > v_1 : \theta_2 > \theta_1$.

A figura a seguir representa uma fonte sonora nas proximidades da superfície de um lago congelado, onde o ar está muito frio. Dessa região para cima, a temperatura aumenta. Se imaginarmos que o ar, acima do lago, é constituído de finas camadas a temperaturas crescentes conforme a altitude, o raio de onda sonora representado parte da fonte e vai se afastando da normal, retornando à superfície. Na superfície, o raio se reflete e o processo continua.

É por esse motivo que as ondas sonoras podem percorrer grandes distâncias nas proximidades da superfície de um lago congelado.

É muito importante lembrar que, como acontece com qualquer onda, a **frequência** do som também **não se altera** na refração.

# Leitura

## Ecolocalização

Um dos mitos mais comuns a respeito dos morcegos é o de que esses mamíferos voadores são cegos. Na verdade, não são. Eles têm olhos funcionais, como a maioria dos mamíferos, e algumas espécies enxergam relativamente bem.

No entanto, de que adianta ter órgãos visuais em condições de enxergar se não houver luz? É como estar dentro de uma caverna, na escuridão total, sem uma lanterna.

Kim Taylor/Nature PL/Diomedia

Assim, para os morcegos, animais de hábitos noturnos que frequentemente visitam ambientes na mais completa escuridão, a visão não é muito importante. Para eles, é muito mais eficiente o uso de um sistema de emissão e recepção de sinais ultrassônicos, conhecido por **ecolocalização**.

A partir do eco desses sinais, após reflexão em qualquer obstáculo, como construções, árvores, insetos (mesmo pequenos), fios elétricos etc., os morcegos conseguem se localizar. Para os humanos, seria como atravessar rapidamente um salão escuro e mobiliado sem bater em nada, utilizando apenas as reflexões da própria voz.

Golfinhos, baleias e algumas espécies de esquilos e pássaros também usam a ecolocalização, mas nos morcegos e nos golfinhos ela é bem mais sofisticada.

Contudo, nem todos os morcegos a utilizam. Esse sistema de orientação é encontrado em todas as espécies da subordem Microchiroptera (cerca de 850), um dos dois grandes grupos em que se dividem os morcegos. Na outra subordem, Megachiroptera, que reúne em torno de 150 espécies da África, da Ásia e da Oceania, apenas uma (*Rousettus aegyptiacus*) comprovadamente usa a ecolocalização – os demais megaquirópteros dependem principalmente da visão.

Para as espécies que se servem da ecolocalização, diferenças na duração e na intensidade entre o sinal emitido e seu eco carregam as informações necessárias para que os morcegos consigam, por exemplo, desviar de obstáculos ou encontrar alimento e abrigo.

A maioria dos morcegos que usam a ecolocalização emite sinais entre 20 kHz e 100 kHz, mas há espécies com emissões próximas de 10 kHz e outras que alcançam cerca de 200 kHz.

Normalmente, os sinais emitidos são de curtíssima duração (cerca de alguns milissegundos). Quando detecta uma presa, geralmente o morcego diminui o intervalo de tempo entre os sinais emitidos para obter mais informações em menos tempo. Algumas espécies podem emitir 200 sinais por segundo.

Todos os microquirópteros geram seus sinais na laringe, por meio da vibração das cordas vocais causada pela passagem do ar. A frequência do sinal emitido depende da tração das cordas vocais, que pode ser alterada pela maior ou menor contração dos músculos da laringe.

Alguns morcegos utilizam também o efeito Doppler, assunto a ser estudado no Bloco 4 deste Tópico. Com esse recurso, o morcego consegue saber, por exemplo, se um inseto que refletiu o sinal está parado ou se está afastando-se ou aproximando-se dele.

Em geral, o sinal emitido por um morcego não interfere na “navegação” de outro morcego porque cada um deles tem sua “voz” característica, como acontece com os humanos. Além disso, algumas espécies podem alterar a frequência, a intensidade ou o intervalo de seus sinais para que não se confundam com os sinais de outros que estejam na mesma área.

Adaptado de: BERNARD, Enrico. “Ecos na escuridão: o fascinante sistema de orientação dos morcegos.” *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro: SBPC, v. 32, n. 190, jan./fev. 2003. p. 14.

Marcelo Bordignon

O morcego *Chrotopterus auritus* (família Phyllostomidae), um dos maiores do Brasil (até 70 cm de envergadura), tem ao redor das narinas uma “folha nasal”, estrutura relacionada à emissão e à recepção dos sinais de ecolocalização – a espécie utiliza sinais entre 20 kHz e 100 kHz, de curta duração e baixa intensidade, e alimenta-se de insetos, frutos e pequenos animais (sapos, lagartos e pequenos roedores).

## Exercícios

nível 1

**1.** (Vunesp-SP) Nas últimas décadas, o cinema tem produzido inúmeros filmes de ficção científica com cenas de guerras espaciais, como *Guerra nas estrelas*. Com exceção de *2001, uma odisseia no espaço*, essas cenas apresentam explosões com estrondos impressionantes, além de efeitos luminosos espetaculares, tudo isso no espaço interplanetário.

a) Comparando *Guerra nas estrelas*, que apresenta efeitos sonoros de explosão, com *2001, uma odisseia no espaço*, que não os apresenta, qual deles está de acordo com as leis da Física? Justifique.

b) E quanto aos efeitos luminosos que todos apresentam? Justifique.

**2. E.R.** Uma fonte sonora emite um som com 440 Hz de frequência à beira de um lago. Nas condições em que o ar se encontra, o som se propaga nele a 352 m/s. Na água, sua velocidade de propagação é de 1496 m/s, aproximadamente. Calcule o comprimento de onda do som dessa fonte:

a) no ar; b) na água.

**Resolução:**

a) Sendo f = 440 Hz e v = 352 m/s, e lembrando que $v = \lambda f$, temos:

$$v = \lambda f \Rightarrow 352 = \lambda \cdot 440 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}80 \text{ m}}$$

b) Como você já sabe, a frequência de uma onda não se altera quando ela passa de um meio para outro (refração). Então, na água temos f = 440 Hz e v = 1496 m/s:

$$v = \lambda f \Rightarrow 1496 = \lambda \cdot 440 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3{,}4 \text{ m}}$$

**3.** Um ser humano com boa audição é capaz de ouvir vibrações acústicas entre 20 Hz e 20 000 Hz aproximadamente. Considerando a velocidade do som no ar igual a 340 m/s, determine os comprimentos de onda do som mais grave (mais baixo) e do som mais agudo (mais alto) que ele consegue ouvir.

**4.** Durante um *show* à beira do mar, uma guitarra emite uma onda sonora que se propaga no ar com velocidade **v**, comprimento de onda **λ** e frequência **f**. Essa onda penetra na água, onde se propaga com velocidade **v'**, comprimento de onda **λ'** e frequência **f'**. Sabendo que **v'** é maior que **v**, compare **λ'** com **λ** e **f'** com **f**.

**5.** Os morcegos emitem ultrassons. O menor comprimento de onda produzido no ar pela maioria dos morcegos é aproximadamente igual a $33 \cdot 10^{-4}$ m. Considerando a velocidade do som no ar igual a 330 m/s, qual a frequência mais elevada que esses morcegos podem emitir?

**6.** Julgue as afirmações a seguir:

I. Todo som alto tem grande intensidade.
II. Sons baixos são aqueles que têm pequena intensidade.
III. Quanto maior a frequência de um som, mais alto ele é.
IV. A diferença entre um som forte e um som fraco está na frequência.

É(São) correta(s):

a) todas.
b) somente a I e a II.
c) somente a III e a IV.
d) somente a III.
e) somente a I, a II e a IV.

**7.** Quais as frequências dos sons uma oitava acima e uma oitava abaixo de um som de 400 Hz?

**8.** Uma pequena fonte sonora de potência constante emite ondas esféricas que são recebidas com intensidade **I** por um observador. Se esse observador se afastar da fonte até dobrar a distância até ela, com que intensidade **I'** passará a receber as ondas emitidas pela citada fonte? Suponha que o meio de propagação não absorva energia das ondas.

**9.** Considere que uma pessoa só percebe o eco de sua voz quando o intervalo de tempo decorrido entre a emissão da voz e a recepção do som refletido em algum obstáculo é, no mínimo, igual a 0,10 s. A figura representa uma pessoa a uma distância **d** de um paredão:

Considerando igual a 340 m/s a velocidade do som no ar:

a) calcule o mínimo valor de **d** para a pessoa perceber o eco de sua voz;
b) calcule a distância **d** no caso de a pessoa ouvir o eco 2,0 s após a emissão de sua voz.

## Exercícios nível 2

**10.** Uma roda, contendo em sua borda 20 dentes regularmente espaçados, gira uniformemente dando 5 voltas por segundo. Seus dentes se chocam com uma palheta produzindo sons que se propagam no ar a 340 m/s.

a) Qual a frequência do som produzido?
b) Qual o comprimento de onda do som produzido?

**11.** A nota **lá**-padrão tem frequência igual a 440 Hz. Num piano, é possível atingir três oitavas acima e quatro oitavas abaixo dessa nota. Calcule, então, as frequências mínima e máxima das notas **lá** desse instrumento.

**12. E.R.** Para que uma pessoa sem problemas auditivos consiga ouvir um som, ele precisa ter uma intensidade de, no mínimo, $10^{-12}$ W/m². Considere um violino que gera cerca de 50 μW e suponha que o som, ao se propagar pela atmosfera, não sofra dissipação de energia. Determine a máxima distância possível de um observador para que ele ainda possa ouvir os sons desse violino. Admita que esses sons se propagam esfericamente.

**Resolução:**

Considerando a onda sonora esférica, sua intensidade varia com a distância (**x**) da fonte emissora de acordo com a relação:

$$I = \frac{Pot}{4\pi x^2},$$

em que Pot é a potência da fonte emissora.

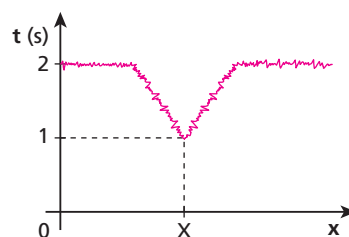
Assim, sendo $I = 10^{-12}$ W/m², Pot = 50 μW = $50 \cdot 10^{-6}$ W e $\pi = 3,14$, temos:

$$10^{-12} = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot x^2} \Rightarrow \boxed{x \cong 2 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

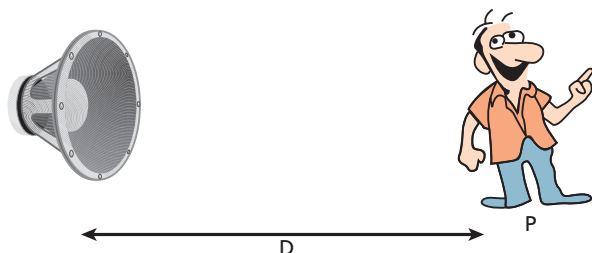
Portanto, se não houvesse fatores de dissipação de uma onda sonora, uma pessoa poderia ouvir os sons emitidos pelo violino a 2 km dele.

**13.** A menor intensidade sonora que uma pessoa de audição normal pode perceber é de $10^{-16}$ W/cm² e a máxima que ela suporta é de $10^{-4}$ W/cm², quando já começa a sentir dor. Uma fonte sonora de pequenas dimensões emite som que um bom ouvinte percebe até uma distância de, no máximo, 100 km. Determine, desprezando dissipações na propagação e considerando $\pi = 3$:

a) a potência sonora da fonte;
b) a distância da pessoa à fonte, quando ela começa a sentir dor.

**14.** (FCC-SP) Para traçar o relevo do fundo do mar, um navio emite, verticalmente, pulsos sonoros e registra o intervalo **t** de tempo entre o instante de emissão do pulso e o de recepção do pulso refletido. A velocidade do som na água é de 1,5 km/s.

O gráfico mostra a duração de **t**, em função da posição **x** do navio, que navegava em linha reta. A partir dessas informações, pode-se concluir, corretamente, que na posição **X** havia:

a) um vale submarino, cujo fundo estava a 1,5 km do nível do mar.
b) um vale submarino, cujo fundo estava a 3,0 km do nível do mar.
c) um vale submarino, cujo fundo estava a 4,5 km do nível do mar.
d) uma montanha submarina, cujo pico estava a 0,75 km do nível do mar.
e) uma montanha submarina, cujo pico estava a 1,5 km do nível do mar.

**15.** (Fuvest-SP) Um alto-falante fixo emite um som cuja frequência **F**, expressa em Hz, varia em função do tempo **t** na forma F (t) = 1 000 + 200t. Em determinado momento, o alto-falante está emitindo um som com uma frequência $F_1$ = 1 080 Hz.

Nesse mesmo instante, uma pessoa **P**, parada a uma distância D = 34 m do alto-falante, está ouvindo um som com uma frequência $F_2$, aproximadamente, igual a:

a) 1 020 Hz.
b) 1 040 Hz.
c) 1 060 Hz.
d) 1 080 Hz.
e) 1 100 Hz.

Velocidade do som no ar ≅ 340 m/s

**16.** (Uepa) Para detectar o relevo do fundo de rios, o sonar pode ser utilizado gerando uma imagem acústica do fundo. Considere que o sonar pode ser representado por uma fonte pontual que produz onda esférica e registra o eco em um receptor localizado praticamente na mesma posição da fonte. A **Figura 1** representa um levantamento de dados de sonar em uma região de leito plano e inclinado, nas posições **1** e **2** do navio. Os intervalos de tempo entre a emissão e a recepção do eco, para duas posições da fonte, estão representados na **Figura 2**. Neste experimento, as leis da óptica geométrica descrevem precisamente o comportamento das frentes de ondas sonoras.

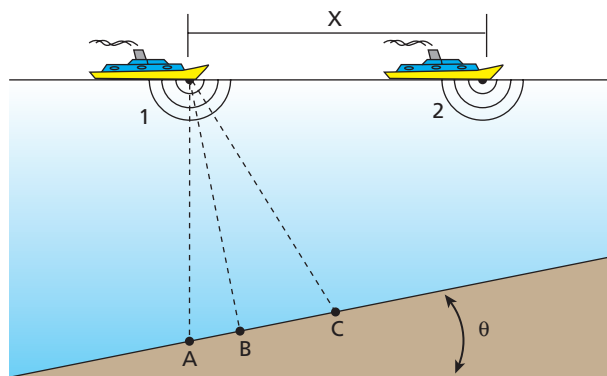



Figura 1

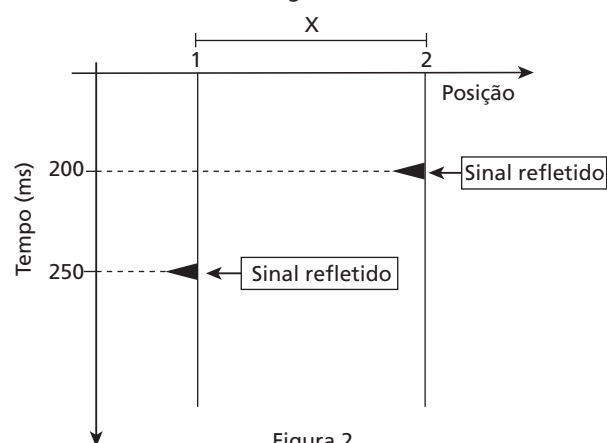



Figura 2

Nessas condições, responda:

a) Quando a fonte está na posição **1**, qual dos pontos indicados sobre o leito do rio pode ser considerado responsável pelo eco registrado no receptor? Justifique sua resposta.
b) Considere que a velocidade do som na água é 1 500 m/s e que o ângulo **θ** é de 60°. Nessas condições, determine a profundidade do ponto sobre o leito do rio onde ocorre a reflexão do sinal detectado quando o navio se encontra na posição **2**.

# Bloco 2

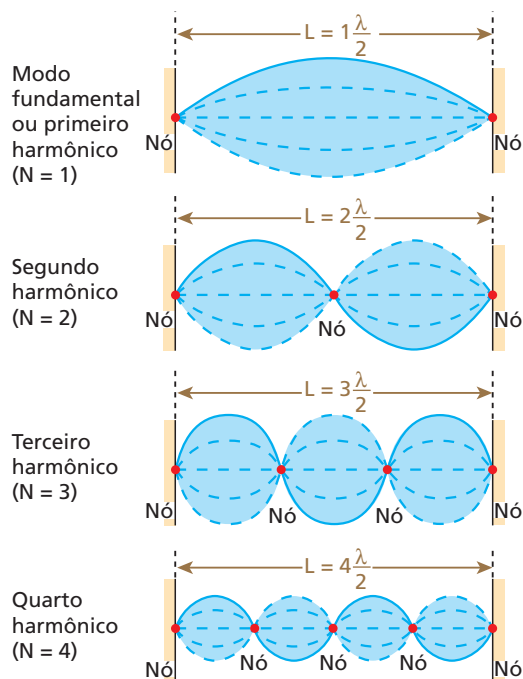
## 7. Cordas sonoras

### Modos de vibração da corda

Estudaremos agora as frequências em que uma corda esticada, de violão, por exemplo, pode vibrar. Além disso, veremos também o que determina os valores dessas frequências.

Uma corda elástica apresenta várias frequências naturais de vibração, denominadas **modos de vibração**, que podem ser obtidos sacudindo-se uma das extremidades da corda em uma de suas frequências naturais. Dessa maneira, a corda entra em ressonância com o agente que a sacode.

Uma vez atingido determinado modo de vibração, ainda que se pare de sacudir a extremidade da corda, ela continuará vibrando até perder toda a energia de vibração. Essa maneira de obter os modos de vibração permite tratar cada modo como uma configuração de onda estacionária, resultante da superposição da onda que emitimos quando balançamos a corda com a onda refletida na outra extremidade.

A figura a seguir mostra os quatro primeiros modos de vibração de uma corda de comprimento L, presa pelas extremidades. Evidentemente, apenas algumas frequências podem gerar ondas estacionárias, uma vez que nas extremidades fixas há, necessariamente, **nós**.

É imprescindível lembrar que, numa configuração de onda estacionária, a distância entre dois nós consecutivos é igual à metade do comprimento de onda das ondas que se superpõem.

O modo mais simples de vibrar uma corda denomina-se **modo fundamental** ou **primeiro harmônico**. Temos, nesse caso:

$$L = 1\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$$

Sendo **v** a velocidade de propagação das ondas na corda e lembrando que $v = \lambda f$, temos:

$$v = 2L\,f \Rightarrow \boxed{f = \frac{v}{2L}}$$ (frequência fundamental de vibração da corda ou primeiro harmônico)

O segundo modo de vibração chama-se **segundo harmônico**, e para ele temos:

$$L = 2\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{2}$$

(é conveniente deixar assim)

Como $v = \lambda f$, temos:

$$v = \frac{2L}{2}f \Rightarrow \boxed{f = \frac{2v}{2L}}$$ (segundo harmônico)

Com relação ao **terceiro harmônico**, temos:

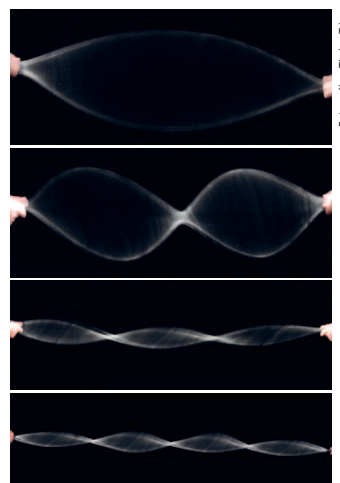
$$L = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3}$$

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \frac{2L}{3}f \Rightarrow \boxed{f = \frac{3v}{2L}}$$

(terceiro harmônico)

Procedendo da mesma maneira, podemos determinar a frequência de vibração correspondente a qualquer outro harmônico. Observe que a ordem do harmônico (primeiro, segundo, terceiro etc.) representa quantas vezes a frequência desse harmônico é maior que a frequência correspondente ao modo fundamental. Sendo **N** a quantidade de meios comprimentos de onda (ou ordem do harmônico), podemos, então, generalizar escrevendo a seguinte expressão para as frequências de vibração:

$$\boxed{f = \frac{Nv}{2L}} \quad (N = 1, 2, 3, ...)$$

Veja que só poderemos gerar ondas estacionárias numa corda presa pelas extremidades se a fizermos vibrar em determinadas frequências, de modo que entre as extremidades "caiba" um número inteiro de $\frac{\lambda}{2}$.

Ondas estacionárias produzidas em uma corda elástica. As imagens revelam os quatro primeiros modos de vibração da corda. Cada modo corresponde a uma frequência com a qual a corda é sacudida.

Quando uma corda (de violão, por exemplo) é tangida, ela vibra no modo fundamental e, simultaneamente, em vários harmônicos.

Nesse caso, a forma da corda vibrando é muito mais complexa do que a forma correspondente a cada harmônico.

## Som emitido por uma corda vibrante

No caso de um instrumento de corda, não podemos confundir as ondas na corda, que são transversais, com as ondas sonoras emitidas, que, como sabemos, são longitudinais. Na verdade, a corda vibrante é a fonte das ondas sonoras, e por isso elas têm **a mesma frequência** das vibrações da corda.

Porém a velocidade de propagação do som emitido e seu comprimento de onda nada têm que ver com a velocidade e o comprimento de onda das ondas produzidas na corda.

Quando uma pessoa dedilha a corda de um instrumento musical, ela fornece energia à corda, que, por sua vez, vibra o ar ao seu redor, fornecendo-lhe energia. Ocorre, assim, a emissão do som. Se a corda vibra no modo fundamental, o som emitido é também denominado **som fundamental**. A mesma linguagem vale para os demais harmônicos.

## Frequências naturais de vibração de uma corda em função das características da corda

Considerando apenas cordas cilíndricas, temos, a partir do que foi estudado no tópico anterior:

$$v = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{F}{\mu\pi}} \qquad \text{(I)}$$

em que:
**v** é a velocidade de propagação de ondas transversais na corda;
**r** é o raio da secção transversal da corda;
**F** é a intensidade da força tensora na corda;
**μ** é a massa específica do material de que é feita a corda.

As frequências naturais de vibração da corda são dadas por:

$$f = \frac{Nv}{2L} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$f = \frac{N}{2Lr}\sqrt{\frac{F}{\mu\pi}} \quad \text{ou} \quad f = \frac{N}{DL}\sqrt{\frac{F}{\mu\pi}}$$

em que D = 2r é o diâmetro da secção transversal da corda.

Na última expressão, podemos notar que a frequência fundamental de vibração da corda (N = 1), que é a mesma do som fundamental emitido, depende do diâmetro (**D**) e do comprimento (**L**) da corda, da massa específica (**μ**) do material de que ela é feita e da intensidade da força (**F**) que a traciona.

A seguir, analisamos a influência de cada variável na frequência do som fundamental.

Supondo fixas as demais variáveis, a frequência do som fundamental emitido é inversamente proporcional ao diâmetro da corda.

Em instrumentos de corda, como o violão, por exemplo, as cordas mais grossas emitem sons mais graves (menor frequência), e as mais finas emitem sons mais agudos (maior frequência).

Thinkstock/Getty Images

Supondo fixas as demais variáveis, a frequência do som fundamental emitido é inversamente proporcional ao comprimento da corda.

Thinkstock/Getty Images

Pressionando uma mesma corda em diversas posições (casas), alteramos o comprimento do trecho que vibra quando ela é tangida. Quanto menor é esse comprimento, mais agudo é o som emitido.

Supondo fixas as demais variáveis, a frequência do som fundamental emitido é diretamente proporcional à raiz quadrada da força tensora.

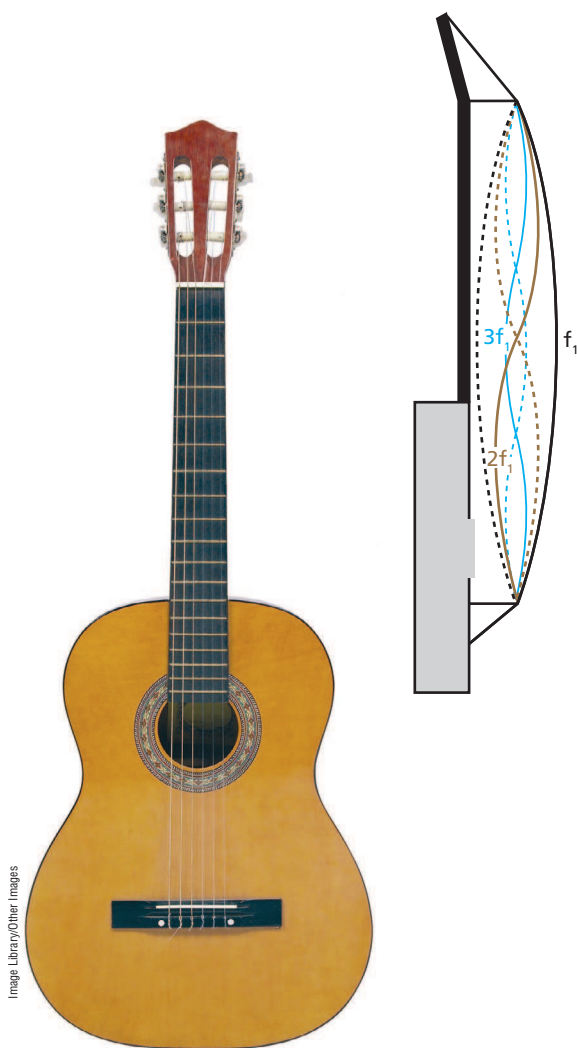
Quando um violonista está afinando um violão, ele varia a frequência, alterando a força tensora na corda.

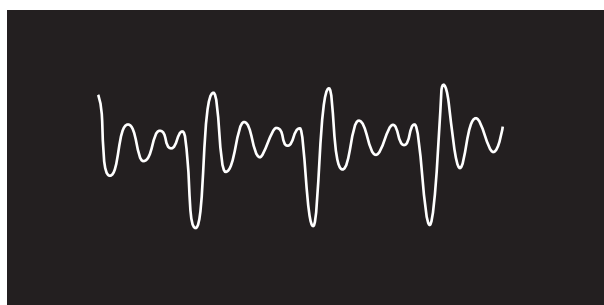
Supondo fixas as demais variáveis, a frequência do som fundamental emitido é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa específica do material de que é feita a corda.

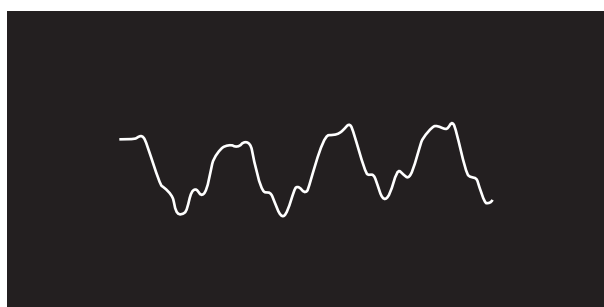
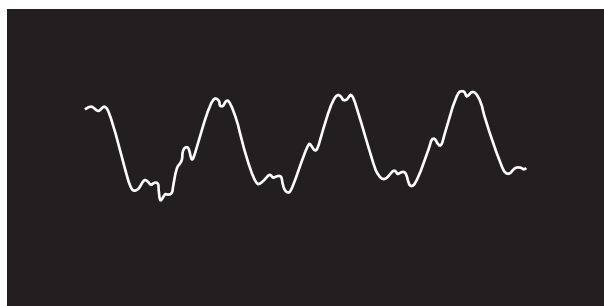
Num violão, se substituirmos uma corda de náilon por uma corda metálica (maior massa específica), de mesmo diâmetro e sujeita à mesma tensão, obteremos um som mais grave, ou seja, de menor frequência.

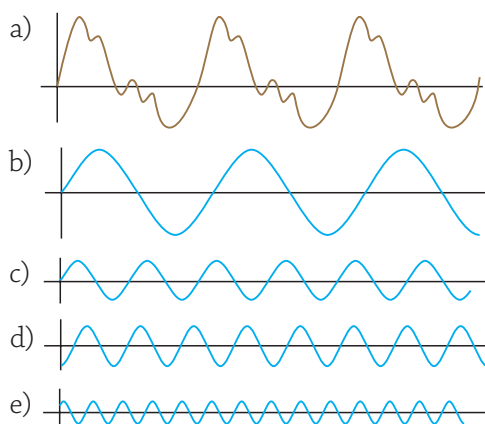
## 8. Timbre de um som

O **timbre** de um som é a sensação característica causada pela presença de harmônicos acompanhando o som fundamental. Influem no timbre tanto a quantidade de harmônicos como suas intensidades relativas.

É o timbre que nos permite distinguir a mesma nota (mesmo som fundamental) emitida por instrumentos diferentes, ainda que essa nota tenha a mesma intensidade nas duas emissões.

Quando uma corda de violão é tangida, ela vibra simultaneamente em diversas frequências, o que caracteriza o timbre do som emitido. A ilustração mostra os modos de vibração correspondentes aos três primeiros harmônicos, de frequências $f_1$, $2f_1$ e $3f_1$.

A presença dos harmônicos, em quantidades e intensidades diferentes, determina formas de ondas variadas, isto é, diferentes representações gráficas da elongação em função do tempo. Nas figuras a seguir, aparecem formas de onda da mesma nota **fá** emitida por um trompete, um trompete sintetizado, um violão e um violão sintetizado.

Trompete

Trompete sintetizado

Violão

Violão sintetizado

As figuras a seguir mostram a análise de uma nota musical emitida por um violino:

Em **a**, temos a forma de onda correspondente a uma nota emitida por um violino. Em **b**, **c**, **d** e **e** estão os quatro principais harmônicos que compõem essa nota.

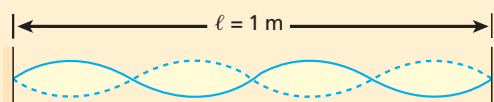
A **altura** (sensação que um som nos causa em virtude de sua frequência), o **timbre** (sensação que um som nos causa em virtude dos harmônicos presentes nele) e a **sonoridade** (sensação da intensidade de um som) são denominados **qualidades fisiológicas** do som.

**Nota:**

- A sonoridade será estudada no Bloco 5 deste Tópico.

## Exercícios

nível 1

**17. E.R.** Uma corda esticada entre duas paredes vibra como mostra a figura:

Sabendo que a velocidade de propagação do som no ar é $v_s = 340$ m/s e que a velocidade de propagação de ondas transversais na corda é $v_c = 500$ m/s, determine:

a) a frequência do som emitido pela corda;
b) o comprimento de onda do som emitido pela corda;
c) a frequência do som fundamental que essa corda pode emitir.

**Resolução:**

a) Lembrando que a distância entre dois nós consecutivos é igual à metade do comprimento de onda, temos, para as ondas na corda:

$$\ell = 4\,\frac{\lambda_c}{2} \Rightarrow 1 = 4\,\frac{\lambda_c}{2} \Rightarrow \lambda_c = 0{,}5 \text{ m}$$

$$v_c = \lambda_c f \Rightarrow 500 = 0{,}5f \Rightarrow \boxed{f = 1\,000 \text{ Hz}}$$

Essa é a frequência de vibração da corda e, consequentemente, a frequência do som emitido.

b) Para o som emitido, temos:

$$v_s = \lambda_s f \Rightarrow 340 = \lambda_s \cdot 1\,000 \Rightarrow \boxed{\lambda_s = 0{,}34 \text{ m}}$$

c) O modo de vibração da corda apresentada corresponde ao quarto harmônico:

$$f_4 = 4f_1 \Rightarrow 1\,000 = 4f_1 \Rightarrow \boxed{f_1 = 250 \text{ Hz}}$$

**18.** Numa corda tensa, abalos transversais propagam-se a 100 m/s. Sendo de 2 m o comprimento da corda, calcule sua frequência de vibração:

a) no modo fundamental; b) no terceiro harmônico.

**19.** Ondas estacionárias são produzidas numa corda, sendo de 60 cm o comprimento de onda. Determine, em centímetros, os três menores valores possíveis para o comprimento da corda.

**20.** Considere uma corda de violão de 60 cm de comprimento. Quais os três maiores comprimentos de onda de ondas estacionárias que podemos produzir nela?

**21.** Uma corda de 0,50 m com densidade linear de $10^{-2}$ kg/m está submetida a uma tração de 100 N.

a) Calcule a frequência fundamental do som emitido pela corda.
b) Proponha duas maneiras de dobrar a frequência do som fundamental, alterando uma única grandeza em cada caso.
c) Considerando igual a 330 m/s a velocidade de propagação do som no ar, calcule o comprimento de onda do som fundamental emitido no ar.

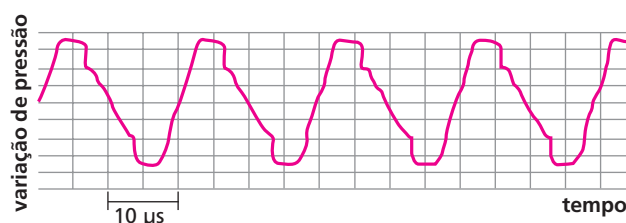
**22.** (Uepa) Ao tocar a corda mais grossa do violão, presa apenas nas suas extremidades, é produzido um som grave denominado MI e de frequência fundamental 327 Hz. Considere o comprimento da corda igual a 60 cm.

a) Calcule a velocidade de transmissão da onda na corda.
b) A corda mais fina, por sua vez, na plenitude de seu comprimento, também produz um som denominado MI, porém com frequência duas oitavas acima do som produzido pela corda mais grossa. Identifique a qualidade fisiológica que diferencia o som produzido pelas duas cordas.

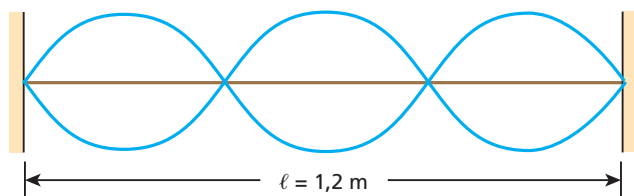
**23.** Durante um processo de investigação, uma conversa telefônica foi gravada e surgiu a necessidade de se confirmar se uma determinada voz era ou não do senhor **X**. Para isso, a voz gravada foi analisada em laboratório.
Qual qualidade fisiológica do som é decisiva para se concluir se essa voz era ou não dele?

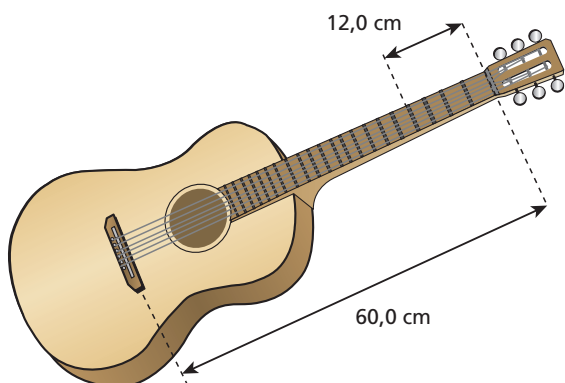
**24.** (Unicenp-PR) O italiano Luciano Pavarotti, conhecidíssimo cantor da ópera, possui uma extensão de voz que varia aproximadamente entre o "dó" (128 Hz) e o "lá" (440 Hz), sendo classificado como **tenor**. Já um **contralto** compreende uma extensão de voz que vai, pelo menos, de "sol" (196 Hz) a "mi" (669 Hz).
A classificação citada, que pode ainda envolver barítonos, baixos, sopranos e *mezzo*-sopranos, está calcada na qualidade fisiológica do som conhecida como:
a) intensidade.
b) altura.
c) timbre.
d) volume.
e) reverberação.

**25.** (Fuvest-SP) O som de um apito é analisado com o uso de um medidor que, em sua tela, visualiza o padrão apresentado na figura ao lado. O gráfico representa a variação da pressão que a onda sonora exerce sobre o medidor, em função do tempo, em μs ($1\ \mu s = 10^{-6}$ s). Analisando a tabela de intervalos de frequências audíveis, por diferentes seres vivos, conclui-se que esse apito pode ser ouvido apenas por:

| Seres vivos | Intervalos de frequência |
|---|---|
| cachorro | 15 Hz – 45 000 Hz |
| ser humano | 20 Hz – 20 000 Hz |
| sapo | 50 Hz – 10 000 Hz |
| gato | 60 Hz – 65 000 Hz |
| morcego | 1 000 Hz – 120 000 Hz |

a) seres humanos e cachorros.
b) seres humanos e sapos.
c) sapos, gatos e morcegos.
d) gatos e morcegos.
e) morcegos.

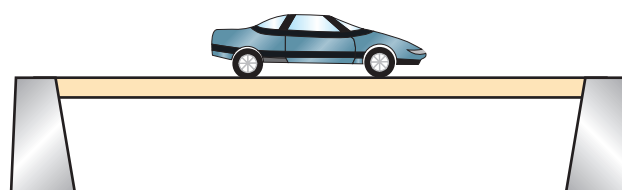
## Exercícios nível 2

**26.** Uma corda de massa m = 240 g e comprimento $\ell$ = 1,2 m vibra com frequência de 150 Hz, no estado estacionário esquematizado a seguir:

Determine a velocidade de propagação das ondas que originam o estado estacionário nessa corda e a intensidade da força tensora.

**27.** (Cesgranrio-RJ) O comprimento das cordas de um violão (entre suas extremidades fixas) é de 60,0 cm. Ao ser dedilhada, a segunda corda (lá) emite um som de frequência igual a 220 Hz. Qual será a frequência do novo som emitido, quando o violonista, ao dedilhar essa mesma corda, fixar o dedo no traste, a 12,0 cm de sua extremidade?

**28.** Um violonista tange no instrumento duas cordas de diâmetros diferentes, feitas do mesmo material e igualmente tracionadas, e consegue produzir a mesma nota. Explique como isso é possível.

**29.** (Unicentro) A quinta corda solta do violão corresponde à nota si (frequência fundamental igual a 981 Hz). Se essa corda for presa no quinto trasto, diminuindo assim o comprimento da corda vibrante, obtém-se a nota mi aguda (frequência fundamental igual a 1308 Hz). Sobre o comprimento da parte vibrante da corda si ($\ell$), que vibra na frequência da nota mi aguda, expresso em função do comprimento da corda solta (**L**), é correto afirmar:

a) $\ell = \frac{1}{2}$ L.
b) $\ell = \frac{2}{3}$ L.
c) $\ell = \frac{3}{4}$ L.
d) $\ell = \frac{4}{5}$ L.
e) $\ell = \frac{5}{6}$ L.

**30.** (UFSCar-SP) Com o carro parado no congestionamento sobre o centro de um viaduto, um motorista pôde constatar que a estrutura deste estava oscilando intensa e uniformemente. Curioso, pôs-se a contar o número de oscilações que estavam ocorrendo. Conseguiu contar 75 sobes e desces da estrutura no tempo de meio minuto, quando teve de abandonar a contagem devido ao reinício lento do fluxo de carros.

Mesmo em movimento, observou que, conforme percorria lentamente a outra metade a ser transposta do viaduto, a amplitude das oscilações que havia inicialmente percebido gradativamente diminuía, embora mantida a mesma relação com o tempo, até finalmente cessar na chegada em solo firme. Levando em conta essa medição, pode-se concluir que a próxima forma estacionária de oscilação desse viaduto deve ocorrer para a frequência, em Hz, de:

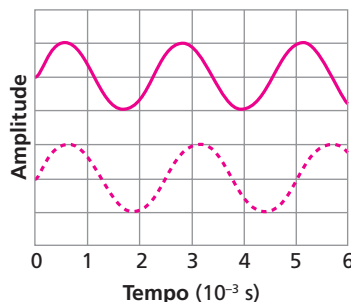
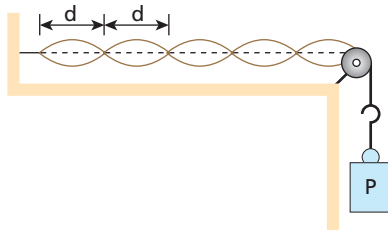
a) 15,0.
b) 9,0.
c) 7,5.
d) 5,0.
e) 2,5.

**31.** (Udesc-SC) Para a afinação de um piano, usa-se um diapasão com frequência fundamental igual a 440 Hz, que é a frequência da nota **Lá**. A curva contínua do gráfico a seguir representa a onda sonora de 440 Hz do diapasão.

Amplitude

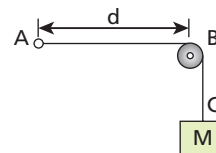
0 1 2 3 4 5 6

Tempo ($10^{-3}$ s)

a) A nota **Lá** de certo piano está desafinada e o seu harmônico fundamental está representado na curva tracejada do gráfico. Obtenha a frequência da nota **Lá** desafinada.
b) O comprimento dessa corda do piano é igual a 1,0 m e sua densidade linear é igual a $5{,}0 \cdot 10^{-2}$ g/cm. Calcule o aumento de tração na corda necessário para que a nota **Lá** seja afinada.

**32.** (Unifesp-SP) A figura representa uma configuração de ondas estacionárias produzida num laboratório didático com uma fonte oscilante.

a) Sendo d = 12 cm a distância entre dois nós sucessivos, qual o comprimento de onda da onda que se propaga no fio?
b) O conjunto **P** de cargas que traciona o fio tem massa m = 180 g. Sabe-se que a densidade linear do fio é $\mu = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ kg/m. Determine a frequência de oscilação da fonte.

**Dados:** velocidade de propagação de uma onda numa corda: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

**33.** (Ufam) Um estudante, querendo medir a massa **M** de um bloco e não dispondo de uma balança, decidiu praticar o que aprendera na aula sobre cordas vibrantes. Para isso, fixou com um prego a extremidade **A** de um fio de aço muito fino e na extremidade livre, **C**, pendurou o corpo com massa desconhecida **M**, depois de passar o fio por uma polia em **B**, cuja distância $d = \overline{AB}$ era ajustável (ver figura). Fazendo d = 1 m, dedilhou a corda e ouviu um som com uma dada frequência **f**. Acostumado a "afinar" violão, o estudante então substituiu a massa **M** por um pacote de açúcar de 1 kg e passou a dedilhar a corda, variando a distância **d**, até conseguir a mesma frequência **f** ouvida anteriormente, o que ocorreu para d = 0,25 m. Pode-se afirmar que a massa **M** do bloco vale:

a) 8 kg.
b) 10 kg.
c) 4 kg.
d) 16 kg.
e) 12 kg.

**34.** Alguns *softwares* permitem manipular certos harmônicos componentes da voz humana, intensificando-os, atenuando-os ou até mesmo suprimindo-os, modificando substancialmente o som percebido por um ouvinte para uma determinada voz. Surgem com essas manipulações aquelas vozes de "robôs", de "monstros", de seres "extraterrestres" etc., tão comuns no cinema. A principal qualidade que se altera na voz é:

a) a altura.
b) o timbre.
c) a intensidade.
d) o nível sonoro.
e) a amplitude.

# Bloco 3

## 9. Batimento, ressonância e difração do som

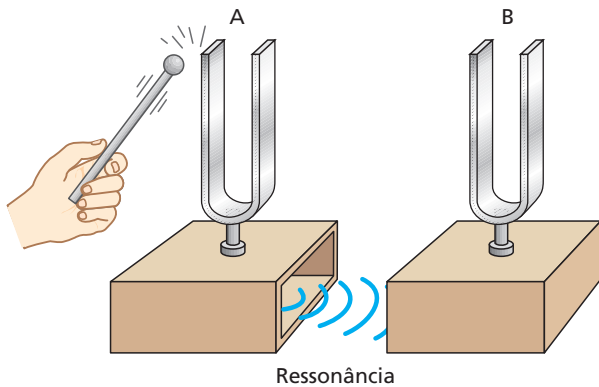
Os **batimentos** sonoros entre dois sons de frequências $f_1$ e $f_2$ próximas poderão ser percebidos apenas se a frequência desses batimentos não ultrapassar 7 Hz. Lembre-se de que a frequência dos batimentos é dada pela diferença positiva entre $f_1$ e $f_2$. Além disso, eles podem ser produzidos, por exemplo, acionando-se simultaneamente duas teclas adjacentes de um piano correspondentes a notas baixas.

A **ressonância** sonora pode ser constatada com o uso de um diapasão, que é uma peça metálica em forma de **U**, acoplada a uma caixa oca de madeira que tem uma face lateral aberta (caixa de ressonância). Batendo-se na peça metálica, o diapasão vibra, emitindo uma onda sonora pura (única frequência) que costuma ser utilizada como padrão de frequência para a afinação de instrumentos.

Michael Pole/CORBIS/Latinstock

Fotografia de diapasão sem a caixa de ressonância.

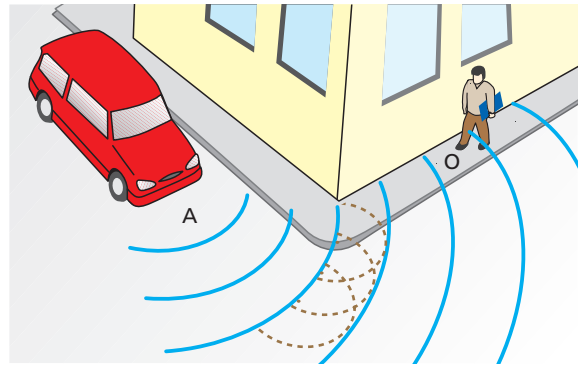
O experimento descrito a seguir permite a constatação do fenômeno da ressonância.

Ressonância

Na figura, **A** e **B** são diapasões idênticos. Batendo-se apenas no diapasão **A**, observamos que o diapasão **B** também vibra. Isso ocorre porque **B** é excitado pelas ondas sonoras provenientes de **A**, cuja frequência é igual à sua frequência de vibração natural. Esse fenômeno é a ressonância.

De modo análogo, se tocarmos a corda de um violão colocado perto de outro, estando ambos com essa corda afinada igualmente, a corda do outro também vibrará (ressonância).

Steve Bronstein/Stone/Getty Images

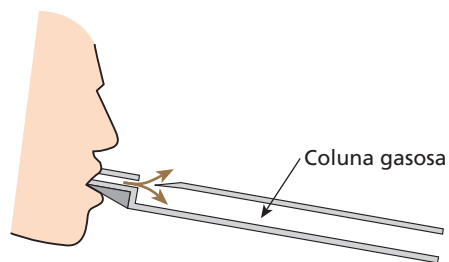
O copo foi excitado continuamente por um som bastante intenso e de frequência adequada. Desse modo, ele entrou em ressonância com o som, passando a vibrar cada vez mais intensamente até se estilhaçar.

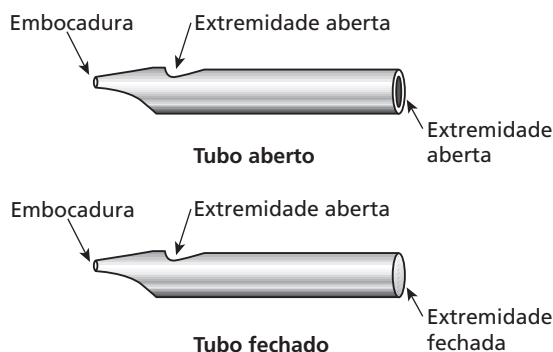
A **difração** é um fenômeno que ocorre frequente e acentuadamente com as ondas sonoras. Essa acentuação dá-se quando os obstáculos atingidos apresentam dimensões inferiores às do comprimento de onda ou, pelo menos, da mesma ordem de grandeza. E, pelo fato de o som ter comprimentos de onda que variam de aproximadamente 17 mm até 17 m, ele encontra grande facilidade para se difratar.

Um observador em **O**, embora não veja o automóvel **A**, consegue ouvir muito bem o ruído produzido por ele. Note, na figura, em linhas tracejadas, as ondas elementares de Huygens justificando a difração.

Os sons graves, por terem maior comprimento de onda, difratam-se mais que os agudos. Isso é facilmente notado numa caixa acústica, já que os sons agudos são muito mais direcionais que os graves. Por isso, uma pessoa bem afastada lateralmente em relação à caixa ouve muito melhor os graves que os agudos.

## 10. Tubos sonoros

Uma coluna gasosa também possui suas frequências naturais de vibração (longitudinal). Assim, quando uma dessas colunas é excitada em uma ou mais de suas frequências naturais, ocorre ressonância e o som amplifica-se. Essas colunas gasosas, normalmente de ar, estão confinadas em tubos sólidos e ocos denominados **tubos sonoros**.

Muitos instrumentos musicais utilizam tubos sonoros como ressoadores (por exemplo, a flauta, o saxofone, o órgão de foles). Nesse tipo de instrumento, os sons são produzidos por fluxos de ar numa das extremidades. Esses sons compõem-se de várias frequências, mas só ressoam, ou se amplificam, aquelas que correspondem a frequências naturais, isto é, ao som fundamental e aos harmônicos da coluna gasosa.

O ar soprado na embocadura de uma flauta gera um jato vibrante, dirigido ora para fora, ora para dentro, que emite um som de muitas frequências.

Os tubos são classificados em abertos e fechados. Os tubos **abertos** são aqueles que têm as duas extremidades abertas (uma delas próxima da embocadura). Os **fechados** são aqueles que têm uma extremidade aberta, próxima da embocadura, e a outra fechada.

Do mesmo modo que nas cordas, as vibrações das colunas gasosas podem ser estudadas como ondas estacionárias resultantes da interferência do som enviado na embocadura com o som refletido na outra extremidade do tubo.

Em uma extremidade aberta, o som reflete-se em fase, havendo aí um **ventre** de deslocamento. Nessa extremidade, então, uma compressão reflete-se como rarefação, uma vez que a superposição das duas normaliza a pressão nesse local, ou seja, torna a pressão, nessa extremidade, igual à pressão atmosférica. Por isso, dizemos que se forma um nó de pressão na extremidade aberta.

Em uma extremidade fechada, por sua vez, ocorre reflexão com inversão de fase, formando-se aí um **nó** de deslocamento. Nessa extremidade, então, uma compressão reflete-se como compressão e uma rarefação, como rarefação. A superposição dessas compressões, por um lado, resulta em pressão alta, acima da pressão na ausência de ondas, isto é, acima da pressão atmosférica. A superposição das rarefações, por outro lado, dá como resultado pressão baixa, abaixo da pressão na ausência de ondas.

Portanto, em extremidade fechada, a pressão varia entre um máximo e um mínimo, razão pela qual dizemos que se forma, nessa extremidade, um ventre de pressão.

Na formação de ondas estacionárias em tubos, devem ser obedecidas as seguintes condições, que determinam as frequências possíveis de vibração:

Thinkstock/Getty Images

Os instrumentos de sopro, como este saxofone, baseiam-se na ressonância em colunas de ar.

Em extremidade aberta, sempre existe um **ventre de deslocamento** (ou nó de pressão).

Em extremidade fechada, sempre existe um **nó de deslocamento** (ou ventre de pressão).

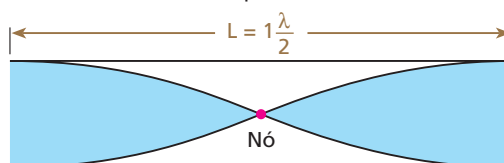
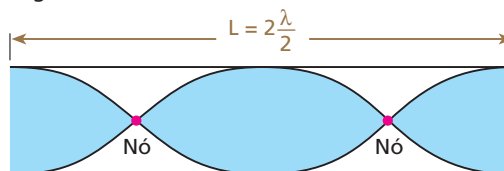
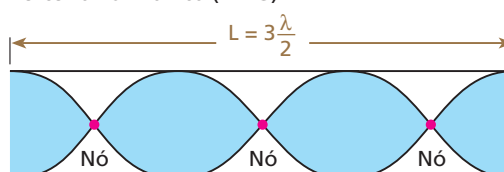
Agora, veremos esquematicamente como ficam as ondas estacionárias em tubos abertos e em tubos fechados.

## Tubos abertos

A figura a seguir mostra os três primeiros modos de vibração de um tubo aberto, de comprimento **L**.

Observe, nas três situações, ventres de deslocamento nas extremidades abertas.

Para simplificar, os nós e os ventres estão representados como se as ondas fossem transversais, quando na realidade elas são longitudinais. Para efeito de cálculo, porém, esse artifício é válido.

Modo fundamental ou primeiro harmônico (N = 1)

Segundo harmônico (N = 2)

Terceiro harmônico (N = 3)

Sendo **v** o valor da velocidade do som no gás interno ao tubo, temos, para o modo fundamental:

$$L = 1\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1v}{2L}$$

Para o segundo harmônico:

$$L = 2\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{2} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2v}{2L}$$

Para o terceiro harmônico:

$$L = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3v}{2L}$$

Generalizando para um harmônico de ordem **N** qualquer, obtemos:

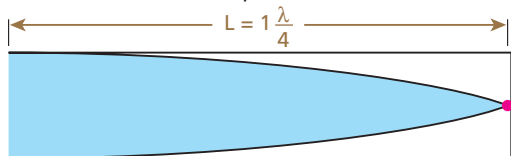
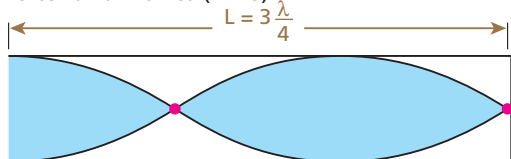
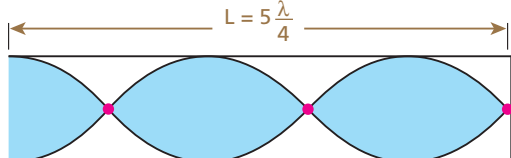
$$f = \frac{Nv}{2L} \qquad (N = 1, 2, 3, ...)$$

O número **N** é a ordem do harmônico e corresponde à quantidade de meios comprimentos de onda em cada configuração de onda estacionária.

## Tubos fechados

A figura a seguir representa os três primeiros modos de vibração num tubo fechado, de comprimento **L**.

Observe, nas três situações, ventres de deslocamento nas extremidades abertas e nós de deslocamento nas extremidades fechadas.

Modo fundamental ou primeiro harmônico (N = 1)

Terceiro harmônico (N = 3)

Quinto harmônico (N = 5)

Para o modo fundamental, temos:

$$L = 1\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4L \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1v}{4L}$$

Para o terceiro harmônico, temos:

$$L = 3\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{3} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3v}{4L}$$

Para o quinto harmônico, temos:

$$L = 5\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{5} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5v}{4L}$$

Note, então, que os tubos fechados apenas emitem o som fundamental e os harmônicos de ordem ímpar, isto é, os harmônicos cujas frequências são múltiplos ímpares da frequência do som fundamental. Assim, generalizando para um harmônico qualquer de ordem ímpar, temos:

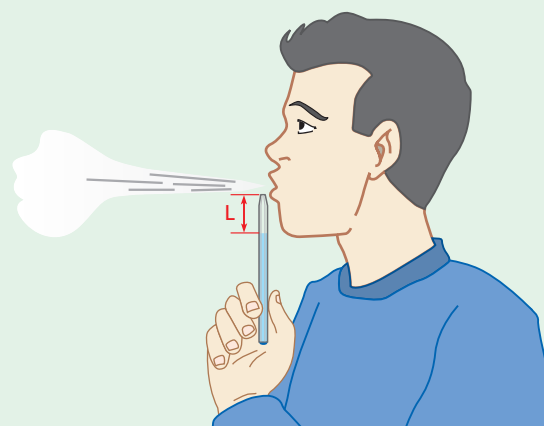
$$f = \frac{Nv}{4L} \qquad (N = 1, 3, 5, 7, ...)$$

Nesse caso, o número **N** continua sendo a ordem do harmônico, porém corresponde à quantidade de quartos de comprimento de onda.

**Nota:**

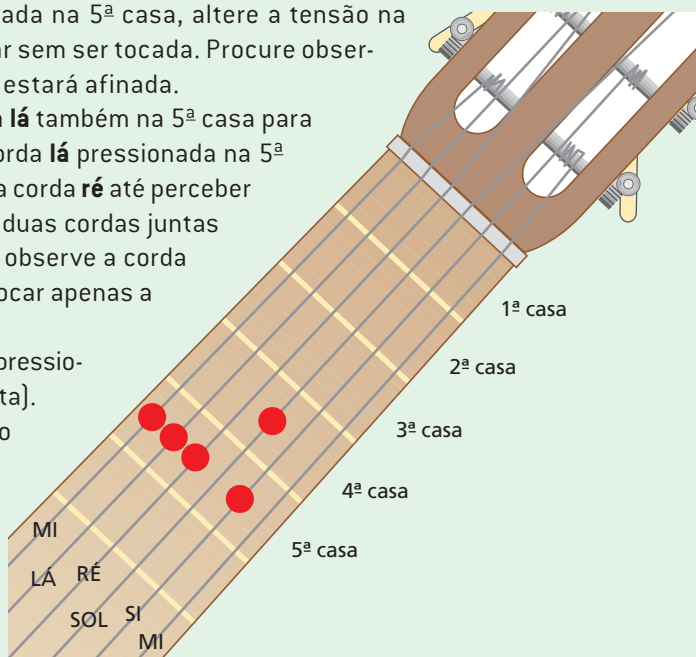
- A rigor, tudo o que foi dito a respeito dos tubos sonoros é válido para os tubos finos, ou seja, tubos em que o diâmetro (**d**) é muito menor que o comprimento ($d \ll L$).

## Faça você mesmo

**I.** Retire a carga de uma caneta esferográfica, ficando apenas com o tubo plástico rígido. Encha-o com água, tapando o orifício lateral. Em seguida, destape o furo para que a água desça um pouquinho e tape-o novamente. Sopre como sugere a figura. Você ouvirá um som bastante agudo.
Deixe baixar mais o nível da água e sopre novamente. Você ouvirá um som mais grave. Isso acontece porque, conforme aumenta o comprimento **L** do tubo sonoro fechado, diminui sua frequência de ressonância.
Esse experimento também pode ser feito com um canudinho de refrigerante, de preferência dos mais grossos.

**II.** Você pode afinar um violão baseando-se em fenômenos acústicos.
Suponha que a corda **mi**, mais grossa, já esteja razoavelmente afinada ("de ouvido"). Vamos, então, propor uma maneira de afinar as outras cordas, usando o batimento e a ressonância.

- Para afinar a corda **lá** (vizinha da corda **mi**), você deve tornar seu som igual ao da corda **mi** quando esta é pressionada na 5ª casa. Inicialmente, com a corda **mi** pressionada na 5ª casa e a corda **lá** solta, vá alterando a tensão na corda **lá** (girando a cravelha) até perceber batimentos bem espaçados ao tocar as duas cordas juntas (**mi** pressionada e **lá** solta). Percebendo esses batimentos, isto é, um som de intensidade lentamente variável, você já fica sabendo que as frequências estão próximas. Para melhorar a afinação, use a ressonância, que permite perceber visualmente a igualdade de frequências. Tocando a corda **mi** pressionada na 5ª casa, altere a tensão na corda **lá** até que, solta, ela passe a vibrar sem ser tocada. Procure observar o máximo de vibração. Aí, a corda **lá** estará afinada.

- Para afinar a corda **ré**, pressione a corda **lá** também na 5ª casa para obter a frequência da corda **ré**. Com a corda **lá** pressionada na 5ª casa e a corda **ré** solta, altere a tensão na corda **ré** até perceber batimentos bem espaçados ao tocar as duas cordas juntas (**lá** pressionada e **ré** solta). Em seguida, observe a corda **ré** solta vibrar por ressonância quando tocar apenas a corda **lá** pressionada.

- Para afinar a corda **sol**, repita a operação pressionando a corda **ré** na 5ª casa (corda **sol** solta).
- Para afinar a corda **si**, repita a operação pressionando a corda **sol** na 4ª casa (corda **si** solta).
- Para afinar a corda **mi** (vizinha da **si**), repita a operação pressionando a corda **si** na 5ª casa (corda **mi** solta).

**Nota**

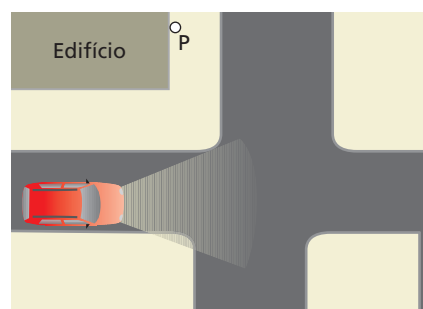
- O **lá** de um violão corretamente afinado tem frequência igual a 220 Hz, ou seja, uma oitava abaixo do **lá**-padrão.
  Para obter uma afinação mais apurada do violão, você pode usar um piano. Nesse caso, a primeira corda a ser afinada é a corda **lá**, tocando a nota **lá** de 220 Hz do piano.
  Em seguida, usando o que foi descrito, a partir da corda lá já afinada, você afinará as demais.
  Em vez de um piano, também poderia ser usado um diapasão. Entretanto, os diapasões comuns disponíveis no comércio vibram na frequência do lá-padrão, que é de 440 Hz, e não de 220 Hz.

## Exercícios

nível 1

**35.** Num experimento de batimento, colocam-se a vibrar simultaneamente dois diapasões com frequências de 200 Hz e 206 Hz.
a) Determine a frequência dos batimentos.
b) Para se obterem batimentos de frequência igual a 3 Hz, em que frequência deve vibrar um diapasão, junto com o diapasão de 200 Hz?

**36.** Consideremos dois violões com as cordas **lá** igualmente afinadas. Estando um violão próximo ao outro, tangemos a corda **lá** de um deles e verificamos que a corda **lá** do outro também vibra. Qual fenômeno explica esse acontecimento?

**37.** É noite. Um automóvel aproxima-se de uma esquina, onde há um grande edifício. Na situação representada na figura, uma pessoa na posição **P** ouve perfeitamente os ruídos do veículo, mas não pode vê-lo. Por quê?

**38. E.R.** Um tubo sonoro de 3,0 m de comprimento emite um som de frequência 125 Hz. Considerando a velocidade do som no ar igual a 300 m/s, determine:
a) se o tubo é aberto ou fechado;
b) o harmônico correspondente a essa frequência.

**Resolução:**
a) Para um tubo sonoro aberto, a frequência do som emitido é calculada por:

$$f = \frac{Nv}{2L} \quad (N = 1, 2, 3, ...)$$

em que **N** é a ordem do harmônico, **v** é a velocidade do som no gás dentro do tubo (ar) e **L** é o comprimento do tubo.
Sendo f = 125 Hz, v = 300 m/s e L = 3,0 m, temos, para **N**, o valor:

$$125 = \frac{N \cdot 300}{2 \cdot 3,0} \Rightarrow N = 2,5$$

Como o valor obtido para **N** não é inteiro, concluímos que o tubo que emitiu o referido som não pode ser aberto. Para um tubo fechado, a frequência do som emitido é dada por:

$$f = \frac{Nv}{4L} \quad (N = 1, 3, 5, ...)$$

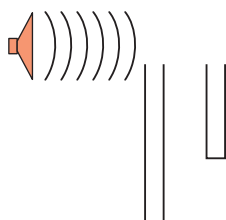
Fazendo v = 300 m/s, f = 125 Hz e L = 3,0 m, obtemos:

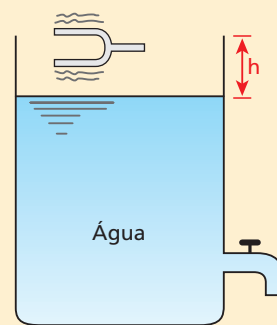
$$125 = \frac{N \cdot 300}{4 \cdot 3,0} \Rightarrow N = 5$$

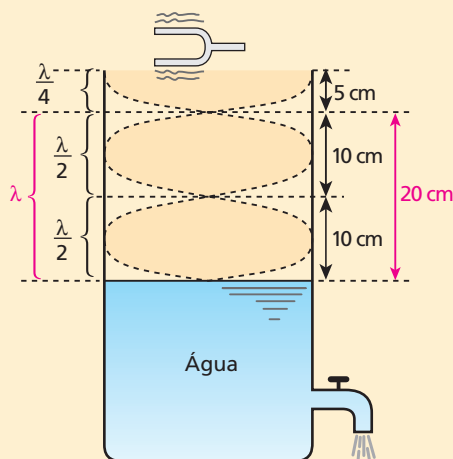
Como **N** resultou ímpar, concluímos que o som foi realmente emitido por um tubo fechado.
b) No item anterior, obtivemos o valor 5 para a ordem **N** do harmônico, o que nos permite concluir que esse tubo fechado está emitindo um som correspondente ao seu **quinto harmônico**.

**39.** Um tubo sonoro aberto, contendo ar, tem 33 cm de comprimento. Considerando a velocidade do som no ar igual a 330 m/s, determine a frequência:
a) do som fundamental emitido pelo tubo;
b) do quarto harmônico que esse tubo pode emitir.

**40.** Um tubo sonoro contendo ar tem 1 m de comprimento, apresentando uma extremidade aberta e outra fechada. Considerando a velocidade do som no ar igual a 340 m/s, determine as três menores frequências que esse tubo pode emitir.

**41.** (UFPI) Um alto-falante emite som de frequência constante igual a 55 Hz, próximo de dois tubos sonoros: um aberto e outro fechado. A velocidade de propagação do som em ambos os tubos é de 330 m/s. Se o som do alto-falante ressoa nesses tubos, seus comprimentos mínimos são, respectivamente:

a) 4 m e 2 m.
b) 3 m e 1,5 m.
c) 6 m e 3 m.
d) 5 m e 2,5 m.
e) 10 m e 5 m.

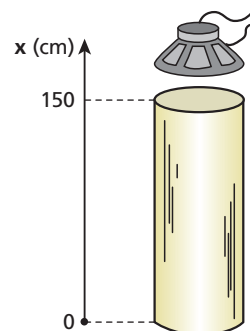
**42. E.R.** Na extremidade aberta do tubo de Quincke mostrado na figura ao lado, é colocado um diapasão, que emite um som puro (única frequência). Abrindo-se a torneira, a água escoa lentamente e, para certos valores de **h**, ocorre um aumento na intensidade do som que sai do tubo. Os três menores valores de **h** são 5 cm, 15 cm e 25 cm.

Determine:
a) o comprimento de onda do som emitido pelo diapasão;
b) a velocidade desse som no ar, sabendo que sua frequência é 1 600 Hz.

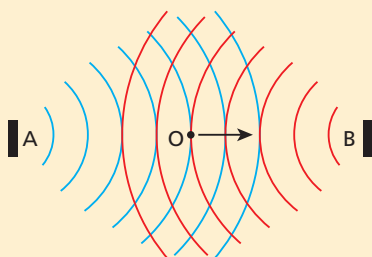
**Resolução:**
a) Enquanto a água escoa, a região de altura **h** comporta-se como um tubo sonoro fechado de comprimento variável. Para certos valores de **h**, a coluna de ar do interior da região entra em ressonância com o som emitido pelo diapasão.

Da figura, concluímos que: $\boxed{\lambda = 20 \text{ cm}}$

b) Da relação $v = \lambda f$, temos:

$$v_{som} = 0,20 \text{ m} \cdot 1\,600 \text{ Hz}$$

$$\boxed{v_{som} = 320 \text{ m/s}}$$

**43.** Um alto-falante que emite um som com frequência de 330 Hz (devido a um gerador de áudio) é colocado próximo à extremidade aberta de um vaso cilíndrico vazio, como mostra a figura ao lado.
Despejando água lentamente no vaso, em certas posições do nível da água percebemos que a intensidade sonora passa por valores máximos (ressonância). Determine os valores de **x** correspondentes a essas posições do nível da água, considerando a velocidade do som no ar igual a 330 m/s.

## Exercícios nível 2

**44. E.R.** Num campo de futebol, um estudante colocou dois alto-falantes **A** e **B** frente a frente, como está representado na figura abaixo. Em seguida, ligou-os a fontes diferentes que emitem sinais de mesma frequência e colocou-se no ponto **O**, equidistante de **A** e **B**. Como não ouvia o som, começou a deslocar-se lentamente na direção e no sentido indicados na figura:

À medida que ocorria o deslocamento, o observador percebia um som cada vez mais forte, que em seguida começava a se enfraquecer, atingindo intensidade mínima a 1,0 m da posição inicial. Sendo a velocidade do som no local igual a 320 m/s, determine a frequência e o comprimento de onda do som.

**Resolução:**

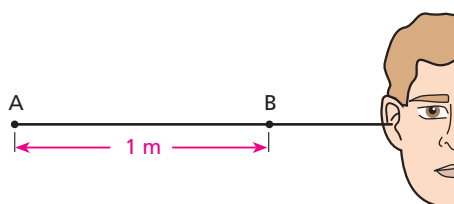
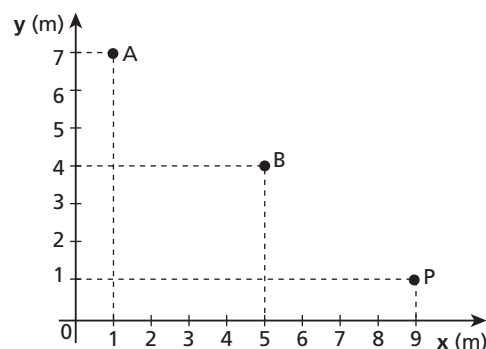
Pelo fato de o estudante não ouvir o som na posição inicial, pode-se dizer que ocorre uma interferência destrutiva nesse local, que se repete a 1,0 m de distância. Sabemos, também, que entre dois pontos consecutivos, onde ocorre interferência destrutiva, temos metade de um comprimento de onda. Então:

$$\frac{\lambda}{2} = 1{,}0\text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2{,}0\text{ m}}$$

Da relação $v = \lambda f$, temos:

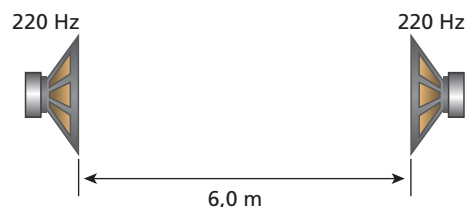
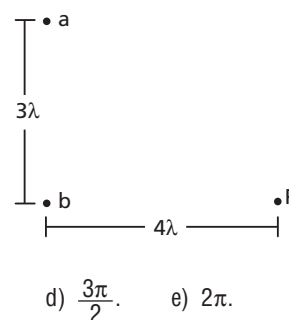
$$320 = 2{,}0f \Rightarrow \boxed{f = 160\text{ Hz}}$$

**45.** Uma onda sonora incide perpendicularmente num anteparo e reflete-se, de modo que a onda incidente interfere com a onda refletida. Observa-se que a menor distância entre dois pontos, nos quais a intensidade sonora é mínima, vale 34 cm. A frequência desse som é de 488 Hz. Calcule sua velocidade de propagação.

**46.** Nos pontos **A** e **B** da figura abaixo estão dois alto-falantes que emitem som de idêntica frequência e em fase. Se a frequência vai crescendo, desde cerca de 30 Hz, atinge um valor em que o observador à direita de **B** deixa de ouvir o som. Qual é essa frequência? (velocidade do som = 340 m/s)

**47.** (UFC-CE) Duas fontes sonoras, **A** e **B**, mostradas na figura a seguir, emitem ondas senoidais em fase e com a mesma frequência.

Considerando-se a velocidade do som igual a 340 m/s, determine a menor frequência capaz de produzir:

a) interferência construtiva no ponto **P**;
b) interferência destrutiva no ponto **P**.

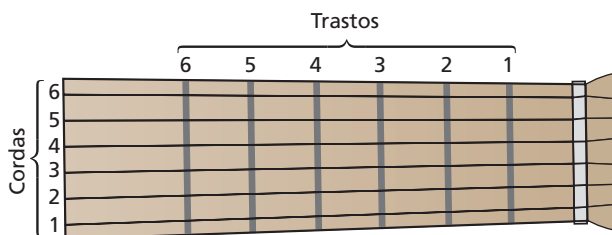
**48.** (Unicamp-SP) A velocidade do som no ar é de aproximadamente 330 m/s. Colocam-se dois alto-falantes iguais, um defronte ao outro, distanciados 6,0 m, conforme a figura abaixo. Os alto-falantes são excitados simultaneamente por um mesmo amplificador com um sinal de frequência de 220 Hz. Pergunta-se:

a) Qual é o comprimento de onda do som emitido pelos alto-falantes?
b) Em que pontos do eixo, entre os dois alto-falantes, o som tem intensidade máxima?

**49.** (UFPI) Dois alto-falantes, **a** e **b**, emitem ondas sonoras de mesmo comprimento de onda, **λ**, e diferença de fase nula. Eles estão separados por uma distância $d = 3\lambda$, como mostrado na figura ao lado. As ondas que atingem o ponto **P** apresentam uma diferença de fase, **ϕ**, igual a:

a) $\pi$.  b) $3\pi$.  c) $\frac{\pi}{2}$.  d) $\frac{3\pi}{2}$.  e) $2\pi$.

**50.** (UFRN) Afinar a corda de um instrumento musical é ajustar a tensão dessa corda até que a frequência de seu modo fundamental de vibração coincida com uma frequência predeterminada.

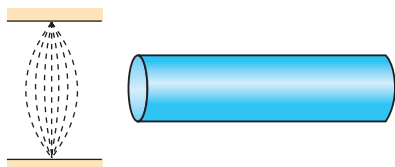
Uma forma usual de se afinar um violão consiste em afinar uma das últimas cordas (valendo-se de memória musical ou da comparação com algum som padrão, obtido por meio de diapasão, piano, flauta etc.) e usar tal corda para afinar as outras que ficam abaixo dela. (A figura a seguir ilustra em detalhe o braço de um violão.)

Flavita, acostumada a afinar seu violão, afina inicialmente a corda número 5. Assim, para afinar a corda número 4, ela pressiona a

corda 5 entre o quarto e o quinto trasto, percute-a, observa se a corda 4 vibra e o quão intensamente vibra em consequência desse procedimento. Flavita vai ajustando a tensão na corda 4 e repetindo tal procedimento até que ela vibre com a maior amplitude possível. Quando isso ocorre, essa corda está afinada.

Com base no acima exposto, atenda às seguintes solicitações.

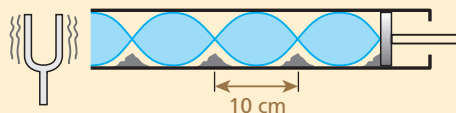
a) Dê o nome do fenômeno físico que fundamenta esse processo de afinação do violão.
b) Com base em seus conhecimentos de acústica, explique como esse fenômeno ocorre no processo de afinação do violão.

**51.** Um menino faz um apito de bambu. Fecha uma das extremidades e sopra pela outra, emitindo uma nota musical. Seu companheiro faz outro apito, deixando uma extremidade aberta e soprando pela outra, produzindo uma nota uma oitava mais aguda (ou seja, de frequência igual ao dobro da frequência do primeiro apito). Supondo sons fundamentais nos dois casos, determine a relação entre os comprimentos dos dois apitos.

**52.** Uma corda de 100 g de massa e 1 m de comprimento vibra no modo fundamental próxima de uma das extremidades de um tubo aberto de 4 m de comprimento. O tubo então ressoa, também no modo fundamental. Sendo de 320 m/s a velocidade do som no ar do tubo, calcule a força tensora na corda.

**53.** Na orelha externa do ser humano, o conduto auditivo tem em média 2,5 cm de comprimento por 0,66 cm$^2$ de área de secção transversal e é fechado numa de suas extremidades pela membrana do tímpano. Sabendo que a velocidade de propagação do som no ar é de 340 m/s e que esse conduto comporta-se como um tubo sonoro, determine sua frequência fundamental de ressonância.

**54. E.R.** Num tubo de Kundt, há pó de cortiça depositado na parte interna inferior. Fazendo-se vibrar um diapasão em sua extremidade aberta e movimentando-se o êmbolo, atinge-se uma situação de ressonância cuja consequência é a formação de montículos de pó de cortiça distantes 10 cm um do outro. Sabendo-se que a velocidade do som no ar é igual a 320 m/s, qual é a frequência do som emitido pelo diapasão?

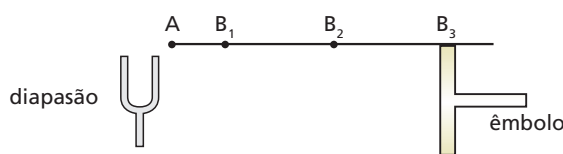
**Resolução:**

Na formação de ondas estacionárias dentro do tubo, temos nós e ventres de deslocamento. Nos ventres, o pó de cortiça é sacudido, enquanto nos nós ele forma montículos em repouso. A distância entre dois montículos consecutivos é a distância entre dois nós consecutivos, ou seja, $\frac{\lambda}{2}$.

Assim:

$$\frac{\lambda}{2} = 10 \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm} = 0{,}20 \text{ m}$$

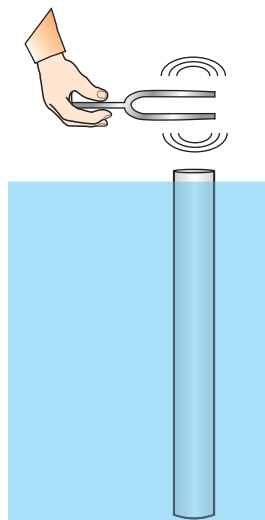
Da relação v = λ f, temos:

$$320 = 0{,}20f \Rightarrow \boxed{f = 1\,600 \text{ Hz}}$$

**55.** Um diapasão vibra com frequência de 500 Hz diante da extremidade **A** (aberta) de um tubo. A outra extremidade é fechada por um êmbolo, que pode ser deslocado ao longo do tubo. Afastando-se o êmbolo, constata-se que há ressonância para três posições, $B_1$, $B_2$ e $B_3$, tais que $\overline{AB_1} = 18$ cm, $\overline{AB_2} = 54$ cm e $\overline{AB_3} = 90$ cm.

Determine:

a) o comprimento de onda da onda sonora que se propaga no tubo;
b) a velocidade de propagação do som no ar.

**56.** Um tubo de PVC, com 5 cm de diâmetro e 180 cm de comprimento, tendo as duas extremidades abertas, encontra-se quase totalmente imerso na água de uma lagoa, como representa a figura ao lado.

Um diapasão de frequência igual a 256 Hz é posto a vibrar bem perto da extremidade superior do tubo. Erguendo-se o tubo lenta e verticalmente, com o diapasão sempre vibrando nas proximidades de sua extremidade superior, ouve-se, pela primeira vez, um reforço do som (ressonância) quando o comprimento da parte emersa do tubo é igual a 33 cm.

a) Calcule a velocidade de propagação do som no ar no local do experimento.
b) Erguendo-se mais o tubo, até sua extremidade inferior atingir a superfície livre da água, outros reforços do som são percebidos. Determine os comprimentos da parte emersa, em centímetros, nessas ocasiões.

**57.** (ITA-SP) O tubo mais curto de um órgão típico de tubos tem um comprimento de aproximadamente 7 cm. Qual é o harmônico mais alto na faixa audível, considerada como estando entre 20 Hz e 20 000 Hz, de um tubo deste comprimento aberto nas duas extremidades?

# Bloco 4

## 11. Velocidade de propagação do som

### Considerações iniciais

Como regra geral, o som propaga-se com velocidade maior nos meios sólidos que nos líquidos, e maior nos meios líquidos que nos gasosos. No ar, por exemplo, a velocidade de propagação do som é de aproximadamente 340 m/s, valendo cerca de 1 500 m/s na água e aproximadamente 5 000 m/s no ferro.

A tabela abaixo fornece valores mais precisos da velocidade do som em alguns meios.

Um fato importante é que a velocidade de propagação do som emitido por uma fonte sonora não depende da velocidade da fonte, mas apenas de características e condições do meio de propagação (isso vale para qualquer onda). Assim, quando a buzina de um automóvel em movimento é acionada, o som emitido no ar propaga-se com a mesma velocidade que se propagaria se o veículo estivesse em repouso.

| Meio | Velocidade do som (m/s) | Meio | Velocidade do som (m/s) |
|---|---|---|---|
| Ar (a 0 °C) | 331 | Água (a 20 °C) | 1 482 |
| Ar (a 15 °C) | 340 | Chumbo | 1 210 |
| Oxigênio (a 0 °C) | 316 | Alumínio | 5 000 |
| Hidrogênio (a 0 °C) | 1 284 | Aço | 5 960 |
| Mercúrio (a 20 °C) | 1 450 | Berílio | 12 870 |

**Nota:**

- Em relação aos meios sólidos (chumbo, alumínio, aço e berílio), a tabela refere-se às ondas sonoras **longitudinais**.

Outra regra geral é que a velocidade de propagação do som não depende de sua intensidade ou de sua frequência. De fato, podemos imaginar como seria difícil o entendimento de uma conversa se os sons agudos, graves, fortes e fracos se propagassem com velocidades diferentes!

### Velocidade do som num gás perfeito

Em virtude da rapidez com que ocorrem, as compressões e as expansões provocadas num gás pela propagação de vibrações acústicas podem ser consideradas transformações adiabáticas. Com base nisso, pode-se demonstrar que a velocidade de propagação do som num gás perfeito é dada pela seguinte expressão:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

em que:
**v** é o módulo da velocidade de propagação do som no gás;
**R** é a constante de Clapeyron;
**T** é a temperatura absoluta do gás;
**M** é a massa molar do gás;
**γ** é a razão entre o calor específico do gás medido a pressão constante ($c_p$) e o calor específico do gás medido a volume constante ($c_v$). Assim, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

Em geral, os valores de **γ** são típicos da atomicidade do gás, ou seja, da quantidade de átomos por molécula do gás. Assim, para um gás monoatômico, temos $\gamma = 1,7$; para um gás diatômico, $\gamma = 1,4$; e para um gás poliatômico, **γ** está em torno de 1,3 (alguns gases fogem a esses padrões).

Na expressão apresentada, você pode notar que:

> A velocidade de propagação do som num gás perfeito não depende da pressão ou da densidade do gás. É proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta e inversamente proporcional à raiz quadrada de sua massa molar, dependendo também de sua estrutura molecular (atomicidade).

A velocidade do som num gás perfeito não depende de sua densidade, pois as vibrações se transmitem de molécula para molécula a uma velocidade praticamente igual à da agitação térmica. Essa agitação é, para cada gás, função exclusiva da temperatura absoluta.

**Notas:**

- Verificou-se experimentalmente que a velocidade do som no ar aumenta aproximadamente 0,6 m/s para cada elevação de 1 °C na temperatura.
- A velocidade do som no ar aumenta ligeiramente quando aumenta o grau de umidade. Isso ocorre porque a adição de vapor de água ao ar dá origem a uma mistura de massa molar média (**M**) inferior à do ar seco.
- Os ventos também influem na velocidade do som no ar em relação à Terra. A velocidade resultante de propagação do som em relação à Terra é dada pela composição vetorial da velocidade do som na ausência do vento com a velocidade do vento.

## 12. Efeito Doppler

Retrato de Doppler.

Em 1842, o físico austríaco Christian Johann **Doppler** (1803-1853) escreveu um artigo afirmando que a frequência sonora percebida por um observador depende do movimento relativo entre fonte e observador.

Esse fenômeno, denominado efeito Doppler, pode ser definido da seguinte maneira:

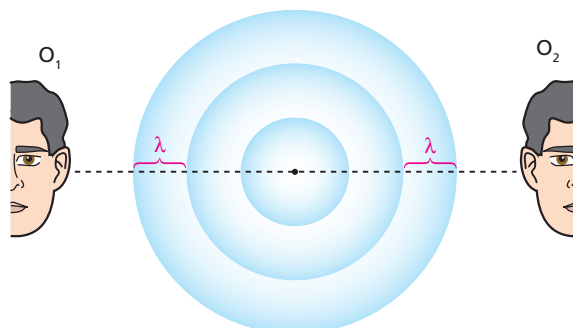
> **Efeito Doppler** é a alteração da frequência percebida pelo observador em virtude do movimento relativo de **aproximação** ou de **afastamento** entre fonte e observador.

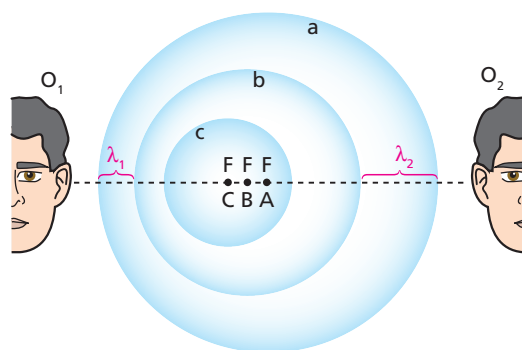
Embora se trate de um fenômeno característico de qualquer propagação ondulatória, o efeito Doppler sonoro é mais comumente percebido.

Quando um automóvel se aproxima de nós buzinando, percebemos o som da buzina mais agudo (maior frequência) do que perceberíamos se o veículo estivesse em repouso. Contudo, quando o automóvel se afasta buzinando, percebemos um som mais grave (menor frequência) do que perceberíamos se o veículo estivesse em repouso. Nos dois casos, o efeito fica mais evidente quando o automóvel está em alta velocidade. Isso também é frequentemente notado com relação ao barulho do motor dos automóveis, como é possível perceber ao se assistir a uma corrida de Fórmula 1. Sirenes de ambulâncias também permitem perceber o efeito Doppler de forma bastante clara.

Quando um trem, de preferência em alta velocidade, passa apitando por uma estação, as pessoas que estão na plataforma percebem um som de frequência diferente daquela que perceberiam se o trem estivesse parado.

Nas deduções a seguir, vamos considerar o meio de propagação do som (o ar, por exemplo) em repouso em relação à Terra. Desse modo, torna-se indiferente referir a velocidade do som ao meio ou à Terra.

Observe a figura:

A fonte sonora puntiforme **F** emite frentes esféricas concêntricas com frequência **f**. Tanto a fonte **F** como os observadores $O_1$ e $O_2$ estão fixos. Por isso, não havendo aproximação nem afastamento entre observador e fonte, não se verifica o efeito Doppler, e tanto $O_1$ como $O_2$ percebem o mesmo comprimento de onda $\boldsymbol{\lambda}$ e a mesma frequência **f**.

Analisemos, agora, esta nova situação:

Nesse caso, os observadores $O_1$ e $O_2$ estão fixos, mas a fonte **F** desloca-se para a esquerda, emitindo frentes esféricas com frequência **f** e comprimento de onda $\boldsymbol{\lambda}$. O centro de cada frente de onda corresponde à posição da fonte **F** no momento em que ela a emitiu. Assim, as frentes **a**, **b** e **c** foram emitidas quando **F** passou, respectivamente, pelos pontos **A**, **B** e **C**.

O movimento da fonte faz com que as frentes de onda juntem-se mais do lado esquerdo e separem-se mais do lado direito. Consequentemente, o observador $O_1$ recebe, num mesmo intervalo de tempo, mais frentes de onda do que receberia se a fonte não se movesse. Assim, o observador $O_1$ percebe uma frequência $f_1$ maior que **f** e um comprimento de onda $\lambda_1$ menor que $\boldsymbol{\lambda}$, enquanto $O_2$ percebe uma frequência $f_2$ menor que **f** e um comprimento de onda $\lambda_2$ maior que $\boldsymbol{\lambda}$.

Para o que acabamos de ver, e para o que vem a seguir, convém lembrar que a velocidade de propagação das ondas não depende do movimento da fonte.

Nosso problema, agora, é calcular a frequência Doppler percebida por $O_1$ e $O_2$, ou seja, calcular $f_1$ e $f_2$ em função de **f** (frequência da fonte), $v_F$ (velocidade da fonte, que se supõe constante) e **v** (velocidade de propagação do som).

**Cálculo de $f_1$:**

Entre a emissão de uma frente de onda e a emissão da seguinte, a fonte percorre uma distância igual a $v_F$ T, em que **T** é o período do som emitido pela fonte. Assim:

$$\lambda_1 = \lambda - v_F\,T$$

$$\frac{v}{f_1} = \frac{v}{f} - \frac{v_F}{f}$$

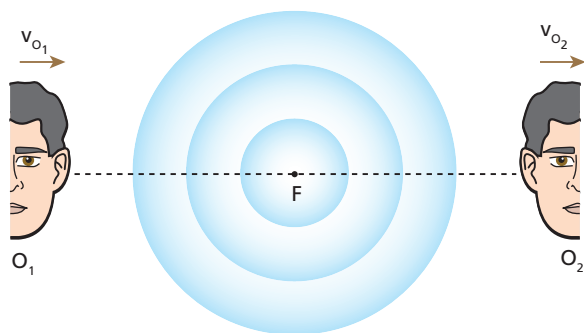
$$f_1 = \frac{fv}{v - v_F} \quad \text{(I)}$$

**Cálculo de $f_2$:**

$$\lambda_2 = \lambda + v_F\,T$$

$$\frac{v}{f_2} = \frac{v}{f} + \frac{v_F}{f}$$

$$f_2 = \frac{fv}{v + v_F} \quad \text{(II)}$$

Até aqui, consideramos apenas o efeito Doppler causado pelo movimento da fonte. Considere, a seguir, que a fonte seja fixa, mas que os observadores estejam em movimento:

**Cálculo de $f_1$:**

Se $O_1$ estivesse em repouso, ele receberia, num intervalo de tempo $\Delta t$, **N** ondas completas, percebendo a frequência $f = \frac{N}{\Delta t}$, que é a frequência da fonte. Entretanto, pelo fato de estar em movimento com velocidade $v_{O_1}$, $O_1$ percorre a distância $v_{O_1}\,\Delta t$ durante esse intervalo de tempo. Consequentemente, esse observador recebe $\frac{v_{O_1}\Delta t}{\lambda}$ vibrações além daquelas **N** que receberia se estivesse em repouso. De fato, $\frac{v_{O_1}\Delta t}{\lambda}$ representa o número de comprimentos de onda, ou vibrações, que cabem na distância $v_{O_1}\,\Delta t$ percorrida por $O_1$. Assim, esse observador percebe uma frequência $f_1$ que é dada por:

$$f_1 = \frac{N + \frac{v_{O_1}\Delta t}{\lambda}}{\Delta t} = \frac{N}{\Delta t} + \frac{v_{O_1}}{\lambda} = f + \frac{v_{O_1} f}{v}$$

$$f_1 = \frac{f(v + v_{O_1})}{v} \quad \text{(III)}$$

**Cálculo de $f_2$:**

Nesse caso, o observador $O_2$ recebe $\frac{v_{O_2}\Delta t}{\lambda}$ vibrações a menos do que receberia se estivesse em repouso, percebendo uma frequência $f_2$ dada por:

$$f_2 = \frac{N - \frac{v_{O_2}\Delta t}{\lambda}}{\Delta t} = \frac{N}{\Delta t} - \frac{v_{O_2}}{\lambda} = f - \frac{v_{O_2} f}{v}$$

$$f_2 = \frac{f(v - v_{O_2})}{v} \quad \text{(IV)}$$

Observemos que, se $v_{O_2}$ é igual a **v**, temos $f_2 = 0$. Assim, o observador não percebe vibrações, uma vez que, pelo fato de estar viajando com as ondas, permanece numa região de pressão constante.

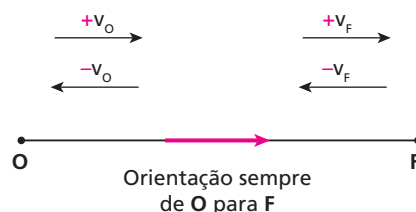
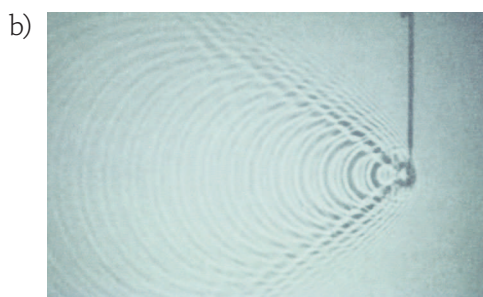
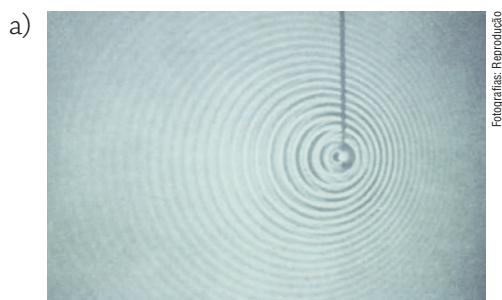
Evidentemente, tanto o observador como a fonte podem estar em movimento. Nesse caso, reunimos as expressões (I), (II), (III) e (IV), obtendo, assim, a fórmula geral para a frequência Doppler ($f_D$), também chamada de frequência aparente:

$$f_D = f\,\frac{v \pm v_O}{v \pm v_F}$$

em que os sinais $\pm$ podem ser obtidos pela seguinte convenção: o segmento de reta ligando o observador **O** até a fonte **F** é orientado sempre de **O** para **F**, quaisquer que sejam as posições de **O** e de **F**.

a)

b)

Fotografias: Reprodução

Fotografias de ondas produzidas na superfície da água por uma fonte móvel quando:
a) a velocidade da fonte é menor que a da propagação das ondas (efeito Doppler);
b) a velocidade da fonte é maior que a da propagação das ondas (formação de ondas de choque).

Randy Wells/Stone/Getty Images

Na fotografia, barcos em movimento com velocidades mais intensas do que a velocidade de propagação das ondas que geram na água.

**Notas:**

- A frequência percebida pelo observador ($f_D$), que chamamos de frequência Doppler, costuma ser chamada também de frequência aparente.
- Caso as velocidades do observador e da fonte não estejam alinhadas com a reta que passa por eles, deve-se operar com as componentes dessas velocidades segundo a referida reta.

## Exercícios — nível 1

**58.** Analise as seguintes afirmações:
(01) Durante a apresentação de uma orquestra, um som grave emitido por um contrabaixo e um agudo emitido por um violino propagam-se com a mesma velocidade até a plateia.
(02) Uma locomotiva parada numa estação emite um som (apito) que se propaga no ar (sem vento) a 340 m/s. Se, em vez de estar parada, a locomotiva estivesse passando pela mesma estação a 20 m/s, o som emitido (apito) se propagaria, no sentido do movimento da locomotiva, a 360 m/s.
(04) Quando aumentamos o volume do rádio, a velocidade do som emitido por ele também aumenta.
(08) Ondas sonoras de maior amplitude são sempre mais velozes que as de amplitude menor.
Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

**59.** A velocidade do som no ar a 0 °C é de 330 m/s. Considerando o ar um gás perfeito, calcule a velocidade com que o som se propaga nele a 30 °C.

**60.** O efeito Doppler é observado somente quando:
a) a fonte da onda emitida e o observador mantêm uma distância constante.
b) existe um movimento relativo de aproximação ou de afastamento entre a fonte emissora de onda e o observador.
c) a onda emitida pela fonte é transversal e de grande amplitude.
d) a fonte e o observador movem-se com a mesma velocidade (vetorial), em relação ao meio de propagação da onda.
e) a fonte da onda é mais veloz que a onda.

**61.** (UFRGS-RS) Indique a alternativa que preenche corretamente o texto abaixo.
O alarme de um automóvel está emitindo som de uma determinada frequência. Para um observador que se aproxima rapidamente desse automóvel, esse som parece ser de .... frequência. Ao afastar-se, o mesmo observador perceberá um som de .... frequência.
a) maior — igual
b) maior — menor
c) igual — igual
d) menor — maior
e) igual — menor

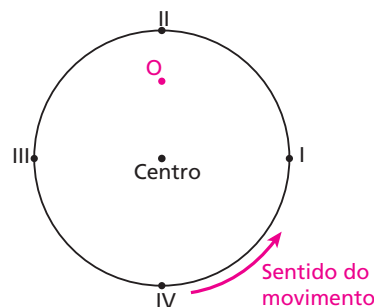
**62.** (Unifor-CE) Quando uma ambulância, com sirene ligada, se aproxima de um observador, este percebe:
a) aumento da intensidade sonora e da frequência.
b) aumento da intensidade sonora e diminuição da frequência.
c) mesma intensidade sonora e mesma frequência.
d) diminuição da altura e variação no timbre sonoro.
e) variação no timbre e manutenção da altura.

**63.** O som emitido pelo motor de um carro de corrida soa, para o espectador, de forma diferente quando ocorre aproximação e quando ocorre afastamento entre ele e o veículo. No entanto, sabemos que essas diferenças não existem para o piloto do carro. Se **f** é a frequência do som ouvido pelo piloto, $f_1$ é a frequência ouvida pelo espectador na aproximação e $f_2$ é a frequência ouvida pelo espectador no afastamento, então:
a) $f = f_1 < f_2$.
b) $f > f_1 = f_2$.
c) $f_1 < f > f_2$.
d) $f_1 > f > f_2$.
e) $f_1 < f < f_2$.

**64.** Dois trens **A** e **B** têm apitos idênticos. Um observador parado numa estação ouve o apito de **A** mais agudo que o de **B**. Qual (quais) das situações abaixo pode(m) viabilizar o caso proposto?

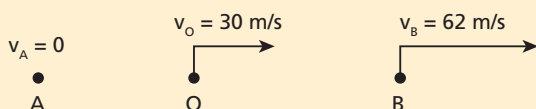
I. Os trens **A** e **B** aproximam-se do observador.
II. Os trens **A** e **B** afastam-se do observador.
III. O trem **B** afasta-se do observador, enquanto o trem **A** está parado.
IV. O trem **A** afasta-se do observador, enquanto o trem **B** está parado.
V. O trem **B** afasta-se do observador, enquanto o trem **A** aproxima-se.

a) Somente I e II.
b) Somente III e IV.
c) Somente I, II, III e V.
d) Somente I, II e III.
e) Somente V.

**65.** Um automóvel percorre uma pista circular em movimento uniforme. A buzina é acionada quando ele passa pelos pontos I, II, III e IV.
Um observador em repouso no ponto **O** ouve o som da buzina mais agudo quando ela é acionada em que ponto?

## Exercícios nível 2

**66. E.R.** Duas fontes sonoras **A** e **B** emitem sons puros de mesma frequência, igual a 680 Hz. A fonte **A** está fixa no solo e **B** move-se para a direita, afastando-se de **A** com velocidade de 62 m/s em relação ao solo. Um observador entre as fontes move-se para a direita, com velocidade de 30 m/s também em relação ao solo.
Determine:
a) a frequência do som proveniente da fonte **A**, ouvida pelo observador;
b) a frequência do som proveniente da fonte **B**, ouvida pelo observador;
c) a frequência do batimento devido à superposição dessas ondas, admitindo-se que suas amplitudes sejam iguais (ou aproximadamente iguais).
**Dado:** velocidade do som no ar = 340 m/s

**Resolução:**
Façamos, inicialmente, um esquema mostrando a situação descrita:

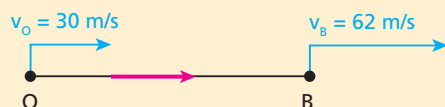
$v_A = 0$ (A) $v_O = 30$ m/s (O) $v_B = 62$ m/s (B)

Para o cálculo da frequência $f_D$ ouvida pelo observador (frequência Doppler), devemos estabelecer um sentido de referência, sempre do observador para a fonte, e aplicar a fórmula:

$$f_D = f\frac{v \pm v_O}{v \pm v_F}$$

a) Assim, para o som proveniente da fonte **A**, temos:

$$f = 680 \text{ Hz},\ v = 340 \text{ m/s},\ v_O = 30 \text{ m/s},\ v_F = v_A = 0$$

$$\text{e } f_D = 680 \cdot \frac{340 - 30}{340} \Rightarrow \boxed{f_D = 620 \text{ Hz}}$$

b) Para o som proveniente da fonte **B**, temos:

$$f = 680 \text{ Hz},\ v = 340 \text{ m/s},\ v_O = 30 \text{ m/s},\ v_F = v_B = 62 \text{ m/s}$$

$$\text{e } f_D = 680 \cdot \frac{340 + 30}{340 + 62} \Rightarrow \boxed{f_D = 626 \text{ Hz}}$$

c) A superposição de duas ondas sonoras de amplitudes iguais (ou aproximadamente iguais) e de frequências próximas resulta no fenômeno denominado batimento, cuja frequência é dada pela diferença:

$$f_{BAT} = f_2 - f_1 \qquad (f_2 > f_1)$$

Assim:

$$f_{BAT} = 626 - 620 \Rightarrow \boxed{f_{BAT} = 6 \text{ Hz}}$$

**67.** Um avião emite um som de frequência f = 600 Hz e percorre uma trajetória retilínea com velocidade $v_a$ = 300 m/s. O ar apresenta-se imóvel. A velocidade de propagação do som é v = 330 m/s. Determine a frequência do som recebido por um observador estacionário junto à trajetória do avião:
a) enquanto o avião aproxima-se do observador;
b) quando o avião afasta-se do observador.

**68.** (ITA-SP) Considere a velocidade máxima permitida nas estradas como sendo exatamente 80 km/h. A sirene de um posto rodoviário soa com uma frequência de 700 Hz, enquanto um veículo de passeio e um policial rodoviário se aproximam do posto emparelhados. O policial dispõe de um medidor de frequências sonoras. Dada a velocidade do som, de 350 m/s, ele deverá multar o motorista do carro a partir de que frequência mínima medida?

**69.** (PUC-SP) Uma fonte sonora está adaptada a um veículo que se desloca em trajetória retilínea e se aproxima, freando, de um observador parado. Sendo **f** a frequência do som emitido pela fonte, podemos afirmar que o som percebido pelo observador tem frequência:
a) invariável.
b) crescente e inferior a **f**.
c) crescente e superior a **f**.
d) decrescente e superior a **f**.
e) decrescente e inferior a **f**.

Thinkstock/Getty Images

# Leitura

## Técnica Doppler de diagnose por ultrassom

O uso do efeito Doppler para examinar as partes internas do corpo humano que se movem, como a válvula mitral, as paredes do coração, a fisiologia fetal e os fluidos, especialmente o sangue, é chamado de **técnica Doppler de diagnose por ultrassom**.

Na medição da velocidade **V** do sangue – por exemplo, numa artéria –, uma onda ultrassônica contínua, de frequência **f**, emitida por um transdutor estacionário, é "recebida" por algumas células vermelhas do sangue, que se afastam da fonte, conforme ilustra a figura 1.

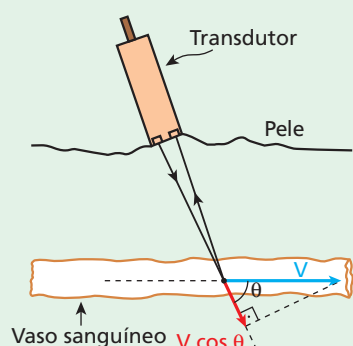



Figura 1

Nessa situação, o transdutor é a fonte de ondas (**F**) e a célula vermelha é o observador (**O**). A célula "percebe" o ultrassom com uma frequência aparente $f_D$, ligeiramente menor que **f**, porque ela se afasta do transdutor com velocidade **V** cos θ (veja a figura 2).

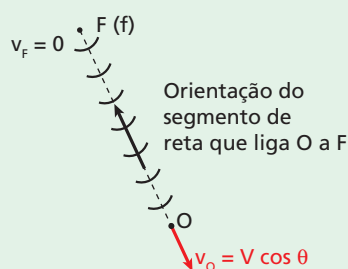



Figura 2

Sendo **v** a velocidade do ultrassom nos tecidos, vamos determinar $f_D$:

$$f_D = f\frac{v \pm v_O}{v \pm v_F} \Rightarrow f_D = f\frac{v - V\cos\theta}{v}$$

($f_D$ é ligeiramente menor que **f**)

A onda que atinge a célula é refletida e captada pelo transdutor. Nessa situação, a célula é a fonte (**F**), que envia um ultrassom de frequência $f_D$ ao transdutor, que é o observador (**O**). O transdutor "perceberá" um ultrassom com frequência $f'_D$ ainda menor que $f_D$ (veja a figura 3).

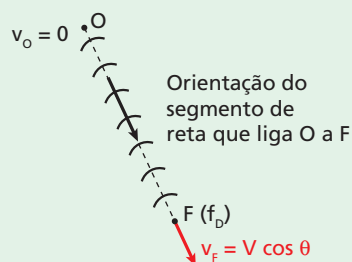



Figura 3

Para determinar $f'_D$, é preciso entender que, nesse cálculo, a frequência (**f**) da fonte, na fórmula do efeito Doppler, deve ser substituída por $f_D$, pois a célula envia uma onda que tem a mesma frequência da onda que ela recebeu:

$$f'_D = f_D \frac{v}{v + V\cos\theta} \quad \text{(ainda menor que } f_D\text{)}$$

Substituindo $f_D$ nessa expressão, obtemos:

$$f'_D = f\frac{v - V\cos\theta}{v} \cdot \frac{v}{v + V\cos\theta} = f\frac{v - V\cos\theta}{v + V\cos\theta}$$

A variação de frequência detectada pelo transdutor, que inicialmente emitiu frequência **f**, é:

$$\Delta f = f - f'_D = f - f\frac{v - V\cos\theta}{v + V\cos\theta} = \frac{2fV\cos\theta}{v + V\cos\theta}$$

Como V cos θ é muito menor que a velocidade **v** do ultrassom, podemos simplificar a última expressão. Assim, obtemos:

$$\boxed{\Delta f = \frac{2fV\cos\theta}{v}}$$

Dessa forma, medindo-se Δf e **θ** e conhecendo-se **f** e **v**, pode-se determinar a velocidade do fluxo sanguíneo **V**. Isso permite detectar o bloqueio de vasos, tromboses, existência de placas ateromatosas etc.

Para vasos periféricos, as frequências ultrassônicas entre 5 MHz e 10 MHz dão o melhor compromisso entre resolução e alcance. Para vasos mais profundos, como a aorta torácica, usam-se frequências da ordem de 2 MHz.

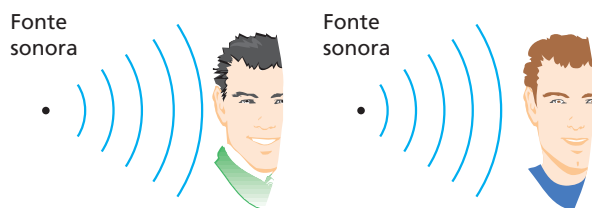
Nos exames pré-natais, a técnica Doppler é usada para detectar movimentos do coração fetal e gestação múltipla, localizar a placenta e monitorar a vida fetal, pois os exames radiológicos devem ser evitados.

A mesma técnica Doppler descrita para a diagnose por ultrassom é usada nos radares que medem as velocidades dos veículos nas rodovias. Entretanto, esses radares operam com ondas eletromagnéticas.

(Adaptado de: OKUNO, Emico; CALDAS, Iberê L.; CHOW, Cecil. *Física para ciências biológicas e biomédicas*. São Paulo: Harbra/Harper & Row do Brasil, 1982.)

# Bloco 5

## 13. Sonoridade

No item 5 deste Tópico, conceituamos intensidade sonora. Tratava-se, naquele caso, de uma intensidade física, definida em termos puramente energéticos. Entretanto, quando uma mesma onda sonora atinge duas pessoas, as sensações sonoras podem ser diferentes. É possível, até, que uma das pessoas ouça bem e a outra não perceba nenhuma sensação sonora. Estamos nos referindo, agora, à **sensação sonora** ou **sonoridade**.

Dois observadores recebendo ondas sonoras idênticas de mesma intensidade. A quantidade de energia que cada um recebe por unidade de área e por unidade de tempo é a mesma (igual intensidade), mas as sensações sonoras percebidas podem ser diferentes (sonoridades diferentes).

É evidente que, para um ouvinte normal, a sonoridade aumenta quando a intensidade de determinado som também aumenta. A sonoridade depende ainda da frequência do som, pois o aparelho auditivo é mais sensível a algumas frequências que a outras.

A máxima sensibilidade do aparelho auditivo é verificada para frequências entre 2 kHz e 4 kHz. Isso significa que, se um mesmo ouvinte receber dois sons de mesma intensidade, porém um de 2 kHz e o outro de 12 kHz, por exemplo, o primeiro será sentido mais fortemente (maior sonoridade) que o segundo. Podemos dizer, ainda, que se as ondas tiverem frequências infrassônicas ou ultrassônicas, a sonoridade evidentemente será nula, qualquer que seja a intensidade dessas ondas.

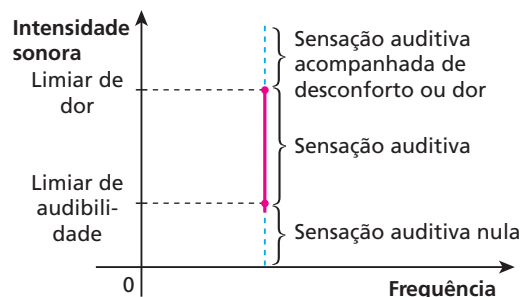
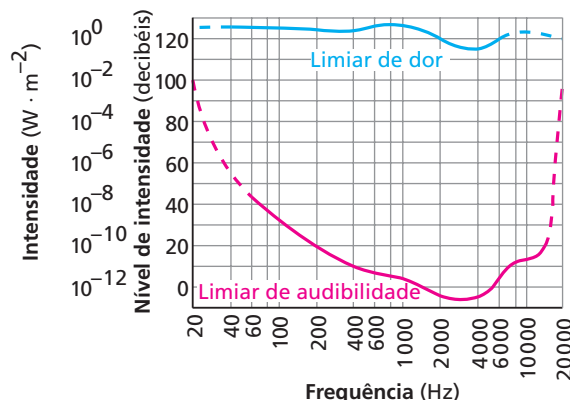
Em resumo:

A **sonoridade** ou **sensação sonora** depende da intensidade sonora, do ouvinte e da frequência do som considerado.

Weber e Fechner verificaram que as sensações sonoras (e outras) são, para cada ouvinte, aproximadamente proporcionais ao logaritmo da excitação, ou seja, da intensidade sonora. Essa conclusão é conhecida como **Lei Psicofísica de Weber-Fechner**.

## 14. Nível relativo de intensidade

Suponha que uma pessoa receba um som de frequência constante, cuja intensidade é aumentada gradativamente a partir de zero. Enquanto não atingir uma intensidade mínima, esse som não será percebido, ainda que o ouvinte escute normalmente. A intensidade mínima que um som precisa ter, para ser ouvido, denomina-se **limiar de sensação auditiva** ou **limiar de audibilidade**. Esse limiar depende da frequência do som.

Aumentando-se a intensidade sonora a partir desse limiar, o som é percebido cada vez mais fortemente, até que, a partir de certo valor da intensidade, à sensação sonora acrescenta-se uma sensação de desconforto ou de dor. A esse valor dá-se o nome de **limiar de sensação dolorosa** ou **limiar de dor**, que também depende, mas apenas ligeiramente, da frequência.

Como dissemos, os limiares variam com a frequência do som. Medidas obtidas em laboratório em toda a faixa audível levaram à construção da **curva de audibilidade** ou **audiograma**, conforme mostra a figura a seguir. É claro que o audiograma varia de acordo com o ouvinte, mas, em média, é isso que vamos considerar.

Como podemos observar, o aparelho auditivo é mais sensível a frequências compreendidas entre 2 000 Hz e 4 000 Hz. Isso significa que é nesse intervalo que conseguimos ouvir os sons de menor intensidade.

Em audição normal, o aparelho auditivo humano percebe sons cujas intensidades podem variar na ampla faixa de $10^{-12}$ W/m$^2$ a 1 W/m$^2$. Esses valores em si e a faixa extremamente extensa em que comparecem contribuem para dificultar seu uso na prática. Por isso, e também com o incentivo dado pela Lei de Weber-Fechner, definiu-se o nível relativo de intensidade sonora (**N**) pela expressão:

$$N = k \log \frac{I}{I_{ref}}$$

em que:
**k** é uma constante de proporcionalidade;
**I** é a intensidade sonora de um som;
**N** é seu nível relativo de intensidade em relação a um som de referência de intensidade $I_{ref}$.

O som de referência adotado tem intensidade igual a $10^{-12}$ W/m$^2$ e corresponde, aproximadamente, ao limiar de sensação auditiva na frequência de 1 kHz.

Inicialmente, adotou-se **k** igual a 1. Nesse caso, o nível **N** é medido em **bels** (plural de bel, símbolo **B**), nome dado em homenagem ao físico escocês Alexander Graham Bell (1847-1922), inventor, dentre outras coisas, do telefone.

Assim:

$$N = \log \frac{I}{I_{ref}}, \text{ em bels.}$$

Entretanto, pelo fato de a unidade bel ser muito grande, prefere-se utilizar, na prática, uma unidade que corresponde a um décimo do bel, ou seja, o **decibel**.

Desse modo, temos, fazendo k = 10:

$$N = 10 \log \frac{I}{I_{ref}}, \text{ em decibels (dB)}$$

Observe que, para um som de intensidade $I = I_{ref}$, temos:

$$N = 10 \log \frac{I_{ref}}{I_{ref}} = 10 \cdot 0$$

$$N = 0 \text{ dB}$$

No limiar de sensação dolorosa, temos **I** por volta de 1 W/m$^2$, e sendo $I_{ref} = 10^{-12}$ W/m$^2$, encontramos:

$$N = 10 \log \frac{1}{10^{-12}}$$

$$N = 120 \text{ dB}$$

O limiar de sensação dolorosa é, então, igual a 120 dB, o que significa que os sons desconfortantes estão em níveis superiores a 120 dB.

É importante notar que o uso do nível de intensidade sonora (**N**), em substituição à intensidade sonora (**I**), permite comparar sons lidando com números bem mais simples. Assim, em vez de falarmos num som de $10^{-9}$ W/m$^2$, falamos num som de 30 dB.

| Valores aproximados de alguns níveis de intensidade sonora | |
|---|---|
| Respiração normal | 10 dB |
| Respiração ofegante | 30 dB |
| Ambiente em boas condições para dormir | 35 dB |
| Conversação em ambiente silencioso (como numa biblioteca) | 45 dB |
| Duas pessoas conversando a 1 m de distância | 60 dB |
| Conversação em festa barulhenta | 90 dB |
| Rua barulhenta | 90 dB |
| Concerto de *rock* | 120 dB |
| Trovão próximo | 120 dB |
| Jato decolando a 30 m de distância* | 140 dB |
| Grandes explosões (nas proximidades)* | 200 dB |

*Perigo para o aparelho auditivo.

**Nota:**

- As unidades bel e decibel foram estabelecidas originariamente para medir atenuações de sinais em linhas telefônicas. Com o tempo, o uso dessas unidades difundiu-se, sendo hoje largamente empregadas em eletricidade para comparar níveis de sinais elétricos de tensão, potência etc.

## Exercícios — nível 1

**70. E.R.** Que nível de intensidade, em decibels, terá o som recebido por uma pessoa a 10 m de um instrumento musical que emite uma onda sonora de potência constante igual a 125,6 μW?
**Dados:** $\pi = 3,14$ e $I_{ref} = 10^{-12}$ W/m².

**Resolução:**
O nível relativo de intensidade de um som é dado, em decibels, por:

$$N = 10 \log \frac{I}{I_{ref}}$$

Considerando o som uma onda esférica, a intensidade **I** recebida no local citado é calculada por:

$$I = \frac{Pot}{4\pi x^2}$$

Assim, sendo Pot = 125,6 μW = $125,6 \cdot 10^{-6}$ W, $\pi = 3,14$ e x = 10 m, temos:

$$I = \frac{125,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^2} \Rightarrow I = 1 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

Portanto:

$$N = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 10^5 = 50$$

$$\boxed{N = 50 \text{ dB}}$$

**71.** A mais gigantesca onda sonora registrada na história foi o som da explosão do vulcão de Krakatoa, perto de Java, no oceano Índico. Essa onda sonora foi ouvida a 4 800 km do local.
Supondo que essa onda seja esférica, que não houve dissipação de energia em sua propagação e que a intensidade mínima necessária para ela ser ouvida seja de $10^{-12}$ W/m², determine a potência da explosão, em watts.

Philippe Crochet/PHOTONONSTOP/Diomedia

**72.** (UFPA) Uma fonte puntiforme produz a 50 m de distância um som cujo nível de intensidade vale 50 dB. Em watts, a potência da fonte vale:
a) $\pi \cdot 10^{-1}$.
b) $\pi \cdot 10^{-3}$.
c) $2\pi \cdot 10^{-2}$.
d) $4\pi \cdot 10^{-3}$.
e) $5\pi \cdot 10^{-2}$.

**73.** Com um decibelímetro, mede-se o nível de ruído em um ponto do cruzamento das avenidas Ipiranga e São João (São Paulo). Uma primeira amostragem, levantada às 3h, revela 60 dB, enquanto outra, obtida às 18h, acusa 100 dB. Por quanto ficou multiplicada a intensidade sonora da primeira para a segunda amostragem?

## Exercícios — nível 2

**74.** A orelha de um ouvinte normal recebe um som de intensidade $I_1 = 1\,000\, I_{ref}$, em que $I_{ref}$ é uma intensidade sonora tomada como referência.
Em seguida, recebe um som de mesma frequência, mas de intensidade $I_2$ igual ao dobro da anterior, ou seja, $I_2 = 2I_1$.
A sensação sonora também dobrou? Justifique com cálculos.
**Dado:** log2 = 0,30

**75. E.R.** Considere dois sons de intensidades $I_1$ e $I_2$ e níveis sonoros $N_1$ e $N_2$, respectivamente. Determine $\Delta N = N_2 - N_1$, em decibels.

**Resolução:**
Temos que:

$$N_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_{ref}} \quad \text{e} \quad N_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_{ref}}$$

Então:

$$N_2 - N_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_{ref}} - 10 \log \frac{I_1}{I_{ref}}$$

$$N_2 - N_1 = 10 \left( \log \frac{I_2}{I_{ref}} - \log \frac{I_1}{I_{ref}} \right)$$

$$N_2 - N_1 = 10 \log \frac{\frac{I_2}{I_{ref}}}{\frac{I_1}{I_{ref}}} \Rightarrow \boxed{\Delta N = N_2 - N_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}}$$

**76.** (Aman-RJ) Num estádio de futebol, o nível de intensidade sonora é normalmente de 60 dB. No momento de um gol a intensidade sonora amplia-se 1 000 vezes. Qual é, em dB, o nível de intensidade sonora no momento do gol?

**77.** (UCDB-MT) A orelha humana é muito sensível às variações de frequência de um som, percebendo variações da ordem de 1%. No entanto, tem sensibilidade bastante menor às variações de potência das ondas sonoras. São necessárias variações da ordem de 25% na potência para serem percebidas pela orelha. Assim, a definição do decibel significa que, para duas potências sonoras que se diferenciam de **n** decibéis, vale a relação:

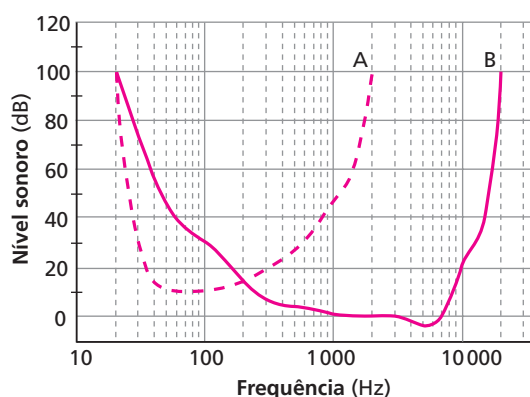
$$n = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

Quando n = 1 decibel, $\frac{P_2}{P_1} = 1,26$, ou seja,

para um aumento de 1 decibel na sensação sonora é necessário um aumento de 26% na potência da onda sonora.
Se n = 10 decibéis, o aumento da potência, em porcentagem, é de:
a) 900%. b) 126%. c) 90%. d) 50%. e) 9%.

**78.** (Unicamp-SP) É usual medirmos o nível de uma fonte sonora em decibéis (dB). O nível em dB é relacionado à intensidade **I** da fonte pela fórmula:

$$\text{Nível sonoro (dB)} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

em que $I_0 = 10^{-12}$ W/m² é um valor-padrão de intensidade muito próximo do limite de audibilidade humana.
Os níveis sonoros necessários para uma pessoa ouvir variam de indivíduo para indivíduo. No gráfico abaixo esses níveis estão representados em função da frequência do som para dois indivíduos, **A** e **B**. O nível sonoro acima do qual um ser humano começa a sentir dor é aproximadamente 120 dB, independentemente da frequência.

a) Que frequências o indivíduo **A** consegue ouvir melhor que o indivíduo **B**?
b) Qual a intensidade **I** mínima de um som (em W/m²) que causa dor em um ser humano?
c) Um beija-flor bate as asas 100 vezes por segundo, emitindo um ruído que atinge o ouvinte com um nível de 10 dB. Quanto a intensidade **I** desse ruído precisa ser amplificada para ser audível pelo indivíduo **B**?

**79.** (Cesgranrio-RJ) Quando a orelha humana é submetida prolongadamente a ruídos de nível sonoro superior a 85 dB, sofre lesões irreversíveis. Por isso, o *Ministério do Trabalho* estabelece o intervalo de tempo máximo diário que um trabalhador pode ficar exposto a sons muito intensos. Esses dados são apresentados na tabela a seguir.

| **Nível sonoro** (dB) | **Intervalo de tempo máximo de exposição** (h) |
|---|---|
| 85 | 8 |
| 90 | 4 |
| 95 | 2 |
| 100 | 1 |

Observe, portanto, que a cada aumento de 5 dB no nível sonoro, o intervalo de tempo máximo de exposição reduz-se à metade. Sabe-se ainda que, ao assistir a um *show* de *rock*, espectadores próximos às caixas de som ficam expostos a níveis sonoros em torno de 110 dB. De acordo com as informações acima, responda:
a) Qual deveria ser a duração máxima de um *show de rock* para os espectadores próximos às caixas de som?
b) De 90 dB para 105 dB, que redução percentual ocorre no intervalo de tempo máximo de exposição?
c) Sejam, respectivamente, **I** a intensidade sonora correspondente a 110 dB (nível sonoro nas proximidades das caixas de som nos *shows* de *rock*) e $I_0$ a intensidade sonora correspondente a 0 dB (silêncio). Determine a razão $\frac{I}{I_0}$.

## Leitura

### Nossa sensibilidade auditiva e os enganos da potência

Nosso sistema auditivo é bastante sensível às alterações da frequência do som. De fato, variações muito pequenas da frequência do som nos fazem perceber que ele se tornou um pouco mais grave ou um pouco mais agudo.

Entretanto, nossa sensibilidade às alterações da intensidade sonora é muito pequena. Experimentos revelam que o limiar da nossa percepção de variações de intensidade sonora é aproximadamente igual a 1 dB. Isso significa que o nível sonoro precisa aumentar cerca de 1 dB para que possamos perceber um ligeiro aumento, quase imperceptível, da intensidade sonora. Veja que o aumento de 1 dB no nível relativo de intensidade (**N**) corresponde a um aumento significativo da intensidade sonora (**I**). Para isso, vamos usar o resultado do exercício resolvido 75:

$$\Delta N = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

em que $\Delta N$ é a diferença entre os níveis relativos de intensidade de dois sons de intensidades $I_1$ e $I_2$. Fazendo $\Delta N = 1$ dB, temos:

$$1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_1} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^{0{,}1} \cong 1{,}26 \Rightarrow I_2 \cong 1{,}26\, I_1$$

Note que, para o nível sonoro aumentar 1 dB, a intensidade sonora, e portanto a potência sonora, precisa aumentar cerca de 26%.

Para que uma pessoa com audição normal reconheça mais claramente que a intensidade sonora realmente aumentou, é necessário um $\Delta N$ de aproximadamente 3 dB. Veja o que isso significa:

$$\Delta N = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow 3 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_1} = 0{,}3 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^{0,3} \cong 2 \Rightarrow I_2 \cong 2\, I_1$$

Então, a intensidade e a potência sonoras precisam dobrar. Assim, se você tiver um sistema de som de 100 W de potência real e trocá-lo por outro de 200 W de potência também real, perceberá, supondo que ambos estejam operando a toda potência, que o som ficou apenas um pouco mais forte.

Para você poder julgar que o nível sonoro realmente dobrou, é preciso um $\Delta N$ da ordem de 10 dB:

$$\Delta N = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow 10 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_1} = 1 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10 \Rightarrow I_2 = 10\, I_1$$

Portanto, a potência precisa ser multiplicada por 10. Então, um sistema de som de 100 W precisaria ser trocado por outro de 1 000 W para você julgar que o nível sonoro dobrou. E tudo isso acontece porque a percepção do nosso sistema auditivo é aproximadamente logarítmica e não linear.

## Descubra mais

**1.** Quando encostamos nossa orelha na abertura de uma concha marinha, ouvimos um som característico: o "barulho do mar". Qual é a causa desse "barulho"?

> **CUIDADO!**
> **Não faça esse experimento. Embora o hélio seja um gás inerte, sua aspiração reduz a pressão parcial de oxigênio nos pulmões, o que pode causar asfixia.**

**2.** O gás hélio é muito usado para inflar aqueles balões de borracha frequentemente vendidos em parques de diversão. Se uma pessoa aspirar o gás hélio de um desses balões e falar em seguida, perceberá que o timbre de sua voz foi drasticamente alterado. Explique por que isso acontece.

## Exercícios — nível 3

**80.** O aparelho auditivo, considerado no seu conjunto uma "caixa-preta", que detecta um sinal sonoro no ar e o transmite ao cérebro, tem como grandezas de entrada e saída:
a) variação de pressão — impulsos elétricos.
b) variação de pressão — compressão e distensão de moléculas.
c) variação de velocidade de moléculas — concentração iônica nas células.
d) variação de velocidade — impulsos elétricos.
e) variação de pressão — concentração iônica nas células.

**81.** (Vunesp-SP) Numa experiência para determinar a velocidade do som, dois observadores colocaram-se a uma distância de 5,0 km um do outro, munidos de um revólver e um cronômetro. O observador em **A** acionou seu cronômetro no instante em que viu o clarão do disparo de revólver de **B**, tendo registrado que o som levou 15,5 s para chegar à sua orelha. Em seguida, **A** atirou e **B** registrou o tempo de 14,5 s até ouvir o estampido. Calcule a velocidade do som e a componente da velocidade do vento ao longo da linha AB.

**82.** (UFU-MG) Um estudante de Física encontra-se a certa distância de uma parede, de onde ouve o eco de suas palmas. Desejando calcular a que distância encontra-se da parede, ele ajusta o ritmo de suas palmas até deixar de ouvir o eco, pois este chega ao mesmo tempo que ele bate as mãos. Se o ritmo das palmas é de 30 palmas por minuto e a velocidade do som é aproximadamente 330 m/s, qual sua distância à parede?

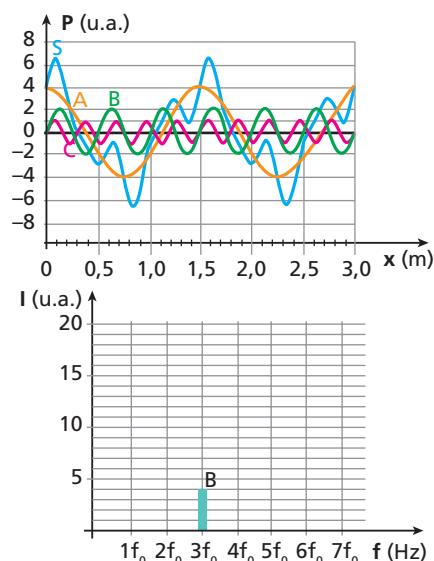
**83.** (Unicamp-SP) Em 2009 completaram-se vinte anos da morte de Raul Seixas. Na sua obra o roqueiro cita elementos regionais brasileiros, como na canção "Minha viola", na qual ele exalta esse instrumento emblemático da cultura regional.
A viola caipira possui cinco pares de cordas. Os dois pares mais agudos são afinados na mesma nota e frequência. Já os pares restantes são afinados na mesma nota, mas com diferença de altura de uma oitava, ou seja, a corda fina do par tem frequência igual ao dobro da frequência da corda grossa.
As frequências naturais da onda numa corda de comprimento **L** com as extremidades fixas são dadas por $f_N = N\left(\frac{v}{2L}\right)$, sendo **N** o harmônico da onda e **v** a sua velocidade.

a) Na afinação Cebolão Ré Maior para a viola caipira, a corda mais fina do quinto par é afinada de forma que a frequência do harmônico fundamental é $f_1^{fina} = 220$ Hz. A corda tem comprimento L = 0,5 m e densidade linear $\mu = 5 \times 10^{-3}$ kg/m.
Encontre a tensão $\tau$ aplicada na corda, sabendo que a velocidade da onda é dada por $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$.

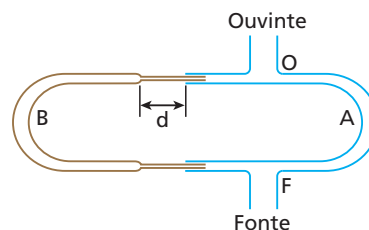
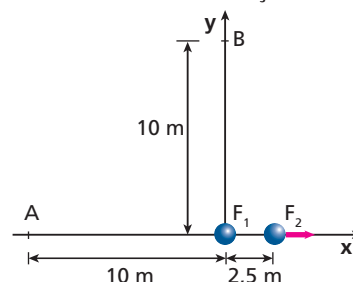
b) Suponha que a corda mais fina do quinto par esteja afinada corretamente com $f_1^{fina} = 220$ Hz e que a corda mais grossa esteja ligeiramente desafinada, mais frouxa do que deveria estar. Neste caso, quando as cordas são tocadas simultaneamente, um batimento se origina da sobreposição das ondas sonoras do harmônico fundamental da corda fina de frequência $f_1^{fina}$, com o segundo harmônico da corda grossa, de frequência $f_2^{grossa}$. A frequência do batimento é igual à diferença entre essas duas frequências, ou seja, $f_{bat} = f_1^{fina} - f_2^{grossa}$.
Sabendo que a frequência do batimento é $f_{bat} = 4$ Hz, qual é a frequência do harmônico fundamental da corda grossa, $f_1^{grossa}$?

**84.** (Fuvest-SP) O som produzido por um determinado instrumento musical, longe da fonte, pode ser representado por uma onda complexa **S**, descrita como uma sobreposição de ondas senoidais de pressão, conforme a figura. Nela, está representada a variação da pressão **P** em função da posição, em determinado instante, estando as três componentes de **S** identificadas por **A**, **B** e **C**.

a) Determine os comprimentos de onda, em metros, de cada uma das componentes **A**, **B** e **C**.
b) Determine o comprimento de onda $\lambda_0$, em metros, da onda **S**.
c) Copie o gráfico apresentado a seguir, representando as intensidades das componentes **A** e **C**. Nesse mesmo gráfico, a intensidade da componente **B** já está representada, em unidades arbitrárias.

> **Note e adote:**
> u.a. = unidade arbitrária; velocidade do som ≅ 340 m/s
> A intensidade **I** de uma onda senoidal é proporcional ao quadrado da amplitude de sua onda de pressão.
> A frequência $f_0$ corresponde à componente que tem menor frequência.

**85.** (PUC-SP) Dois diapasões vibram com frequências $f_1 = 32\,000$ Hz e $f_2 = 30\,000$ Hz. Se os dois diapasões forem colocados próximos um do outro, um ouvinte:

a) ouvirá um som de frequência 2 000 Hz.
b) não ouvirá som algum.
c) ouvirá apenas o som de frequência 32 000 Hz.
d) ouvirá apenas o som de frequência 30 000 Hz.
e) ouvirá um som de frequência 31 000 Hz.

**86.** (Fatec-SP) O esquema abaixo representa um trombone de Quincke. A fonte é um diapasão próximo a **F**. O ouvinte constata intensidade mínima para $d_1 = 5$ cm e novamente para $d_2 = 15$ cm. Qual o comprimento de onda do som dentro do tubo?

**87.** (Fuvest-SP) Duas fontes sonoras $F_1$ e $F_2$ estão inicialmente separadas de 2,5 m. Dois observadores **A** e **B** estão distantes 10 m da fonte $F_1$, sendo que o observador **A** está no eixo **x** e o observador **B**, no eixo **y**, conforme indica a figura. As duas fontes estão em fase e emitem som numa frequência fixa f = 170 Hz. Num dado instante, a fonte $F_2$ começa a se deslocar lentamente ao longo do eixo **x**, afastando-se da fonte $F_1$. Com esse deslocamento, os dois observadores detectam uma variação períodica na intensidade do som resultante das duas fontes, passando por máximos e mínimos consecutivos de intensidade. Sabe-se que a velocidade do som é 340 m/s nas condições do experimento.

Levando em conta a posição inicial das fontes, determine:

a) a separação $L_a$ entre as fontes para a qual o observador **A** detecta o primeiro mínimo de intensidade;

b) a separação $L_b$ entre as fontes para a qual o observador **B** detecta o primeiro máximo de intensidade.

**88.** A respeito das ondas estacionárias sonoras produzidas no ar, podemos afirmar que:

a) num nó de deslocamento, a pressão é constante.

b) num nó de deslocamento, a pressão varia.

c) num ventre de deslocamento, a pressão varia.

d) a pressão é constante tanto nos ventres como nos nós de deslocamento.

**89.** Uma fonte sonora emitindo um som puro (única frequência) de frequência igual a 440 Hz foi colocada sucessivamente junto à extremidade aberta de cinco tubos cilíndricos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, fechados na outra extremidade, de comprimentos respectivamente iguais a 6,25 cm, 15,00 cm, 18,75 cm, 37,50 cm e 93,75 cm. Sabendo que a velocidade de propagação do som no ar existente dentro dos tubos é igual a 330 m/s, determine que tubo(s) entrou(entraram) em ressonância com a fonte.

**90.** (ITA-SP) Um tubo sonoro aberto em uma das extremidades e fechado na outra apresenta uma frequência fundamental de 200 Hz. Sabendo que o intervalo de frequências audíveis é aproximadamente de 20,0 a 16 000 Hz, qual o número de frequências audíveis que esse tubo pode emitir?

**91.** (Unicamp-SP) Em um forno de micro-ondas, as moléculas de água contidas nos alimentos interagem com as micro-ondas que as fazem oscilar com uma frequência de 2,40 GHz ($2{,}40 \cdot 10^9$ Hz). Ao oscilar, as moléculas colidem inelasticamente entre si transformando energia radiante em calor. Considere um forno de micro-ondas de 1 000 W que transforma 50% da energia elétrica em calor. Considere a velocidade da luz $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

a) Determine o comprimento de onda das micro-ondas.

b) Considere que o forno é uma cavidade ressonante, na qual a intensidade das micro-ondas é nula nas paredes. Determine a distância entre as paredes do forno, na faixa entre 25 cm e 40 cm, para que a intensidade da radiação seja máxima exatamente em seu centro.

c) Determine o tempo necessário para aquecer meio litro de água de 20 °C para 40 °C. O calor específico da água é 4 000 J/kg °C.

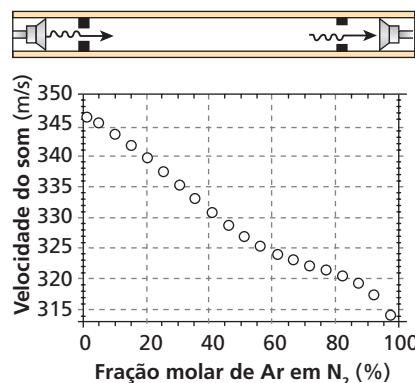
**Nota:**

• O motivo do aquecimento não é a colisão inelástica entre as moléculas de água, mas sim a ressonância dessas moléculas com as micro-ondas nelas incidentes.

**92.** (IME-RJ) Ao encher-se um recipiente com água, o som produzido fica mais agudo com o passar do tempo.

a) Explique por que isso ocorre.

b) Determine uma expressão para a frequência fundamental do som em função do tempo, para o caso de um recipiente cilíndrico com 6 cm de diâmetro e 30 cm de altura, sabendo que a vazão do líquido é de 30 $cm^3$/s. Suponha que a velocidade do som no ar no interior do recipiente seja 340 m/s.

**93.** (Unicamp-SP) Uma das formas de se controlar misturas de gases de maneira rápida, sem precisar retirar amostras, é medir a variação da velocidade do som no interior desses gases. Uma onda sonora com frequência de 800 kHz é enviada de um emissor a um receptor (veja esquema a seguir), sendo então medida eletronicamente sua velocidade de propagação em uma mistura gasosa. O gráfico a seguir apresenta a velocidade do som para uma mistura de argônio e nitrogênio em função da fração molar de Ar em $N_2$.

a) Qual o comprimento de onda da onda sonora no $N_2$ puro?

b) Qual o tempo para a onda sonora atravessar um tubo de 10 cm de comprimento contendo uma mistura com uma fração molar de Ar de 60%?

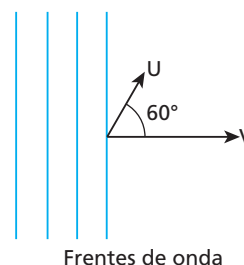
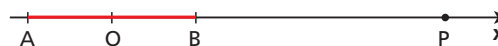
**94.** (Fuvest-SP) Uma onda sonora considerada plana, proveniente de uma sirene em repouso, propaga-se no ar parado, na direção horizontal, com velocidade **V** igual a 330 m/s e comprimento de onda igual a 16,5 cm. Na região em que a onda está se propagando, um atleta corre, em uma pista horizontal, com velocidade **U** igual a 6,60 m/s, formando um ângulo de 60° com a direção de propagação da onda. O som que o atleta ouve tem frequência aproximada de:

a) 1 960 Hz.

b) 1 980 Hz.

c) 2 000 Hz.

d) 2 020 Hz.

e) 2 040 Hz.

**95.** Uma fonte sonora com frequência de 600 Hz executa, no ar, um movimento harmônico simples entre os pontos **A** e **B** do eixo Ox, segundo a função horária $x = 0{,}8 \cos 50t$ (SI).

Sendo de 340 m/s a velocidade do som no ar, determine a máxima frequência sonora percebida por um observador estacionário em **P**.

**96.** (IME-RJ) Um observador escuta a buzina de um carro em duas situações diferentes. Na primeira, o observador está parado e o carro se afasta com velocidade **V**; na segunda, o carro está parado e o observador se afasta com velocidade **V**. Em qual das duas situações o tom ouvido pelo observador é mais grave? Justifique sua resposta.

**97.** (ITA-SP) Uma banda de *rock* irradia certa potência em um nível de intensidade sonora igual a 70 decibéis. Para elevar esse nível a 120 decibéis, a potência irradiada deverá ser elevada de:

a) 71%.

b) 171%.

c) 7 100%.

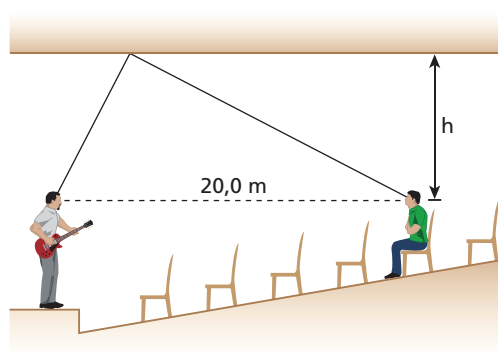
d) 9 999 900%.

e) 10 000 000%.

# Para raciocinar um pouco mais

**98.** (ITA-SP) Um pelotão desfila num ritmo de 120 passos por minuto, ao som de uma fanfarra, que o precede; nota-se que a última fila está com o pé esquerdo à frente quando os componentes da fanfarra estão com o direito à frente. Sabendo-se que a velocidade do som no ar é de 340 m/s, o comprimento do pelotão, incluindo a fanfarra, é de aproximadamente:

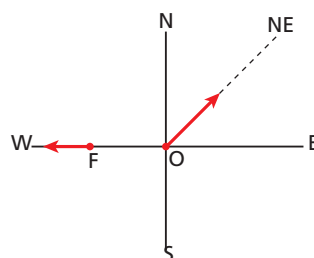
a) 170 m.
b) 680 m.
c) 85 m.
d) 200 m.
e) 490 m.

**99.** Um apreciador de música ao vivo vai a um teatro, que não dispõe de amplificação eletrônica, para assistir a um *show* de seu artista predileto. Sendo detalhista, ele toma todas as informações sobre as dimensões do auditório, cujo teto é plano e nivelado. Estudos comparativos em auditórios indicam preferência para aqueles em que seja de 30 ms a diferença de tempo entre o som direto e aquele que primeiro chega após uma reflexão. Portanto, ele conclui que deve se sentar a 20 m do artista, na posição indicada na figura. Admitindo a velocidade do som no ar de 340 m/s, a que altura **h** deve estar o teto com relação a sua cabeça?

**100.** Uma corda de um instrumento musical, de 50 cm de comprimento e densidade linear igual a 2,50 g/m, vibra no modo fundamental com frequência igual a 260 Hz. Perto dela, um tubo aberto ressoa também no modo fundamental e são percebidos batimentos com frequência igual a 4 Hz.
Observou-se que uma ligeira diminuição da intensidade da força tensora na corda acarretou um aumento da frequência dos batimentos. Considerando a velocidade do som no ar igual a 330 m/s, determine:

a) a frequência fundamental $f_T$ do tubo aberto;
b) o comprimento **L** do tubo;
c) a intensidade **F** da força tensora na corda quando foram observados os batimentos de 4 Hz.

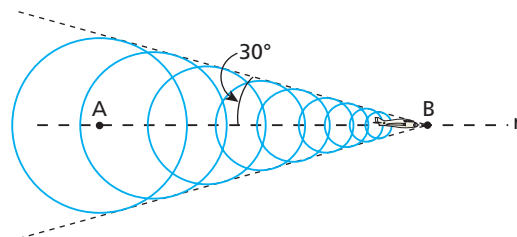
**101.** Dois harmônicos consecutivos de um tubo sonoro têm frequências iguais a 425 Hz e 595 Hz. Determine a ordem desses harmônicos e a frequência fundamental do tubo.

**102.** Um automóvel e uma ambulância movem-se numa estrada, lado a lado, no mesmo sentido, com velocidades constantes e iguais a 72 km/h. A sirene da ambulância emite um som de frequência igual a 1 280 Hz. A partir de certo instante, o motorista do automóvel imprime à sua viatura a aceleração de 1 m/s$^2$ no sentido do movimento. Sabendo que a velocidade de propagação do som no ar é de 340 m/s, determine o espaço percorrido pelo automóvel até seu motorista ouvir um som de frequência igual a 1 240 Hz. Admita que o ar esteja parado em relação à Terra, à qual são referidas as velocidades mencionadas.

**103.** Uma fonte sonora **F**, emitindo um som de frequência igual a 500 Hz, desloca-se para Oeste, com velocidade $v_F = 20$ m/s. Um observador **O** desloca-se para Nordeste com velocidade $V_0 = 20\sqrt{2}$ m/s (ver figura).

O vento sopra de Oeste para Leste, com velocidade $v_v = 40$ m/s. Sabendo-se que, na ausência de vento, a velocidade do som no ar é $v_s = 340$ m/s e que todas as velocidades citadas são relativas ao solo, calcule a frequência do som ouvido pelo observador.

**104.** No instante $t_0 = 0$, um garoto abandona uma pequena fonte sonora, que emite um som de frequência igual a 720 Hz, na boca de um poço cilíndrico vertical de profundidade **H**. Essa fonte despenca, atingindo o fundo do poço no instante **T**.
No local, o módulo da velocidade de propagação do som no ar é de 320 m/s. Admitindo-se que no instante em que o garoto vê o impacto da fonte sonora no fundo do poço ele ouça o som dessa fonte com frequência igual a 640 Hz, determine, desprezando a resistência do ar e considerando $g = 10$ m/s$^2$:

a) o valor de **T**;
b) o valor de **H**.

**105.** A figura representa frentes de onda esféricas emitidas por um avião que se movimenta horizontalmente para a direita, ao longo da reta **r**, com velocidade constante:

Considere a velocidade de propagação do som no ar igual a 340 m/s e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

a) Calcule a velocidade do avião.
b) Num determinado instante, o avião está na mesma vertical que passa por um observador parado no solo. Sabendo-se que 3,0 s após esse instante o observador ouve o estrondo sonoro causado pela onda de choque gerada pelo avião, calcule a altura do avião em relação a esse observador.

# Parte III

Lawrence Manning/CORBIS/LatinStock

# Óptica Geométrica



SuperStock/Diomedia

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Tópico 1

# Fundamentos da Óptica Geométrica

## Bloco 1

### 1. Luz: uma forma de energia radiante

**Energia radiante** é aquela que se propaga por meio de ondas eletromagnéticas. Dentro dessa concepção, podemos destacar as ondas de rádio, de TV e de radar, os raios infravermelhos, a luz, os raios ultravioleta, os raios X, os raios gama etc.

O Sol envia à Terra energia radiante, constituída de radiações infravermelhas (denominadas "ondas de calor" por interagirem com a matéria aumentando o estado de agitação das partículas), luz e radiações ultravioleta, entre outras. Essa energia chega ao nosso planeta à taxa de 1,92 caloria por minuto, em cada centímetro quadrado de superfície normal aos raios solares, denominada **constante solar**.

Uma característica importantíssima da energia radiante é sua velocidade de propagação, que, no vácuo, vale aproximadamente:

$$c \cong 3{,}00 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Nos meios materiais, como o ar, a água e o vidro, a velocidade de propagação da energia radiante é menor que **c**. No diamante, por exemplo, chega a 0,4c, aproximadamente.

Pelo exposto, vimos que a luz é uma forma de energia radiante. Sabe-se, ainda, que a luz difere das demais radiações eletromagnéticas por sua frequência característica, que se estende desde $4 \cdot 10^{14}$ Hz (vermelho) até $8 \cdot 10^{14}$ Hz (violeta), aproximadamente.

Entretanto, o conceito de luz que utilizaremos em nosso estudo de Óptica tem um caráter mais específico. Diremos que:

**Luz** é o agente físico que, atuando nos órgãos visuais, produz a sensação da visão.

Thinkstock/Getty Images

A vida na Terra está subordinada à energia radiante recebida do Sol. Todos os seres vivos se nutrem dessa energia, produzida pela fusão nuclear do hidrogênio, que, ao ser submetido a temperaturas de milhões de graus Celsius, se transforma em hélio.

### 2. Óptica: divisão e aplicações

A **Óptica** é a parte da Física que trata dos fenômenos que têm como causa determinante a energia radiante, em particular a luz.

Por questões de ordem didática, costuma-se estudá-la em dois grandes capítulos: **Óptica Geométrica** e **Óptica Física**.

- **Óptica Geométrica:** estuda os fenômenos ópticos com enfoque nas trajetórias seguidas pela luz. Fundamenta-se na noção de raio de luz e nas leis que regulamentam seu comportamento.
- **Óptica Física:** estuda os fenômenos ópticos que exigem uma teoria sobre a natureza constitutiva da luz.

A Óptica é um ramo da Física que tem largo emprego prático. Dos simples óculos aos sofisticados dispositivos de observação, a Óptica, aliada a outros campos do conhecimento científico, dá sua

contribuição por meio de seus princípios e leis. Algumas aplicações da Óptica são:

- correção de defeitos da visão;
- construção de instrumentos de observação: lupas, microscópios, periscópios, lunetas e telescópios;
- fixação de imagens (fotografia e cinematografia);
- construção de equipamentos de iluminação;
- medidas geométricas de alta precisão (interferômetros);
- estudo da estrutura do átomo.

## 3. Fontes de luz

Os diversos corpos que nos cercam podem ser vistos porque deles recebemos luz, que, incidindo sobre nossos órgãos visuais, promove os estímulos geradores da sensação da visão. O Sol, a Lua, uma pessoa e um livro, por exemplo, enviam luz aos olhos, o que lhes permite enxergá-los.

No entanto, os corpos absolutamente negros não são visíveis. Desses corpos não emana luz de espécie alguma e, eventualmente, nota-se sua presença em razão do contraste com as vizinhanças.

São considerados **fontes de luz** todos os corpos dos quais se pode receber luz.

Dependendo da procedência da luz distribuída para o meio, os corpos em geral podem ser classificados em duas categorias: **fontes primárias** e **fontes secundárias**.

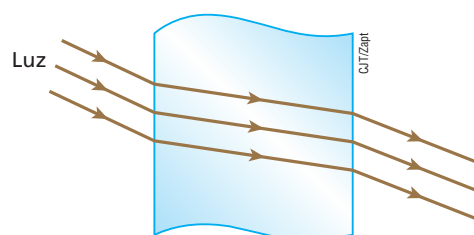
- **Fontes primárias:** são os corpos que emitem luz própria. Por exemplo: o Sol, a chama de uma vela, as lâmpadas (quando acesas) etc.
- **Fontes secundárias:** são os corpos que enviam a luz que recebem de outras fontes. O processo ocorre por **difusão**, ou seja, a luz é espalhada aleatoriamente, em geral por reflexão ou mesmo por refração, para todas as direções dos arredores do corpo. Por exemplo: a Lua, as nuvens, uma árvore, as lâmpadas (quando apagadas) etc.

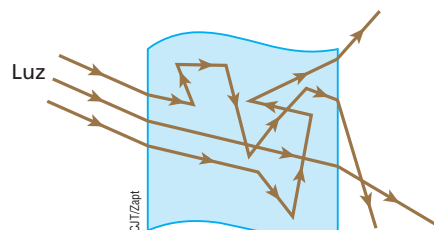
Uma fonte de luz é considerada **pontual** (ou **puntiforme**) quando suas dimensões são irrelevantes em comparação com as distâncias aos corpos iluminados por ela. A grande maioria das estrelas observadas da Terra comporta-se como fonte pontual de luz. De fato, embora as dimensões dessas estrelas sejam enormes, as distâncias que as separam de nosso planeta são muito maiores.

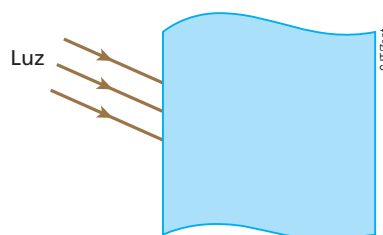
Fontes de luz de dimensões não desprezíveis são denominadas **extensas**. O Sol, observado da Terra, comporta-se como uma fonte extensa de luz.

## 4. Meios transparentes, translúcidos e opacos

**Meios transparentes** são aqueles que permitem que a luz os atravesse descrevendo trajetórias regulares e bem definidas.

O único meio absolutamente transparente é o vácuo. Contudo, em camadas de espessura não muito grande, também podem ser considerados transparentes o ar atmosférico, a água pura, o vidro hialino e outros.

Esquema de meio transparente.

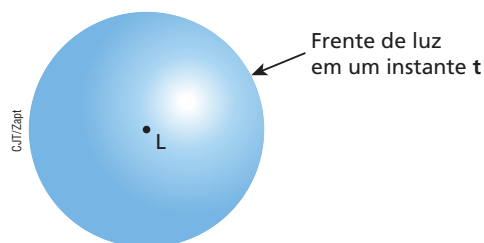
**Meios translúcidos** são aqueles em que a luz descreve trajetórias irregulares com intensa difusão (espelhamento aleatório), provocada pelas partículas desses meios. É o que ocorre, por exemplo, quando a luz atravessa a neblina, o vidro leitoso, o papel vegetal e o papel-manteiga.

Esquema de meio translúcido.

**Meios opacos** são aqueles através dos quais a luz não se propaga. Depois de incidir em um meio opaco, a luz é parcialmente absorvida e parcialmente refletida por ele, sendo a parcela absorvida convertida em outras formas de energia, como a térmica. Quando se apresentam em camadas de razoável espessura, são opacos os seguintes meios: alvenaria, madeira, papelão, metais etc.

Esquema de meio opaco.

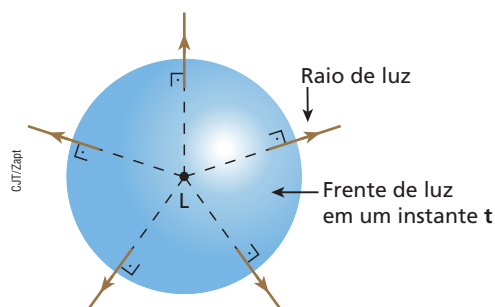
## 5. Frente de luz – Raio de luz

Considere uma pequena lâmpada **L** acesa em uma região de vácuo. Nessas condições, da lâmpada emanam ondas luminosas, que atingem todos os pontos de sua vizinhança.

**Frente de luz** é a fronteira entre a região já atingida por um pulso luminoso e a região ainda não atingida.

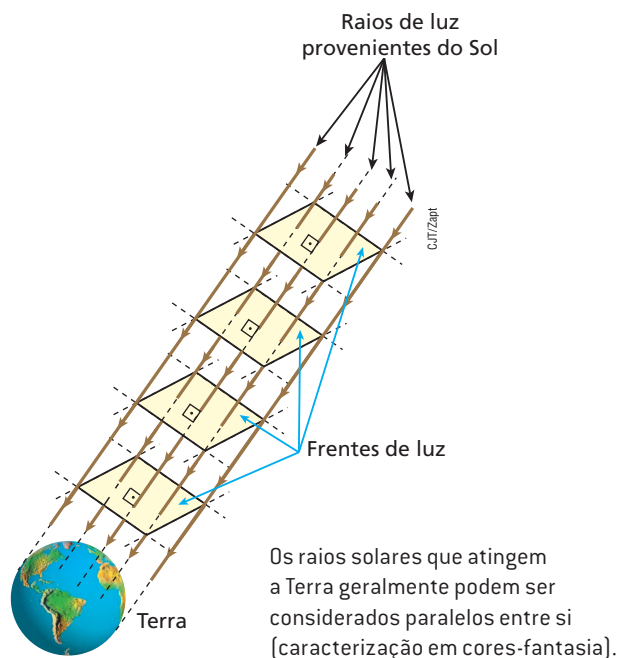
No caso da lâmpada **L**, a propagação luminosa se faz por meio de ondas eletromagnéticas esféricas, concêntricas com a lâmpada. A figura seguinte representa uma frente de luz em um instante **t**.

A região interna à superfície esférica (frente de luz) já foi atingida pelo pulso luminoso, enquanto a região externa ainda não foi.

Cada frente de luz emitida pela lâmpada **L** se expande através do vácuo propagando-se com velocidade igual a **c**.

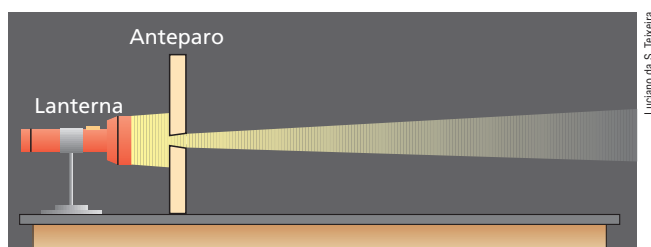
**Raio de luz** é uma linha orientada que tem origem na fonte de luz e é perpendicular às frentes de luz. Os raios de luz indicam a direção e o sentido de propagação da luz em um meio ou sistema.

Para uma onda luminosa esférica, os raios de luz são retilíneos e radiais.

Em pontos situados a grandes distâncias da lâmpada **L**, as frentes de luz lá recebidas têm raio de curvatura muito grande, podendo, por isso, ser consideradas praticamente planas.

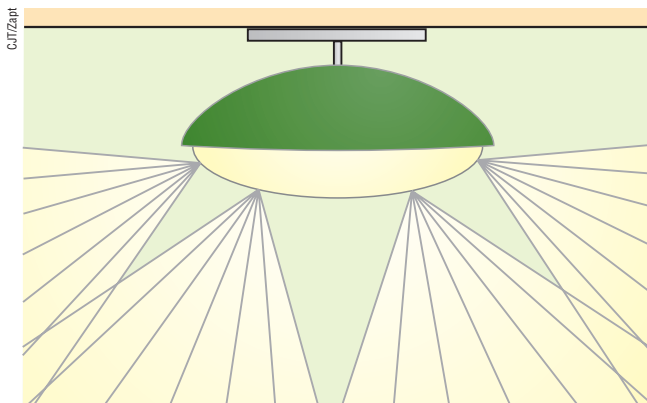
Isso ocorre com a luz que a Terra recebe do Sol. Essa luz constitui-se de ondas eletromagnéticas esféricas. Entretanto, o diâmetro da Terra (aproximadamente 12 800 km) é desprezível em comparação com a distância do planeta ao Sol (cerca de 150 milhões de quilômetros), permitindo-nos geralmente considerar planas as frentes de luz que nos atingem.

Os raios solares que atingem a Terra geralmente podem ser considerados paralelos entre si (caracterização em cores-fantasia).

Uma frente de luz tem existência física, mas isso não ocorre com um raio de luz, que apenas indica a direção e o sentido da propagação luminosa em certo local.

## 6. Pincel de luz – Feixe de luz

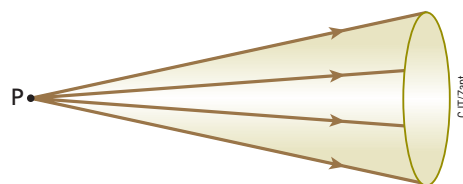
Observe a figura a seguir, que representa uma lanterna comum colocada diante de um anteparo que tem um orifício de diâmetro relativamente pequeno (da ordem de 2 mm). O conjunto encontra-se sobre uma mesa, em um ambiente escurecido.

Se acendermos a lanterna e espalharmos fumaça na região da montagem, notaremos, à direita do anteparo, uma região cônica do espaço diretamente iluminada. Essa região, que tem pequena abertura angular em virtude do pequeno diâmetro do orifício, denomina-se **pincel de luz**.

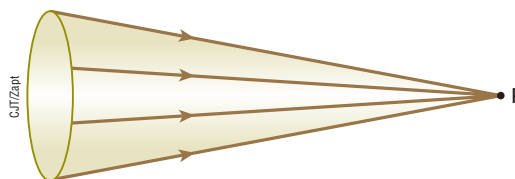
Considere, agora, uma lâmpada instalada no interior de um globo difusor. Com a lâmpada acesa, partem de cada elemento de superfície do globo vários pincéis de luz. Reunindo-se os pincéis emanados de um mesmo elemento de superfície, obtém-se uma região iluminada de abertura angular relativamente grande, que recebe o nome de **feixe de luz**.

CJT/Zapt

Na figura estão representados quatro feixes de luz emanados do globo difusor. Cada feixe é um conjunto de pincéis de luz.

Os pincéis de luz (e também os feixes de luz) admitem a seguinte classificação:

- **Cônicos divergentes:** os raios de luz divergem a partir de um mesmo ponto **P.**

CJT/Zapt

- **Cônicos convergentes:** os raios de luz convergem para um mesmo ponto **P**.

CJT/Zapt

- **Cilíndricos:** os raios de luz são paralelos entre si.

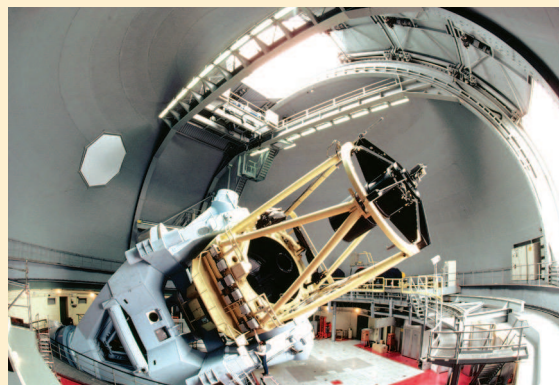
CJT/Zapt

## Telescópios e microscópios

Os telescópios e os microscópios descortinaram aos olhos do ser humano um verdadeiro universo de conhecimento. Aquilo que era inacessível a olho nu veio à tona por meio desses instrumentos, que possibilitaram reformular e ampliar conceitos e teorias.

O advento da luneta astronômica, idealizada originalmente pelo holandês Hans Lippershey, em 1606, permitiu que constelações inteiras tivessem sua existência registrada. Ao saber da novidade, Galileu aperfeiçoou o instrumento, que lhe permitiu mapear as crateras lunares, observar os anéis de Saturno, os satélites de Júpiter e estudar as manchas solares. Outros planetas, além dos já conhecidos, foram descobertos, estendendo-se as fronteiras do Sistema Solar.

O microscópio, por sua vez, inventado pelo também holandês Zacharias Janssen na mesma época da luneta astronômica, desvendou, logo no início do século XVIII, muitos mistérios dos microrganismos. Iniciou-se o estudo da célula, o que trouxe um avanço sem precedentes à Medicina. Conseguiu-se a cura para muitas doenças e várias delas foram erradicadas. Vacinas e métodos terapêuticos foram descobertos, ampliando a média de vida do ser humano.

Roger Ressmeyer/CORBIS/Latinstock

Fotografia de um telescópio de reflexão do European Southern Observatory.

SPL/Latinstock

Microscópio do começo do século XIX.

## Leitura

### Em busca da velocidade da luz

O primeiro método experimental consistente para a determinação da velocidade da luz foi proposto pelo naturalista e astrônomo italiano **Galileu** Galilei (1564-1642), considerado o pai do método científico e fundador da Física como ciência.

Galileu conjecturava a respeito de a luz ter velocidade finita. Segundo sua estratégia para descobrir a rapidez da luz, ele e um assistente deveriam subir no topo de duas colinas próximas durante a noite, um em cada topo, portando lampiões cobertos por panos pretos. Galileu deveria levar com ele um dispositivo capaz de medir intervalos de tempo, provavelmente o "relógio de água" que costumava usar em seus experimentos. Esse instrumento consistia de um grande recipiente cheio de água, no fundo do qual havia um cano fino soldado. Para a medição de certo intervalo de tempo, Galileu recolhia em um copo a água escoada pelo cano entre o início e o final do experimento, media a massa dessa água e fazia uma correspondência entre o tempo decorrido e a massa da água que escoou. Ele destamparia seu lampião ao mesmo tempo em que acionaria seu "relógio". Quando o assistente, situado no cume da outra colina, visse a luz do lampião de Galileu, retiraria o pano preto de cima de seu lampião. Ao perceber, finalmente, o brilho do lampião do assistente, Galileu pararia seu "relógio" e avaliaria o intervalo de tempo gasto pela luz nesse trânsito de ir de uma colina à outra e retornar à primeira, de onde partira no instante $t_0 = 0$.

Conhecida antecipadamente a distância **d** entre os cimos das duas colinas e o intervalo de tempo de ida e volta da luz, $\Delta t$, bastaria assimilar a propagação luminosa a um movimento uniforme. Nesse caso, a velocidade **c** de propagação da luz ficaria determinada fazendo-se:

$$c = \frac{2d}{\Delta t}$$

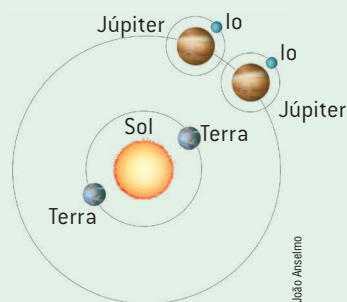
Observe que, se a luz vai e volta, a distância total percorrida por ela é 2d.

Em teoria o método de Galileu era perfeito, mas revelou-se desastroso na prática. A medição do intervalo de tempo de ida e volta do sinal luminoso era realizada de maneira muito precária. Além disso, o tempo da reação humana, cerca de 0,5 s (intervalo de tempo entre a visualização de um estímulo e a correspondente ação muscular), era enorme em comparação com o intervalo de tempo a ser medido, e esse fato desabonava qualquer resultado encontrado.

Perguntado sobre o valor obtido para a velocidade da luz, Galileu teria respondido laconicamente: "Se a luz não for instantânea, deve ser extremamente rápida".

Embora o método de Galileu tivesse sido testado mais tarde por outros cientistas, aumentando-se sucessivamente a distância entre as duas lanternas, os resultados continuaram muito discrepantes. Talvez a solução viesse do céu, ou seja, o mais razoável seria buscar melhores resultados com base em fenômenos astronômicos.

O astrônomo dinamarquês Ole **Römer** (1644-1710), fundamentado em eclipses de uma das luas de Júpiter, Io, obteve em 1672 uma medida para a velocidade da luz. O valor encontrado, cerca de $2{,}1 \cdot 10^8$ m/s, tornou-se um paradigma revolucionário que soterrou de vez a noção de que a luz teria propagação instantânea.

Ole Römer (1644-1710 — aqui em versão colorida de foto em preto e branco de uma pintura de autor desconhecido, coleção particular) e um esquema — com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia — de seu método astronômico para a medição da velocidade da luz: a determinação era feita com base na diferença de tempos para o início dos eclipses de uma das luas de Júpiter, Io. Com a Terra em conjunção com Júpiter, isto é, na situação de grande aproximação em relação àquele planeta, o eclipse iniciava-se em um horário previamente estimado. Com a Terra em oposição com Júpiter, isto é, na situação de grande afastamento em relação àquele planeta, o início do eclipse sofria um atraso de cerca de alguns minutos, o que foi explicado pela distância adicional a ser transposta pela luz para chegar à Terra.

Métodos não astronômicos surgiram depois de Römer para determinar a velocidade da luz. Um deles foi proposto pelo físico francês Armand Hippolyte Louis **Fizeau** (1819-1896), em 1849, utilizando-se uma

roda dentada. Fizeau obteve o valor $c = 3,15 \cdot 10^8$ m/s. Outro método (método do espelho girante) foi apresentado pelo também francês Jean Bernard Léon **Foucault** (1819-1868), em 1862, tendo-se encontrado $c = 2,99774 \cdot 10^8$ m/s. Já Albert **Michelson** (1852-1931), cientista norte-americano de origem alemã, refinou os experimentos anteriores e, em 1926, utilizando um interferômetro, obteve o valor $c = 2,99796 \cdot 10^8$ m/s para a rapidez da luz propagando-se no vácuo.

Outros processos ainda mais sofisticados de medição da velocidade da luz foram apresentados posteriormente, e hoje o valor aceito para a rapidez de propagação da luz no vácuo é:

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

É interessante mencionar que o símbolo **c** para a velocidade de propagação da luz no vácuo se deve ao termo latino *celeritas*, que significa velocidade ou rapidez.

Como se estuda em Física Moderna, a velocidade da luz é o limite superior para as velocidades no Universo.

## Exercícios nível 1

**1.** Imagine-se na janela de um apartamento situado no 10º andar de um edifício. No solo, um carpinteiro bate um prego numa tábua. Primeiro você enxerga a martelada, para depois de certo intervalo de tempo escutar o ruído correspondente. A explicação mais plausível para o fato é:

a) a emissão do sinal sonoro é atrasada em relação à emissão do sinal luminoso.
b) o sinal sonoro percorre uma distância maior que o luminoso.
c) o sinal sonoro propaga-se mais lentamente que o luminoso.
d) o sinal sonoro é bloqueado pelas moléculas de ar, que dificultam sua propagação.
e) o sentido da audição é mais precário que o da visão.

**2.** A velocidade de propagação das ondas luminosas:

a) é infinitamente grande.
b) é máxima no ar.
c) é maior na água que no vácuo.
d) vale 300 000 km/s no vidro.
e) vale $3,00 \cdot 10^{10}$ cm/s no vácuo.

**3.** São fontes luminosas primárias:

a) lanterna acesa, espelho plano, vela apagada.
b) olho de gato, Lua, palito de fósforo aceso.
c) lâmpada acesa, arco voltaico, vaga-lume aceso.
d) planeta Marte, fio aquecido ao rubro, parede de cor clara.
e) tela de uma TV em funcionamento, Sol, lâmpada apagada.

## Exercícios nível 2

**4.** Acreditavam os antigos que a capacidade de visualização devia-se a um estranho mecanismo que consistia de os olhos lançarem linhas invisíveis terminadas em ganchos ("anzóis") que capturavam os detalhes dos objetos visados e traziam as informações aos órgãos visuais, possibilitando enxergar. Tão logo foi aprimorada a noção de luz, essa teoria foi demovida mediante o seguinte argumento:

a) A luz propaga-se em linha reta.
b) Os raios luminosos têm um único sentido de propagação.
c) Não é possível enxergar em ambientes totalmente escuros.
d) Só é possível enxergar corpos que difundem a luz de outros corpos.
e) Só é possível enxergar corpos que emitem luz própria.

**5. E.R.** A distância do Sol à Terra vale, aproximadamente, $1,5 \cdot 10^8$ km. Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é de $3,0 \cdot 10^5$ km/s, calcule o intervalo de tempo decorrido desde a emissão de um pulso luminoso no Sol até sua recepção na Terra.

**Resolução:**

Tendo em conta que a luz se propaga em movimento uniforme, podemos calcular o intervalo de tempo pedido por:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

Sendo $\Delta s = 1,5 \cdot 10^8$ km e $v = 3,0 \cdot 10^5$ km/s, vem:

$$\Delta t = \frac{1,5 \cdot 10^8}{3,0 \cdot 10^5} \text{ (s)} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 5,0 \cdot 10^2 \text{ s} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}}$$

**6.** Considere os seguintes dados: distância do Sol à Terra: $1,5 \cdot 10^8$ km; velocidade da luz no vácuo: $3,0 \cdot 10^5$ km/s. Admita que a partir de um determinado instante o Sol deixasse de emanar energia, isto é, "apagasse". Quanto tempo após o referido instante esse fato seria registrado na Terra?

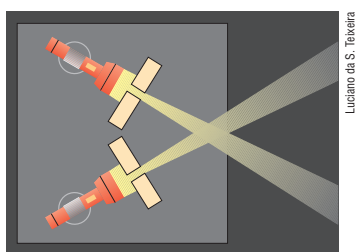
**7.** Suponha que um espelho de grandes dimensões seja fixado no solo lunar, voltando-se sua superfície refletora para determinado observatório na Terra. Um sinal luminoso de grande potência é emitido do observatório em direção ao espelho, onde sofre reflexão, sendo recebido de volta ao ponto de partida 2,54 s depois de sua emissão. Ignorando os movimentos da Terra e da Lua durante o fenômeno e adotando para a velocidade da luz o valor $3,00 \cdot 10^8$ m/s, calcule a distância entre a Terra e a Lua.

**8.** Define-se um ano-luz como a distância percorrida por um sinal luminoso no vácuo durante um ano terrestre. Sabendo que, no vácuo, a luz viaja a uma velocidade de $3,0 \cdot 10^5$ km/s, calcule, em metros, o comprimento equivalente a um ano-luz.

**9.** Considere a seguinte citação, extraída de um livro de Física: "Quando contemplamos o céu numa noite de tempo bom, recebemos das estrelas um relato do passado".
Utilizando argumentos científicos, comente o pensamento do autor.

# Bloco 2

## 7. Princípio da Independência dos Raios de Luz

Considere a situação experimental seguinte, em que há, sobre uma mesa no interior de um quarto escuro, duas lanternas dirigidas para os orifícios existentes em dois anteparos. A figura representa a montagem vista de cima.

Ligando-se as lanternas e espalhando-se fumaça na região da montagem, dos anteparos "sairão" dois pincéis de luz que se interceptarão, provocando na região da interseção o fenômeno de interferência. O experimento mostra, no entanto, que, após essa interseção, cada pincel de luz segue seu caminho — como se não houvesse o cruzamento.

Com base nesse e em outros experimentos similares, podemos enunciar que:

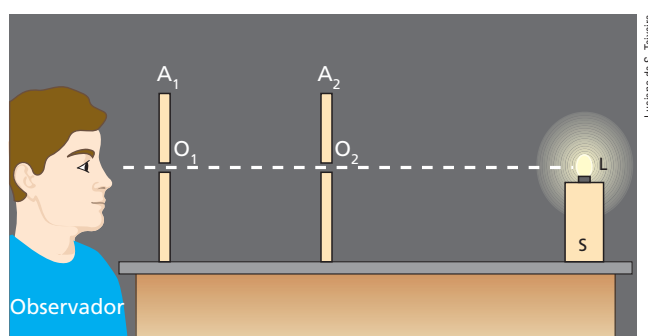
> A propagação de um pincel de luz não é perturbada pela propagação de outros na mesma região; um independe da presença dos outros.

Utilizando a noção de raio de luz, podemos dizer que:

> Quando ocorre cruzamento de raios de luz, cada um deles continua sua propagação independentemente da presença dos outros.

A importância prática do Princípio da Independência dos Raios de Luz é que, nos problemas de Óptica, podemos concentrar nossa atenção em determinado raio de luz sem nos preocuparmos com a presença de outros, que certamente não perturbam o raio em estudo.

## 8. Princípio da Propagação Retilínea da Luz

Observe a montagem da figura seguinte, em que a lâmpada **L** (presa ao suporte **S**) tem dimensões muito pequenas. Os anteparos $A_1$ e $A_2$, feitos de material opaco, são dotados dos orifícios $O_1$ e $O_2$, de diâmetros também muito pequenos. Para que o resultado do experimento seja mais pronunciado, admitamos que os componentes da montagem estejam no interior de um quarto escuro.

Ao se acender a lâmpada **L**, um observador, com um dos olhos próximo de $O_1$, perceberá luz direta da lâmpada somente se **L**, $O_2$ e $O_1$ **estiverem alinhados**.

Esse e outros experimentos de mesma natureza formam a base prática que permite a seguinte conclusão:

> Nos meios transparentes e homogêneos, a luz propaga-se em linha reta.

É importante observar que **meio homogêneo** é aquele que apresenta as mesmas características em todos os elementos de volume.

O ar contido em equipamentos ópticos, como microscópios e telescópios, ou mesmo aquele existente em ambientes pequenos, como uma sala de aula, podem ser considerados um meio transparente e homogêneo em que a luz se propaga em linha reta.

Se pensarmos, no entanto, na atmosfera terrestre como um todo, essa consideração já não poderá ser feita em virtude das diferentes constituições físico-quí-

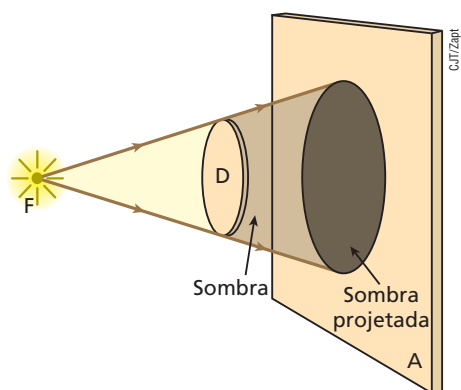
micas encontradas no ar. À medida que sobe, verifica-se que o ar vai ficando mais rarefeito (menos denso) e praticamente isento de vapor de água. A temperatura e a pressão vão se tornando diferentes das encontradas nas proximidades do solo e esses fatores bastam para dizer que a atmosfera terrestre é um meio heterogêneo. Por isso, em geral, a luz não se propaga em linha reta ao atravessar a atmosfera, realizando curvas espetaculares em situações de incidência oblíqua. Isso ocorre em razão da sucessão de refrações que a luz sofre até sua chegada ao solo, o que será explicado com mais detalhes no Tópico 3 (Refração da luz).

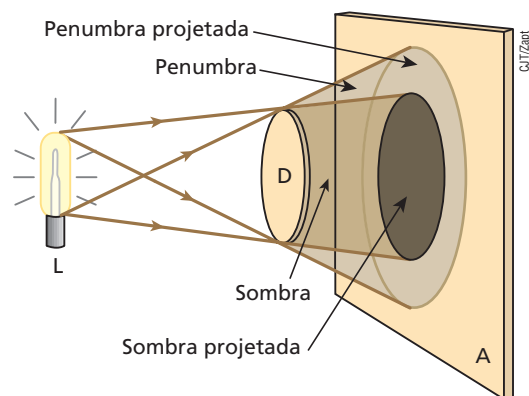
**Notas:**

- Do ponto de vista óptico, chama-se **meio isótropo** (ou isotrópico) todo aquele em que a velocidade de propagação da luz e as demais propriedades ópticas independem da direção em que é realizada a medida.
- Chama-se **meio ordinário** todo aquele que é ao mesmo tempo transparente, homogêneo e isótropo. O vácuo é um meio ordinário.

## 9. Sombra e penumbra

Na montagem experimental sugerida na figura a seguir, **F** é uma fonte luminosa **puntiforme**, **D** é um disco opaco e **A** é um anteparo também opaco.

Tendo em vista que a propagação da luz é retilínea no local do experimento, teremos, na região entre **D** e **A**, um tronco de cone desprovido de iluminação direta de **F**. Essa região é denominada **sombra**. Em **A**, notaremos uma região circular também isenta de iluminação direta de **F**. Essa região é chamada de **sombra projetada**.

É importante observar que o fato de a sombra de um corpo ser semelhante a ele atesta que a luz se propaga em linha reta no meio considerado.

Admita agora o esquema seguinte, em que **L** é uma fonte **extensa** de luz, **D** é um disco opaco e **A** é um anteparo também opaco.

Nesse caso, pelo fato de a fonte de luz ser extensa, além das regiões de sombra e de sombra projetada, teremos ainda regiões de **penumbra** e de **penumbra projetada**. Nas regiões de penumbra a iluminação será parcial, e aí se observará transição entre sombra e iluminação total.

### Sombra contornada por penumbra?

Nesta fotografia, o boneco panda foi iluminado por uma fonte extensa de luz. Observe, na parede ao fundo, a sombra projetada pelo ursinho, contornada por uma área de semi-iluminação. Essa área corresponde à penumbra projetada.

Eclipses são fenômenos astronômicos regulares e previsíveis, mas que aterrorizaram sobremaneira nossos ancestrais em eras não muito distantes. Acreditava-se que essas ocorrências eram manifestações da ira dos deuses e serviam de alerta quanto à chegada de pestes, pragas e catástrofes naturais.

A explicação dos eclipses está relacionada ao fato de a luz propagar-se em linha reta. É com base nesse princípio que se justifica o desaparecimento

temporário da Lua em certas ocasiões de lua cheia ou mesmo do Sol em algumas situações de lua nova.

Dois casos merecem destaque:

**1º caso: Eclipse da Lua**

Neste caso, a Lua situa-se no cone de sombra da Terra.

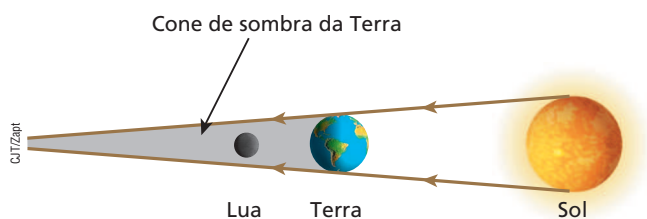



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.

O eclipse da Lua ocorre na fase de lua cheia.

John Mottern/Getty Images

Este eclipse da Lua foi fotografado em 08 de novembro de 2003. Na sequência de imagens podemos notar a gradual imersão do satélite no cone de sombra da Terra.

**2º caso: Eclipse do Sol**

Neste caso, a Lua projeta sobre a Terra uma região de sombra e uma de penumbra.

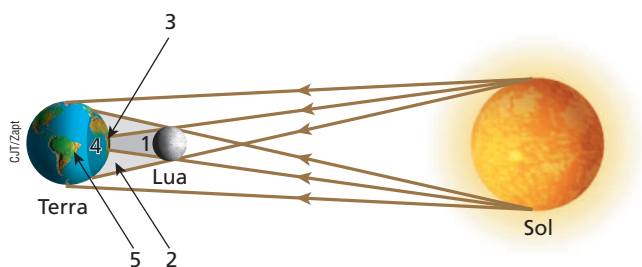
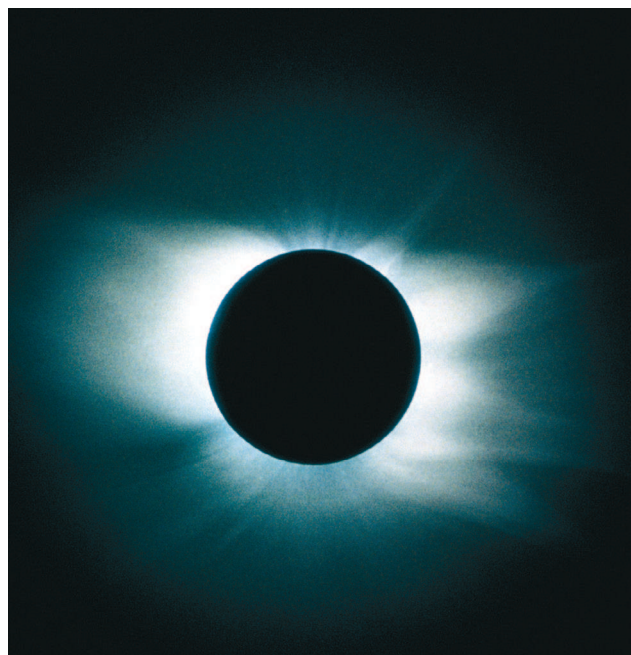



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.

- **Região 1:** sombra da Lua.
- **Região 2:** penumbra.
- **Região 3:** sombra da Lua projetada na Terra. Nessa região ocorre o eclipse total ou anular do Sol.
- **Região 4:** penumbra projetada. Nessa região ocorre o eclipse parcial do Sol, caso em que uma parte do "disco solar" permanece visível.
- **Região 5:** não há eclipse nessa região e o "disco solar" é visualizado integralmente.

O eclipse do Sol ocorre na fase de lua nova.

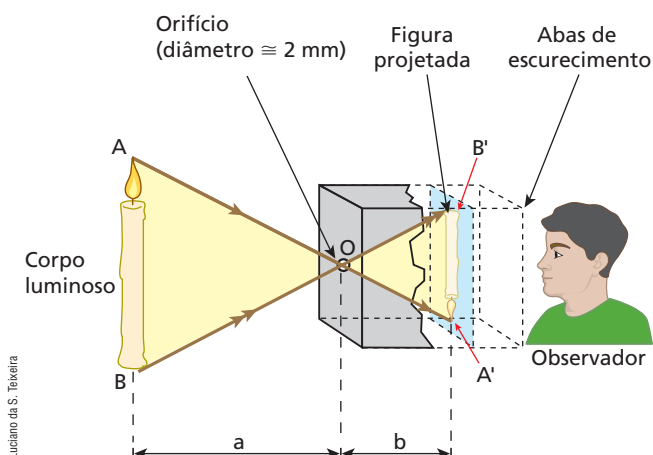
Stocktrek/Photodisc/Getty Images

Nos locais da Terra em que o eclipse do Sol é total, o "disco solar" é observado completamente encoberto pela Lua.

Richard Cummins/CORBIS/Latinstock

Nos locais da Terra em que o eclipse do Sol é parcial, uma fração do "disco solar" é observada descoberta.

## 10. Câmara escura de orifício

Esse dispositivo nada mais é que uma caixa de paredes opacas, sendo uma delas dotada de um orifício **O**, diante do qual é colocado um corpo luminoso.

Os raios emanados desse corpo, após atravessarem **O**, incidem na parede do fundo da caixa, lá projetando uma figura semelhante ao corpo considerado, em forma e em colorido. Tal figura, no entanto, apresenta-se invertida em relação ao corpo.

Observando o esquema, você pode constatar que os triângulos OAB e OA′B′ são semelhantes. Por isso:

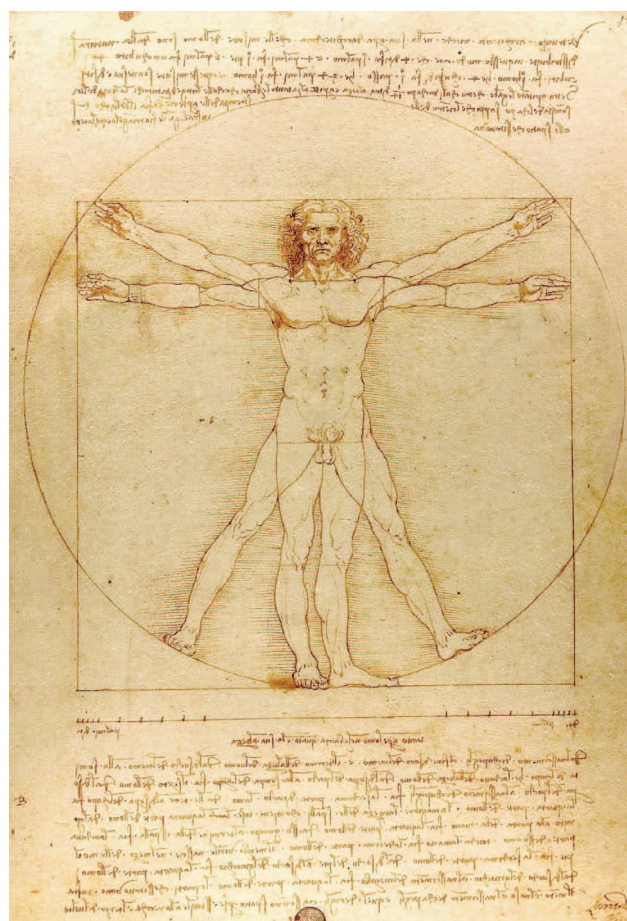
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{b}{a}$$

Para uma mesma câmara e um mesmo corpo luminoso, os comprimentos **b** (profundidade da câmara) e **AB** (comprimento do corpo luminoso) são constantes. Por isso, podemos afirmar que, nesse caso, **A′B′** (comprimento da figura projetada) é **inversamente proporcional** à distância **a** do corpo luminoso à parede frontal da câmara. Se, por exemplo, dobrarmos **a**, **A′B′** se reduzirá à metade.

É importante destacar que a figura projetada na parede do fundo da câmara pode ser contemplada por um observador situado na posição sugerida no esquema. Para tanto, basta que ele substitua a parede do fundo por uma lâmina de vidro fosco ou papel vegetal, por exemplo.

Para obter uma boa definição na figura projetada (boa nitidez), não se deve aumentar o diâmetro do orifício além de 2 mm.

Pode-se dizer que a câmara escura de orifício constitui um ancestral da câmara fotográfica, sendo ainda um dispositivo que comprova o Princípio da Propagação Retilínea da Luz.

O renascentista italiano **Leonardo da Vinci** (1452-1519) utilizou a técnica das câmaras escuras de orifício, já conhecidas em sua época, em seus estudos sobre propagação da luz. Esses dispositivos serviram também de ferramenta para a elaboração de algumas de suas perspectivas e pinturas. Há em seus livretos de anotações — os códices — citações sobre a obtenção de figuras luminosas invertidas projetadas em anteparos planos.

O *Homem vitruviano*, de Leonardo da Vinci.

Leonardo da Vinci foi um verdadeiro gênio. Já no século XV esboçava aquilo que serviria de base à tecnologia de nossos tempos. Idealizou uma série de engenhos de rara sofisticação, até mesmo para os padrões atuais. Há em seus desenhos sistemas utilizando engrenagens, parafusos e rolamentos. São dele as primeiras concepções do automóvel (com transmissão empregando diferencial), do helicóptero, da bicicleta e do paraquedas. O estudo acima, um verdadeiro ícone da publicidade globalizada, denomina-se *Homem vitruviano*. Nele, Leonardo analisa aquilo que seriam as proporções perfeitas para o corpo humano com base nos preceitos do arquiteto romano Marcus **Vitruvius** (século I a.C.).

# Faça você mesmo

Vamos construir uma câmara escura de orifício e verificar algumas consequências da propagação retilínea da luz.

Faça um furo circular no centro da base de uma lata de conservas utilizando um prego de cerca de 2 mm de diâmetro. Tape a boca da lata com um pedaço de papel vegetal ou papel-manteiga, fixando-o por meio de um elástico ou barbante. O papel deve ficar bem esticado. Em um ambiente semiescurecido, ilumine a base furada da lata com a luz de uma pequena vela apoiada sobre um suporte, como propõe a fotografia ao lado.

Cristina Xavier

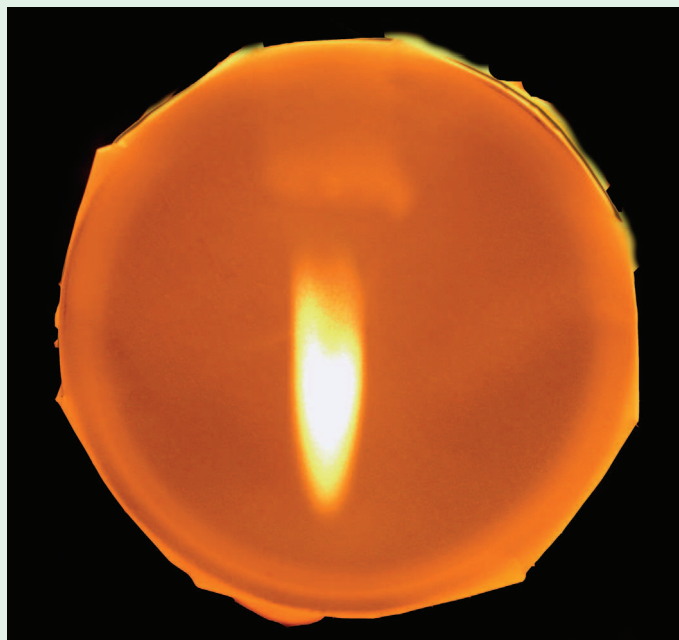
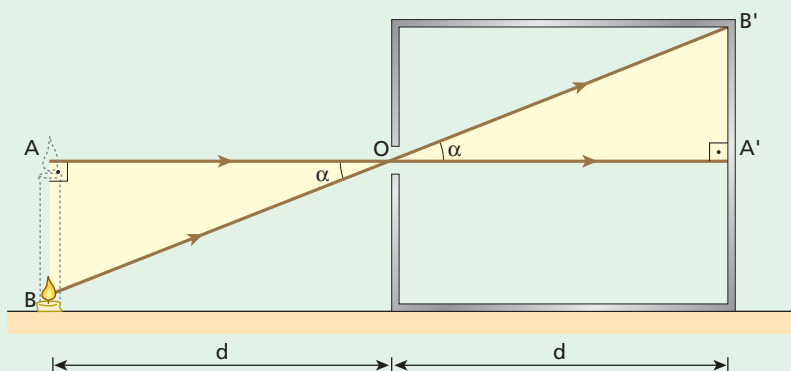
Você perceberá a projeção de uma imagem invertida da vela no papel que tapa a boca da lata, como aparece na fotografia ao lado. Observe que apenas a região mais iluminada da vela, próxima à base da chama, aparecerá projetada.

Cristina Xavier

Aproximando-se a vela da lata, o tamanho da imagem projetada aumentará e, afastando-se a vela da lata, o tamanho da imagem projetada diminuirá.

Agora, corte uma vela apagada de modo que seu pavio fique à mesma altura do furo existente no centro da base da lata. Meça com uma régua a profundidade da lata e coloque a vela a uma distância igual em relação ao furo, conforme ilustra o esquema, e acenda-a.

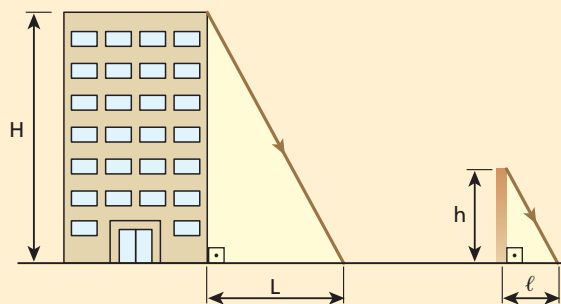
Deixe a vela ir queimando. À medida que seu comprimento for diminuindo, você notará a imagem projetada subindo na parede oposta ao furo, de maneira que, quando a vela estiver praticamente terminada, a projeção da imagem de sua chama estará no ponto mais alto do papel, no topo da parede do fundo da lata.

A semelhança existente entre a imagem projetada no papel e a vela é uma evidência de que a luz se propaga em linha reta no ambiente do experimento. Deve-se notar também a congruência entre os triângulos ABO e A'B'O destacados na figura, o que também pode ser justificado pelo fato de a luz se propagar em linha reta.

## Exercícios — nível 1

**10.** Com o Sol a pino, observa-se que a sombra de um disco circular, projetada no solo plano e horizontal, tem a mesma forma e o mesmo diâmetro do disco. Pode-se, então, concluir que:
a) os raios solares são praticamente paralelos entre si e o disco está disposto paralelamente ao solo.
b) os raios solares são praticamente paralelos entre si e o disco está disposto perpendicularmente ao solo.
c) os raios solares são muito divergentes e o disco está disposto paralelamente ao solo.
d) os raios solares são muito divergentes e o disco está disposto perpendicularmente ao solo.
e) Nada se pode concluir apenas com as informações oferecidas.

**11.** Analise as proposições seguintes:
I. No vácuo, a luz propaga-se em linha reta.
II. Em quaisquer circunstâncias, a luz propaga-se em linha reta.
III. Nos meios transparentes e homogêneos, a luz propaga-se em linha reta.
IV. Ao atravessar a atmosfera terrestre, a luz propaga-se em linha reta.
O que você concluiu?
a) Somente I é correta.
b) Somente I e III são corretas.
c) Somente II e III são corretas.
d) Todas são corretas.
e) Todas são erradas.

**12. E.R.** Desejando medir a altura **H** de um prédio, um estudante fixou verticalmente no solo uma estaca de 2,0 m de comprimento. Em certa hora do dia, ele percebeu que o prédio projetava no solo uma sombra de 60 m de comprimento, enquanto a estaca projetava uma sombra de 3,0 m de comprimento. Considerando os raios solares paralelos, que valor o estudante encontrou para **H**?

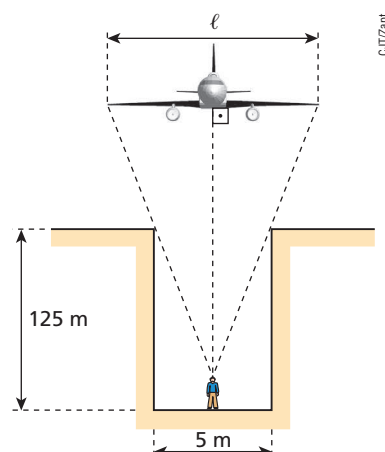
**Resolução:**
O processo descrito está representado na figura seguinte:

Como podemos considerar os raios solares paralelos, os triângulos retângulos correspondentes às regiões de sombra do prédio e da estaca são semelhantes. Assim, podemos escrever que:

$$\frac{H}{h} = \frac{L}{\ell}$$

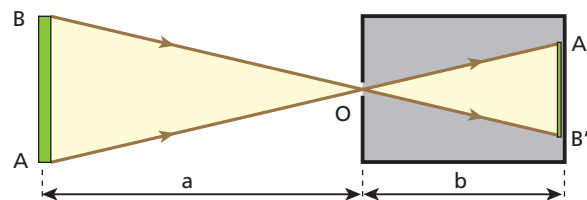
Sendo h = 2,0 m, L = 60 m e $\ell$ = 3,0 m, calculemos **H**:

$$\frac{H}{2,0\ \text{m}} = \frac{60\ \text{m}}{3,0\ \text{m}} \Rightarrow \boxed{H = 40\ \text{m}}$$

**13.** (UFPE) Uma pessoa de 1,8 m de altura está em pé ao lado de um edifício de altura desconhecida. Num dado instante, a sombra dessa pessoa, projetada pela luz solar, tem uma extensão de 3,0 m, enquanto a sombra do edifício tem uma extensão de 80 m. Qual a altura, em metros, do edifício?

**14.** Do fundo de um poço, um observador de altura desprezível contempla um avião, que está 500 m acima de seus olhos. No instante em que a aeronave passa sobre a abertura do poço, o observador tem a impressão de que a envergadura (distância entre as extremidades das asas) abrange exatamente o diâmetro da abertura.

Considerando os elementos da figura ilustrativa acima, fora de escala, calcule a envergadura $\ell$ do avião.

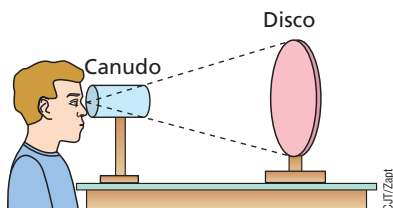
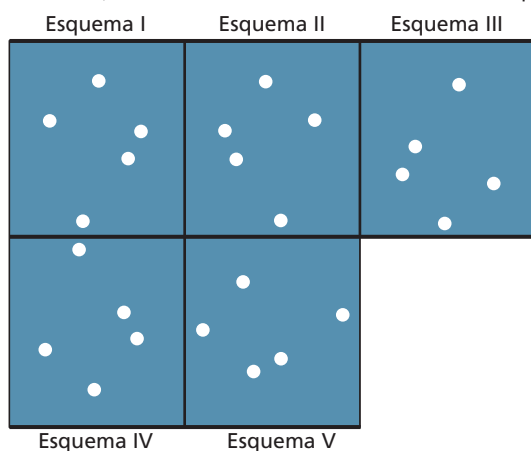
**15.** (UFG-GO) Um feixe luminoso, partindo de uma fonte puntiforme, incide sobre um disco opaco de 10 cm de diâmetro. Sabendo-se que a distância da fonte ao disco corresponde a um terço da distância deste ao anteparo e que os planos da fonte, do disco e do anteparo são paralelos, pode-se afirmar que o raio da sombra do disco, projetada sobre o anteparo, é de:
a) 15 cm. b) 20 cm. c) 25 cm. d) 35 cm. e) 40 cm.

**16.** O esquema representa o corte de uma câmara escura de orifício, diante da qual existe um corpo luminoso **AB** de 40 cm de comprimento:

Considerando a = 100 cm e b = 20 cm, calcule o comprimento da figura **A'B'** projetada na parede do fundo da câmara.

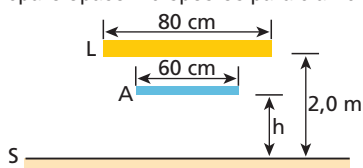
**17.** Num eclipse da Lua, a posição relativa dos três astros, Sol, Lua e Terra, é a seguinte:
a) O Sol entre a Lua e a Terra.
b) A Lua entre o Sol e a Terra.
c) A Terra entre o Sol e a Lua.
d) A Terra e a Lua à esquerda do Sol.
e) É impossível a ocorrência de um eclipse da Lua.

## Exercícios nível 2

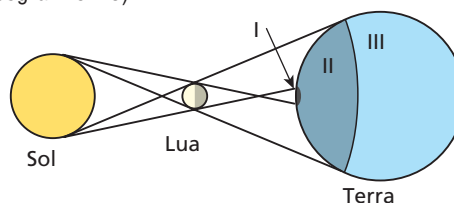
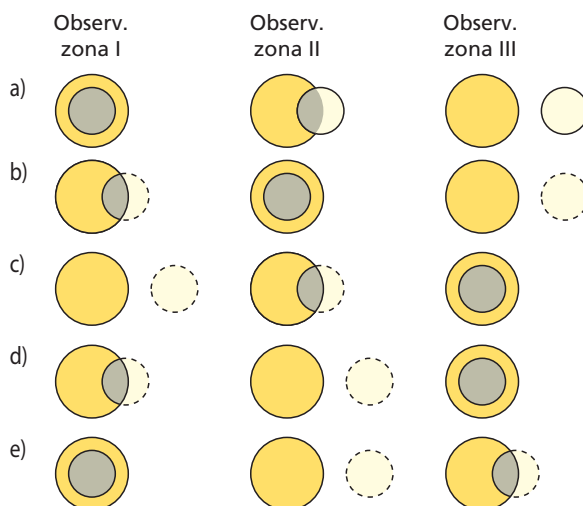
**18.** Um grupo de escoteiros deseja construir um acampamento em torno de uma árvore. Por segurança, eles devem colocar as barracas a uma distância tal da base da árvore que, se cair, ela não venha a atingi-los. Aproveitando o dia ensolarado, eles mediram, ao mesmo tempo, os comprimentos das sombras da árvore e de um deles, que tem 1,5 m de altura; os valores encontrados foram 6,0 m e 1,8 m, respectivamente. Qual deve ser a menor distância das barracas à base da árvore?

**19.** Considere o esquema ao lado, em que o observador olha através de um canudo cilíndrico, de eixo horizontal, de 20 cm de diâmetro e 80 cm de comprimento. O rapaz observa que um disco, distante 8,0 m do seu olho, parece encaixar-se perfeitamente na boca do canudo. Supondo desprezível a distância do olho do rapaz ao canudo, calcule o raio do disco, admitindo que seja circular.

**20.** (FCC-SP) O orifício de uma câmara escura está voltado para o céu, numa noite estrelada. A parede oposta ao orifício é feita de papel vegetal translúcido. Um observador que está atrás da câmara, se olhasse diretamente para o céu, veria o Cruzeiro do Sul conforme o esquema I. Olhando a imagem no papel vegetal, por trás da câmara, o observador vê o Cruzeiro conforme o esquema:

a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

**21.** Um objeto luminoso e linear é colocado a 20 cm do orifício de uma câmara escura, obtendo-se, em sua parede do fundo, uma figura projetada de 8,0 cm de comprimento. O objeto é então afastado, sendo colocado a 80 cm do orifício da câmara. Calcule o comprimento da nova figura projetada na parede do fundo da câmara.

**22.** (UEL-PR) A figura a seguir representa uma fonte extensa de luz **L** e um anteparo opaco **A** dispostos paralelamente ao solo (**S**):

O valor mínimo de **h**, em metros, para que sobre o solo não haja formação de sombra é:

a) 2,0. b) 1,5. c) 0,80. d) 0,60. e) 0,30.

**23.** (Cesgranrio-RJ)

A figura acima está fora de escala; reproduz, porém, corretamente, os aspectos qualitativos da geometria do sistema Terra, Lua, Sol durante um eclipse anular do Sol. Qual das opções abaixo melhor representa a situação aparente do Sol e da Lua para observadores situados respectivamente nas zonas I, II e III da Terra?

**Código:**
círculo maior: Sol
círculo menor: Lua
parte cinza: sombra

**24.** Leia atentamente o texto abaixo:

"O último eclipse total do Sol neste século (XX) para o hemisfério sul aconteceu na manhã de 3 de novembro de 1994. Faltavam 15 minutos para as 10 h, na cidade de Foz do Iguaçu, no Paraná. Em qualquer dia normal, o sol da primavera já estaria brilhando bem acima do horizonte, mas esse não foi um dia normal (...) Durante o eclipse, a gigantesca sombra, com 200 km de diâmetro, progrediu a 3 000 km por hora do Oceano Pacífico para a América do Sul. Entrou no Brasil por Foz do Iguaçu e saiu para o Oceano Atlântico, sobre a divisa dos estados de Santa Catarina e Rio Grande do Sul."

(Revista *Superinteressante*. Ano 8, n. 10.)

Com base em seus conhecimentos e nas informações contidas no texto, responda:

a) Em que fase da Lua (lua cheia, lua minguante, lua nova ou lua crescente) ocorre o eclipse total do Sol?
b) Qual a duração máxima do eclipse citado para uma pessoa que observou o fenômeno de um local em Foz do Iguaçu?

# Bloco 3

## 11. Fenômenos físicos fundamentais na óptica geométrica

A óptica geométrica trata basicamente das trajetórias da luz em sua propagação. São de especial interesse nesse estudo dois fenômenos físicos fundamentais: a **reflexão** e a **refração**.

Considere uma superfície $\Sigma$ separadora de dois meios transparentes, 1 e 2. Admita um pincel luminoso cilíndrico que, propagando-se no meio 1, incide sobre $\Sigma$.

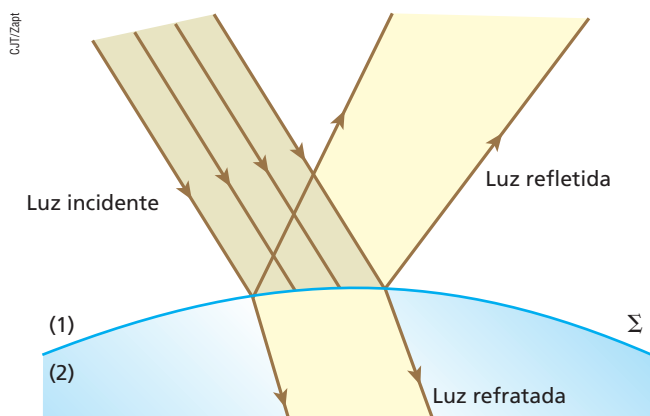
Uma parte da energia luminosa incidente retorna ao meio 1, caracterizando, assim, o fenômeno da reflexão.

**Reflexão** é o fenômeno que consiste no fato de a luz voltar a se propagar no meio de origem, após incidir na superfície de separação deste com outro meio.

Outra parte da energia luminosa incidente poderá passar para o meio 2, caracterizando, assim, o fenômeno da refração.

**Refração** é o fenômeno que consiste no fato de a luz passar de um meio para outro diferente.

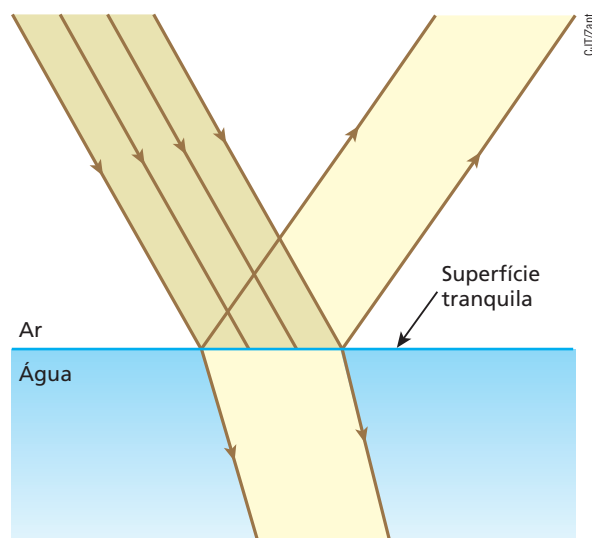
Considerando-se o que foi visto no Tópico 2 da Parte II (Ondas), vale lembrar que na reflexão se conservam a frequência e a intensidade da velocidade de propagação, enquanto na refração a frequência conserva-se, mas a intensidade da velocidade de propagação varia na proporção direta do comprimento de onda.

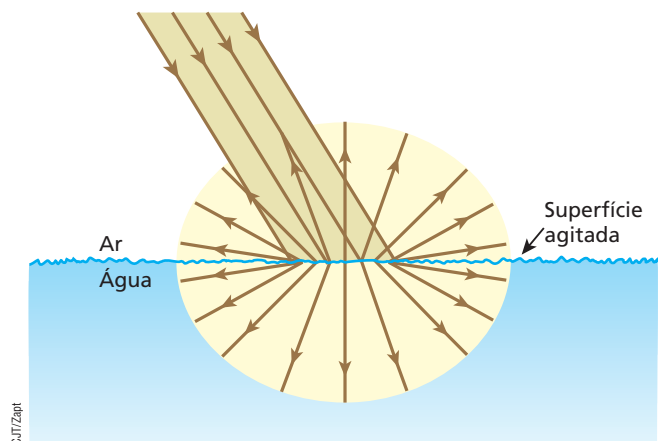
A figura a seguir ilustra a reflexão e a refração da luz.

Imagine, por exemplo, que você está em um local bastante iluminado, diante de uma porta de vidro transparente que dá acesso a outro ambiente mais escurecido. Parte da luz difundida por seu corpo sofrerá reflexão na porta de vidro, permitindo que você veja uma imagem sua. Outra parte da luz difundida por seu corpo atravessará a porta de vidro, refratando-se e possibilitando que pessoas situadas dentro do outro ambiente — o mais escurecido — também o vejam.

## 12. Reflexão e refração regulares e difusas

A maior ou menor regularidade da superfície sobre a qual incide a luz pode determinar dois tipos de reflexão e de refração: a **regular** e a **difusa**.

Considere, por exemplo, a superfície da água de um lago isenta de qualquer perturbação. Nessas condições, essa superfície apresenta-se praticamente desprovida de ondulações ou irregularidades.

Fazendo incidir sobre a água do lago um pincel cilíndrico de luz monocromática (uma só cor ou frequência), podemos observar reflexão e refração regulares. Os pincéis luminosos refletido e refratado também serão cilíndricos; os raios de luz componentes desses pincéis serão paralelos entre si, da mesma forma que os raios luminosos constituintes do pincel incidente. A figura a seguir ilustra a reflexão e a refração regulares.

Imagine, agora, que a superfície da água do lago seja perturbada pelas gotas de uma chuva torrencial.

Fazendo incidir sobre a água do lago um pincel cilíndrico de luz monocromática, poderemos observar reflexão e refração difusas. Os pincéis luminosos refletido e refratado não serão cilíndricos; os raios de luz componentes desses pincéis terão direções diversas, expandindo-se de modo aleatório por todo o espaço. A figura abaixo ilustra a reflexão e a refração difusas.

## Refrigerante quente

As águas da lagoa Araraquara, em Baía Formosa (RN), são bem escuras, semelhantes aos refrigerantes tipo cola. Isso ocorre devido à decomposição sistemática da vegetação subaquática e ciliar, constituída principalmente de junco, pau-rosa, pau-brasil e maçaranduba. Por serem escuras, essas águas absorvem intensamente a luz solar, que é refratada de maneira difusa, fazendo com que a temperatura nas camadas superficiais fique bastante elevada.

Na reflexão e na refração difusas, ao contrário do que se pode imaginar, valem as leis da reflexão e da refração, que veremos nos Tópicos 2 e 3, respectivamente.

As direções diversas assumidas pelos raios refletidos e refratados devem-se às irregularidades da superfície de incidência.

Como não há superfície perfeitamente lisa, sempre que ocorre reflexão ou refração uma parte da luz incidente é difundida. É claro que tal parcela será tanto menor quanto mais regular for a superfície.

A difusão da luz é decisiva para a visão das coisas que nos cercam. Um pincel de luz que atravessa um quarto escuro, por exemplo, poderá ser observado se na região abrangida por ele espalharmos fumaça, cujas partículas constituintes difundem a luz, enviando-a aos nossos olhos.

## 13. Reflexão e refração seletivas

A luz solar (ou a luz emitida por uma lâmpada fluorescente) é denominada **luz branca**.

A luz branca solar é policromática, isto é, composta de diversas cores, das quais se costumam destacar sete: vermelha, alaranjada, amarela, verde, azul, anil e violeta.

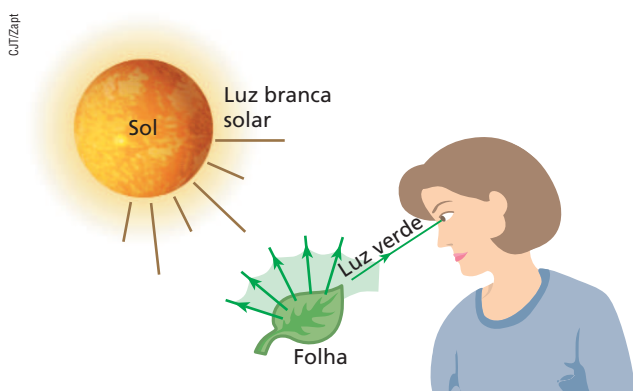
Por volta de 1665, o cientista inglês Isaac Newton (1642-1727, aqui em gravura do século XIX, de autor desconhecido; Bibliothèque Nationale, Paris) verificou que as luzes coloridas, como a amarela e a azul, não eram modificações da luz branca, como se acreditava na época, mas componentes dela. Ele utilizou um prisma para dispersar um estreito pincel de luz branca solar, obtendo em um anteparo, posto em frente ao prisma, um espectro multicolorido constituído por sete cores principais. Considerando-se a trajetória original do pincel de luz branca, a cor que apresentava o menor desvio na travessia do prisma era a vermelha, seguida da alaranjada, da amarela, da verde, da azul, da anil e da violeta, que se desviava mais. Ele tentou, sem sucesso, decompor um feixe de luz monocromática amarela, confirmando a sua teoria de que apenas a luz branca poderia ser decomposta.

Quando iluminadas pela luz solar, as folhas de uma árvore nos parecem verdes, por quê?

Porque essas folhas "selecionam" no espectro solar principalmente a cor componente verde, refletindo-a de modo difuso para o meio. Ao recebermos luz verde em nossos olhos, enxergamos as folhas em verde.

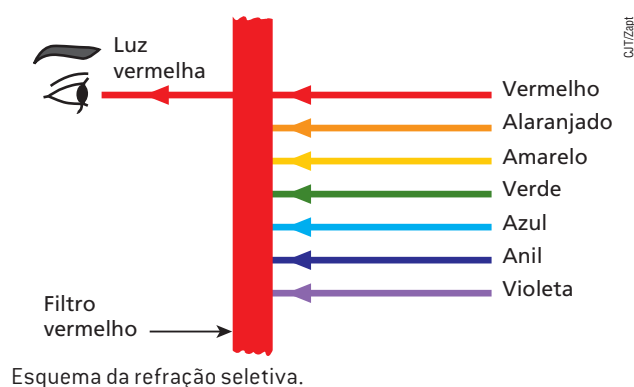
Cumpre observar que as demais cores componentes da luz branca são predominantemente absorvidas pelas folhas.

A figura a seguir (com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia) ilustra a reflexão seletiva.

CJT/Zapt

Atenção para os seguintes pontos:

- Se vemos um corpo branco, é porque ele está refletindo todas as cores do espectro solar.
- Se "vemos" um corpo preto, é porque ele está absorvendo todas as cores do espectro solar.
- Um corpo que nos parece vermelho quando iluminado pela luz branca solar se apresentará escuro quando iluminado por luz monocromática de cor diferente da vermelha (azul, por exemplo).

Observando os objetos que nos cercam através de uma lâmina de acrílico vermelha, por exemplo, distinguiremos nesses objetos apenas regiões vermelhas e regiões bem escuras. Isso ocorre porque a lâmina de acrílico constitui um **filtro**, que refrata (deixa passar) seletivamente a luz vermelha, absorvendo substancialmente as demais cores do espectro.

CJT/Zapt

Esquema da refração seletiva.

Os filtros são largamente utilizados em fotografia, permitindo que penetrem no interior da câmara apenas as colorações desejadas.

## Por que os olhos saem vermelhos em algumas fotografias?

Se ao tirar uma fotografia os olhos das pessoas aparecerem vermelhos, não encare esse defeito como um sinal de que está na hora de trocar de câmera ou abandonar seu sonho de ser fotógrafo.

Essa vermelhidão na região da córnea se deve à reflexão de parte da luz do *flash* na retina, película existente no fundo do bulbo do olho das pessoas, responsável pela conversão de sinais luminosos em informações elétricas levadas ao cérebro pelo nervo óptico. Em ambiente pouco iluminado, a pupila fica dilatada, o que facilita a entrada da luz do *flash* e o consequente retorno dessa luz à câmera. É importante observar que a reflexão na retina é difusa, já que sua superfície é irregular. Como a retina é muito vascularizada, isto é, repleta de vasos sanguíneos, difunde intensamente o vermelho, que é a cor predominante exibida pelo sangue quando iluminado por luz branca, como a dos *flashes*.

Alamy/Other Images

Olhos vermelhos? Nada de anormal! Trata-se apenas de reflexão da luz do *flash* nas retinas.

Há câmeras e programas de computador que dispõem de ferramentas capazes de corrigir olhos vermelhos. Aprenda a trabalhar com esses recursos e boas fotografias!

## 14. Generalidades sobre sistemas ópticos

Em geral, há dois tipos principais de sistemas ópticos: os **refletores** e os **refratores**.

No grupo dos sistemas ópticos refletores se encontram os espelhos, que são superfícies polidas de um corpo opaco, com alto poder de reflexão.

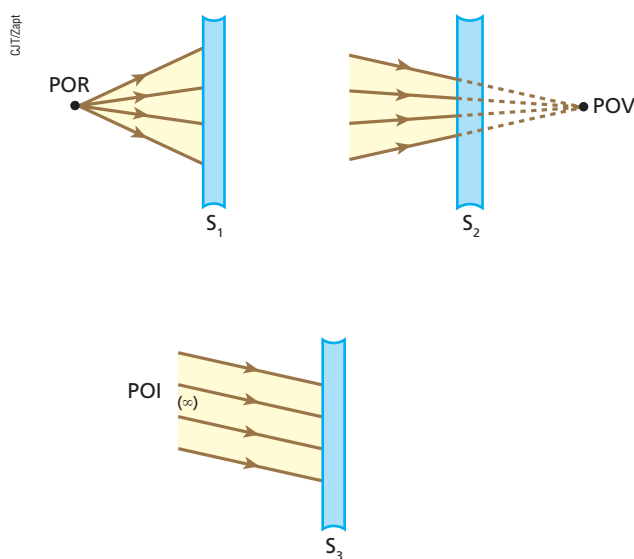
No grupo dos sistemas ópticos refratores, por sua vez, encontram-se os dioptros, que são constituídos de dois meios transparentes separados por uma superfície regular. Associações convenientes de dioptros dão origem a utensílios ópticos de grande importância prática, como lentes e prismas, entre outros.

## 15. Ponto objeto e ponto imagem

### Definições

Os conceitos de **ponto objeto** e **ponto imagem** são essenciais no estudo de óptica geométrica.

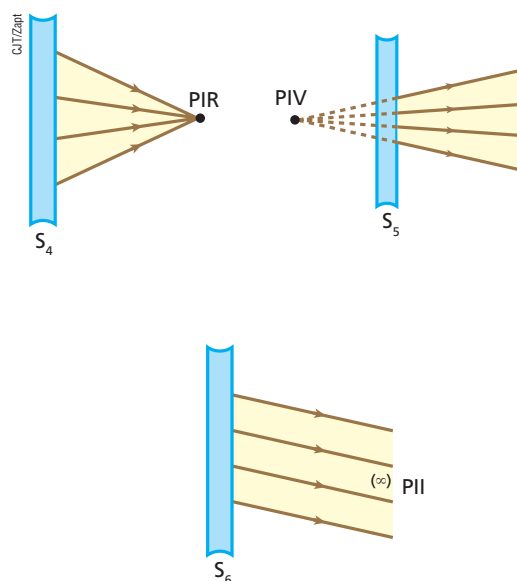
Considere as três figuras a seguir, em que são representados três sistemas ópticos genéricos, $S_1$, $S_2$ e $S_3$, nos quais **incide** luz:

CJT/Zapt

> Relativamente a determinado sistema óptico, chama-se **ponto objeto** o vértice do pincel luminoso incidente.

É importante destacar que:

- **ponto objeto real** (POR) é o vértice de um pincel incidente divergente, sendo formado pelo cruzamento efetivo dos raios de luz. Relativamente a $S_1$, temos um ponto objeto real;
- **ponto objeto virtual** (POV) é o vértice de um pincel incidente convergente, sendo formado pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios de luz. Relativamente a $S_2$, temos um ponto objeto virtual;
- **ponto objeto impróprio** (POI) é o vértice de um pincel incidente cilíndrico, estando situado no infinito. Relativamente a $S_3$, temos um ponto objeto impróprio.

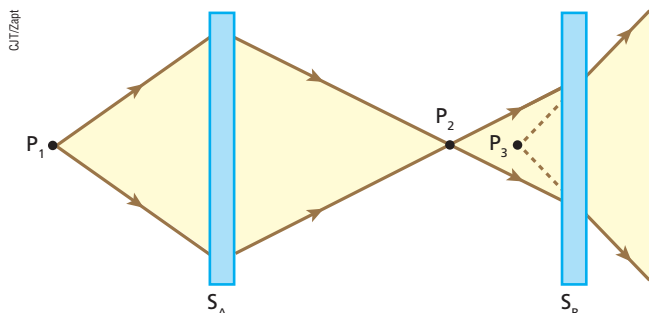
Considere, agora, as três figuras a seguir, em que são representados três sistemas ópticos genéricos, $S_4$, $S_5$ e $S_6$, dos quais **emerge** luz:

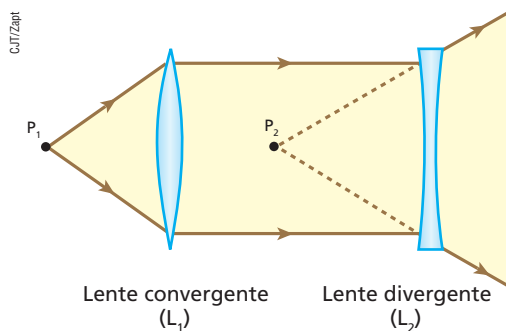
CJT/Zapt

> Relativamente a determinado sistema óptico, chama-se **ponto imagem** o vértice do pincel luminoso emergente.

Convém destacar que:

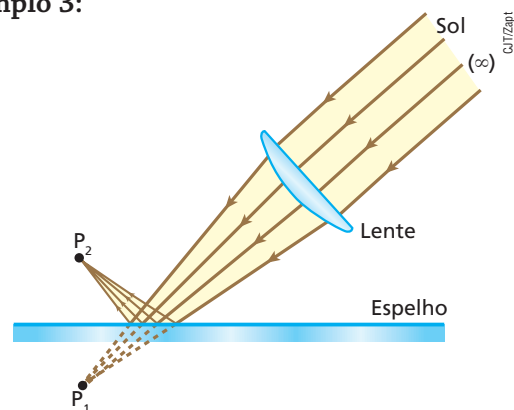
- **ponto imagem real** (PIR) é o vértice de um pincel emergente convergente, sendo formado pelo cruzamento efetivo dos raios de luz. Relativamente a $S_4$, temos um ponto imagem real;
- **ponto imagem virtual** (PIV) é o vértice de um pincel emergente divergente, sendo formado pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios de luz. Relativamente a $S_5$, temos um ponto imagem virtual;
- **ponto imagem impróprio** (PII) é o vértice de um pincel emergente cilíndrico, estando situado no infinito. Relativamente a $S_6$, temos um ponto imagem impróprio.

Para facilitar a assimilação, observe os exemplos a seguir.

**Exemplo 1:**

| Sistema óptico / Ponto | $S_A$ | $S_B$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | POR | — |
| $P_2$ | PIR | POR |
| $P_3$ | — | PIV |

**Exemplo 2:**

| Sistema óptico / Ponto | $L_1$ | $L_2$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | POR | — |
| $P_2$ | — | PIV |

A imagem que $L_1$ conjuga (faz corresponder) a $P_1$ é imprópria: essa imagem comporta-se como objeto impróprio em relação a $L_2$.

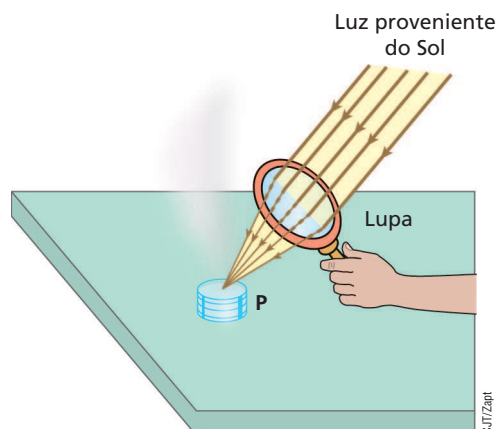
**Exemplo 3:**

| Sistema óptico / Ponto | Lente | Espelho |
|---|---|---|
| Sol | POI | — |
| $P_1$ | PIR | POV |
| $P_2$ | — | PIR |

Embora $P_1$ tenha sido formado pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios de luz, ele se comporta, em relação à lente, como ponto imagem real, pois corresponde ao vértice de um pincel emergente convergente.

**Exemplo 4:**

Uma lupa (lente de aumento) pode concentrar a luz recebida do Sol em uma pequena região, como **P**. Colocando-se uma tampinha de garrafa cheia de água em **P**, o conjunto irá se aquecer.

Em relação ao sistema óptico lupa, o Sol, situado a grande distância, comporta-se como objeto impróprio, enquanto **P** é uma imagem real do Sol (formada efetivamente por raios luminosos).

TF2-P3T1_p295_323-4P.indd 313 17/08/12 18:39

## Óculos para a correção da miopia: imagens virtuais

Nesta fotografia, a imagem que se pode observar para o rosto da modelo é de natureza virtual, de orientação direita, isto é, está de "cabeça para cima" em relação à garota, e de tamanho menor que o objeto.

Do ponto de vista da lente objetiva da câmera que tirou a foto, porém, essa imagem comportou-se como objeto real.

Tendo-se em conta as características da imagem, o provável defeito de visão da modelo é **miopia**, que requer em sua correção lentes esféricas divergentes.

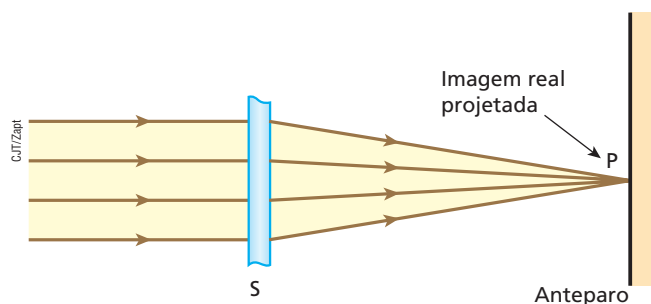
Os principais defeitos da visão, bem como sua correção, serão estudados no Tópico 5, Instrumentos ópticos e Óptica da visão.

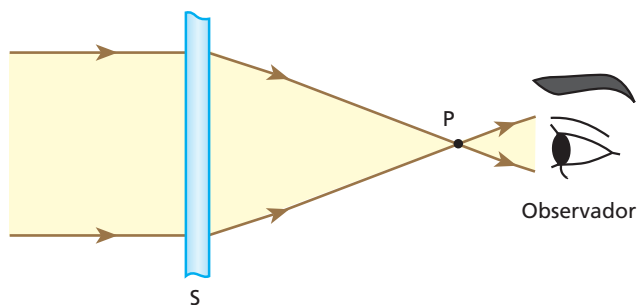
Mirko Iannace/Grupo Keystone

Fotografia mostrando óculos que corrigem a miopia.

### Comentários

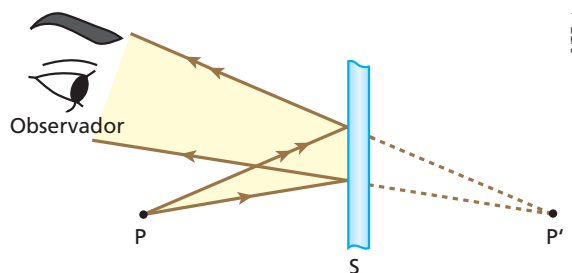
As imagens reais **podem** ser projetadas em anteparos, como telões ou paredes.

Isso ocorre pelo fato de os pontos de imagens reais constituírem vértices efetivos de feixes luminosos emergentes do sistema óptico.

Depois de incidir no anteparo, a luz que determina a imagem real é difundida para o ambiente, permitindo a observação coletiva, isto é, a visão da figura projetada por vários observadores simultaneamente. No cinema, por exemplo, a imagem projetada na tela é real.

Convém salientar, entretanto, que uma imagem real também pode ser visualizada diretamente, isto é, sem estar projetada em anteparos. Para isso, basta que o observador posicione seu bulbo do olho de modo que seja atingido pela luz, conforme mostra o esquema a seguir.

As imagens virtuais **não podem** ser projetadas em anteparos.

Isso ocorre porque não há luz na região em que se forma uma imagem virtual.

Observe que, embora não possa ser projetada em anteparos, uma imagem virtual pode ser vista por um observador, comportando-se em relação ao seu bulbo do olho como um objeto real.

No esquema abaixo representamos o exposto.

Em relação ao sistema óptico **S**, **P′** é um ponto imagem virtual que não pode ser projetado em anteparos. Entretanto, em relação ao bulbo do olho do observador, esse ponto comporta-se como ponto objeto real.

## 16. Sistemas ópticos estigmáticos, aplanéticos e ortoscópicos

Um sistema óptico é **estigmático** quando a um ponto objeto conjuga um e somente um ponto imagem.

Um sistema óptico é **aplanético** quando a um objeto plano e frontal conjuga uma imagem também plana e frontal.

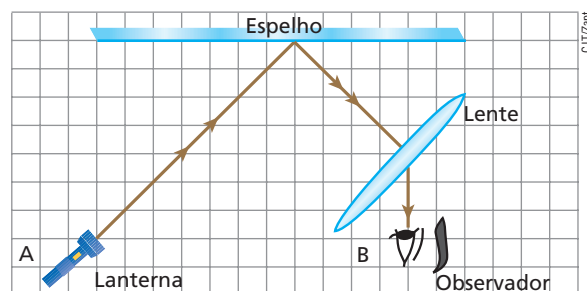
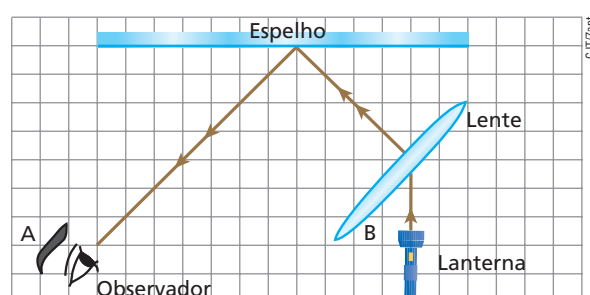
Um sistema óptico é **ortoscópico** quando a um objeto conjuga uma imagem geometricamente semelhante.

O único sistema óptico rigorosamente estigmático, aplanético e ortoscópico para qualquer posição do objeto é o espelho plano.

O "espelho mágico" representado na figura é constituído de uma região convexa, uma côncava e outra plana. Exceto a região plana, as demais regiões não são estigmáticas, nem aplanéticas, nem ortoscópicas. A imagem que o sistema conjuga é sensivelmente distorcida em relação ao objeto.

## 17. Reversibilidade na propagação da luz

O experimento que será relatado envolve um observador, um espelho, uma lente e uma pequena lanterna capaz de emitir um estreito pincel cilíndrico de luz monocromática.

Ligando a lanterna — ver a figura a seguir —, inicialmente situada na posição **A**, o pincel luminoso emitido por ela descreverá a trajetória mostrada, atingindo o olho do observador situado na posição **B**.

Permutando-se, agora, as posições da lanterna e do olho do observador, notaremos que, acendendo-se a lanterna na posição **B**, a luz emitida por ela descreverá a mesma trajetória do caso anterior, atingindo o olho do observador situado na posição **A**. A figura a seguir ilustra o exposto.

Esse experimento e outros similares constituem a evidência de que a propagação da luz é reversível, isto é:

Em idênticas condições, a trajetória seguida pela luz independe do sentido de propagação.

**Exemplo:**

É comum um motorista de táxi, ao olhar pelo retrovisor interno do veículo, ver a imagem dos olhos do passageiro, que está sentado no banco de trás, fornecida pelo espelho plano retrovisor interno. Graças à reversibilidade da luz, se o motorista consegue ver no espelho a imagem dos olhos do passageiro, este também consegue ver, no mesmo espelho, a imagem dos olhos do motorista.

## Leitura

### Por que o céu diurno é azul?

A luz branca solar — policromática, pois é constituída de diversas cores, como vermelho, alaranjado, amarelo, verde, azul, anil e violeta —, depois de atravessar cerca de 150 milhões de quilômetros no vácuo desde a sua emissão no Sol, adentra a atmosfera terrestre, sofrendo sucessivas refrações até atingir o solo.

Nessa penetração, ela tem suas componentes de maior frequência — o azul e o violeta — bastante difundidas pelas partículas dos gases que compõem o ar, especialmente o nitrogênio ($N_2$), que ressoam intensamente com essas duas radiações. As luzes azul e violeta são então espalhadas em todas as direções. O resultado disso é que essas duas frequências — em especial a azul, que é mais abundante no espectro da luz branca — incidem de forma predominante em nossos olhos, fazendo-nos perceber o céu diurno na tonalidade **azul**.

Fotografia de visão diurna: partículas dos gases do ar definem a cor azul do céu.

As nuvens em geral são visualizadas brancas pelo fato de as partículas de água que as constituem difundirem de forma praticamente igual as sete cores fundamentais.

Ao amanhecer e ao anoitecer, entretanto, o céu apresenta-se avermelhado na direção do Sol. Isso se explica porque, nessas ocasiões, a luz percorre na atmosfera um caminho mais longo que o percorrido, por exemplo, ao meio-dia. O azul é difundido logo nas camadas de entrada da luz, e o que chega aos nossos olhos são principalmente as radiações de baixa frequência (vermelho, alaranjado e amarelo) difundidas por partículas sólidas em suspensão nas camadas mais baixas da atmosfera.

Você sabe como seria o céu diurno caso a Terra não tivesse atmosfera? Seria negro, como o céu lunar. Veríamos iluminados o solo, os objetos e as pessoas. O Sol apareceria brilhante e imponente, porém imerso em uma imensidão escura que possibilitaria, mesmo durante o dia, a visão de outros corpos celestes — luminosos e iluminados —, como só ocorre em condições reais durante a noite.

O céu do meio-dia é azul, enquanto o céu do amanhecer e do anoitecer é avermelhado. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.)

## Descubra mais

1. Você assiste à decolagem de um avião de um local próximo à sua posição. Depois, você visualiza a mesma aeronave distante, já voando em grande altitude. Por que o avião parece mais lento em voo que em solo quando, na realidade, ocorre o contrário?
2. Por que as nuvens de chuva são vistas acinzentadas por um observador situado no solo terrestre?
3. Qual é a cor predominante do céu de Marte durante o dia daquele planeta?

## Exercícios

nível 1

**25.** Um quadro coberto com uma placa de vidro plano transparente não é tão bem visto quanto outro não coberto principalmente porque:
a) o vidro reflete uma parte da luz ambiente incidente sobre ele.
b) o vidro não refrata a luz proveniente do quadro.
c) o vidro difunde a luz proveniente do quadro.
d) o vidro absorve a luz proveniente do quadro.
e) o vidro reflete totalmente a luz ambiente incidente sobre ele.

**26.** À noite, numa sala iluminada, é possível ver os objetos da sala por reflexão numa vidraça de vidro transparente melhor do que durante o dia. Isso ocorre porque, à noite,
a) aumenta a parcela de luz refletida pela vidraça.
b) não há luz refletida pela vidraça.
c) diminui a parcela de luz refratada, proveniente do exterior.
d) aumenta a parcela de luz absorvida pela vidraça.
e) diminui a quantidade de luz difundida pela vidraça.

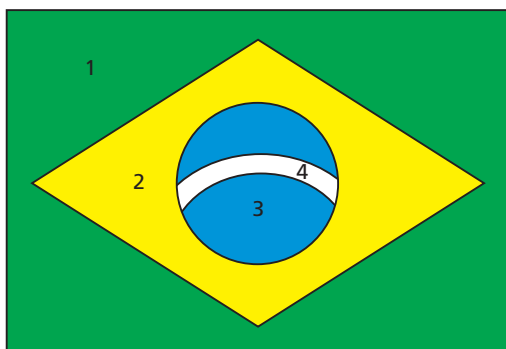
**27.** Um jarro pintado de cor clara pode ser visto de qualquer posição do interior de uma sala devidamente iluminada. Isso ocorre porque:
a) o jarro refrata grande parte da luz que recebe.
b) o jarro difunde para os seus arredores grande parte da luz que recebe.
c) o jarro absorve a luz que recebe.
d) o jarro é um bom emissor de luz.
e) o jarro reflete toda a luz que recebe.

**28. E.R.** Um estudante está usando uma camiseta que, vista à luz do Sol, se apresenta amarela, tendo impressa no peito a palavra ÓPTICA em letras vermelhas. Como se apresentará a camiseta se o estudante entrar em um recinto iluminado por luz monocromática vermelha? Suponha que os pigmentos amarelos do tecido e vermelhos da palavra impressa sejam puros.

**Resolução:**

A região que se apresentava amarela sob a luz solar se apresentará escura, pois a luz vermelha incidente sobre ela será totalmente absorvida.

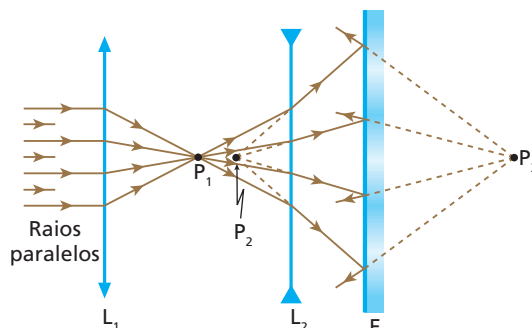
A região que se apresentava vermelha sob a luz solar (palavra ÓPTICA) se apresentará vermelha, pois a luz vermelha incidente sobre ela será predominantemente difundida.

**29.** A bandeira do Brasil esquematizada na figura é confeccionada em tecidos puramente pigmentados:

Estando estendida sobre uma mesa no interior de um recinto absolutamente escuro, a bandeira é iluminada por luz monocromática. Determine de que cores serão vistas as regiões designadas por 1, 2, 3 e 4 no caso de:
a) a luz monocromática ser verde.
b) a luz monocromática ser vermelha.

**30.** Um estudante que contemple um arco-íris através de um filtro óptico (lâmina de acrílico) amarelo:
a) verá o arco-íris completo, com todas as suas cores.
b) não verá nada do arco-íris.
c) verá apenas a faixa amarela do arco-íris.
d) verá todas as faixas do arco-íris, exceto a amarela.
e) verá apenas as faixas alaranjada, amarela e verde do arco-íris.

Responda aos testes de **31** a **36** com base nas informações seguintes.

Considere estas convenções e a associação de sistemas ópticos:

POR = ponto objeto real
POV = ponto objeto virtual
POI = ponto objeto impróprio
PIR = ponto imagem real
PIV = ponto imagem virtual
PII = ponto imagem impróprio
$L_1$ = lente convergente
$L_2$ = lente divergente
E = espelho plano

**31.** A luz incidente recebida por $L_1$ provém de um:
a) POR. b) POV. c) POI. d) PIR. e) PII.

**32.** Em relação a $L_1$, o ponto $P_1$ é:
a) POR. b) POV. c) PIR. d) PIV. e) PII.

**33.** Em relação a $L_2$, o ponto $P_1$ é:
a) POR. b) POV. c) PIR. d) PIV. e) PII.

**34.** Em relação a $L_2$, o ponto $P_2$ é:
a) POR. b) POV. c) PIR. d) PIV. e) PII.

**35.** Em relação a E, o ponto $P_2$ comporta-se como:
a) POR. b) POV. c) PIR. d) PIV. e) PII.

**36.** Em relação a E, o ponto $P_3$ é:
a) POR. b) POV. c) PIR. d) PIV. e) PII.

## Exercícios nível 2

**37.** A janela de um quarto escuro dá para a rua, intensamente iluminada pelo Sol. Abrindo uma estreita fresta na janela, um observador que está dentro do quarto percebe a entrada de um feixe de luz, que, além de poder ser visto de diversos locais do quarto, ilumina uma área do seu piso. A respeito dessa situação, analise as proposições seguintes:

I. Ao passar da rua para o interior do quarto, a luz sofre refração.
II. Ao incidir no piso do quarto, a luz sofre reflexão regular.
III. O feixe de luz pode ser visto de diversos locais do quarto devido à difusão da luz por partículas suspensas no ar.

O que você concluiu?

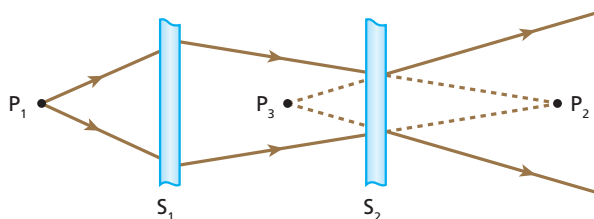
a) Todas são corretas.
b) Todas são erradas.
c) Apenas I e II são corretas.
d) Apenas I e III são corretas.
e) Apenas III é correta.

**38.** (Puccamp-SP) Num quarto absolutamente escuro, existem:

1. uma fonte de luz intensa, cujo feixe tem seção constante de 5 mm de diâmetro;
2. um espelho plano;
3. um anteparo branco não polido;
4. uma bola de futebol usada.

Ao se acender a fonte, a maneira de obter uma visão da superfície da bola (superfície essa de maior área) é dirigir o feixe de luz colimado:

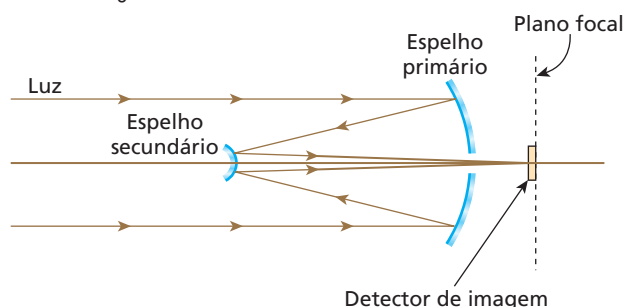
a) para o anteparo e iluminar a bola com a luz difundida.
b) para o espelho em incidência rasante e iluminar a bola com a luz refletida.
c) para o espelho sob ângulo de 60° e iluminar a bola com a luz refletida.
d) para o espelho sob ângulo de incidência de 30° e iluminar a bola com a luz refletida.
e) diretamente para a bola.

**39.** Na figura seguinte, $S_1$ e $S_2$ são sistemas ópticos e $P_1$ é uma fonte puntiforme de luz:

Com base nessa situação, responda:

a) O que representa $P_1$ em relação a $S_1$?
b) O que representa $P_2$ em relação a $S_1$? E em relação a $S_2$?
c) O que representa $P_3$ em relação a $S_2$?

**40.** (UFF-RJ) O telescópio refletor *Hubble* foi colocado em órbita terrestre, de modo que, livre das distorções provocadas pela atmosfera, tem obtido imagens espetaculares do universo. O *Hubble* é constituído por dois espelhos esféricos.

Imagem obtida pelo telescópio *Hubble*.

O espelho primário é côncavo e coleta os raios luminosos oriundos de objetos muito distantes, refletindo-os em direção a um espelho secundário, convexo, bem menor que o primeiro. O espelho secundário, então, reflete a luz na direção do espelho principal, de modo que esta, passando por um orifício em seu centro, é focalizada em uma pequena região onde se encontram os detectores de imagem.

Com relação a esse sistema óptico, pode-se afirmar que a imagem que seria formada pelo espelho primário é:

a) virtual e funciona como objeto virtual para o espelho secundário, já que a imagem final tem de ser virtual.
b) real e funciona como objeto real para o espelho secundário, já que a imagem final tem de ser virtual.
c) virtual e funciona como objeto virtual para o espelho secundário, já que a imagem final tem de ser real.
d) real e funciona como objeto virtual para o espelho secundário, já que a imagem final tem de ser real.
e) real e funciona como objeto real para o espelho secundário, já que a imagem final tem de ser real.

**41.** Considere as proposições seguintes:

I. Uma imagem real pode ser projetada em um anteparo.
II. Uma imagem virtual pode ser projetada em um anteparo.
III. Qualquer ponto que se comporta como imagem real pode ser projetado em um anteparo.
IV. Para que uma imagem real seja visada por um observador, ela deve estar, necessariamente, projetada em um anteparo.

É (são) correta(s):

a) todas.
b) somente I.
c) somente II.
d) somente I e III.
e) somente I, III e IV.

## Leitura

### Mudança de Paradigma

Imagine que um dos parâmetros físicos do nosso dia a dia fosse subitamente alterado. Por exemplo, que a temperatura média ambiente sofresse um aumento em torno de 30 °C, passando, no Brasil, dos habituais 20 °C para 50 °C. Que consequências isso traria?

Certamente, nossas roupas seriam completamente diferentes, o mesmo ocorrendo com a alimentação. Nossas casas teriam climatização especial, além de paredes e teto com adequada isolação. Provavelmente, as ruas não teriam calçadas ao ar livre, já que a exposição às condições ambientes poderia ser danosa à saúde. Enfim, essa mudança do paradigma térmico acarretaria profundas alterações em nossos costumes e tecnologias em geral.

Em meados do século XIX a maioria dos cientistas estava plenamente satisfeita com a eficácia da mecânica clássica, fundamentada nas leis de Newton, que explicavam a contento a maioria dos fenômenos conhecidos. Imperava uma espécie de marasmo científico que levava a crer que nada mais haveria de ser proposto com vistas a explicar os mecanismos universais. Foi justamente quando a eletricidade começou a ser utilizada de maneira sistemática, dotando os laboratórios de novos aparelhos, agora acionados por esse novo elemento motriz. Já no final daquele século, descobertas diversas deixaram claro que o conhecimento físico da época era impotente para dar explicações amplas ao grande número de fenômenos que se revelavam diante dos cientistas. O efeito fotoelétrico, por exemplo, suscitava uma explicação quântica, inexistente na teoria newtoniana. Era necessário um novo modelo atômico, menos simplista que o proposto por Ernest Rutherford (1871 – 1937) para o átomo de hidrogênio, e uma teoria que atribuísse à luz um caráter mais amplo que o meramente ondulatório. As concepções de comprimento, massa e tempo como grandezas absolutas careciam de reformulação, o que foi feito por Albert Einstein (1879 – 1955) em sua Teoria da Relatividade.

Físicos reunidos em Bruxelas, Bélgica, em 1927, para a conferência de Solvay, que ocorre trianualmente. Esse grupo foi decisivo na elaboração dos fundamentos da Mecânica Quântica, plataforma teórica que, juntamente com a Relatividade Especial, trouxe novos paradigmas à Física, ampliando sobremaneira essa ciência.

Surgiram, então, novos paradigmas que permitiram à Física desenvolver-se, como ocorre com uma planta limitada pelas paredes de um vaso apertado, que é transplantada em solo aberto... A Relatividade estabeleceu que o limite cosmológico de velocidades deveria ser a velocidade da luz no vácuo, de valor $3,0 \cdot 10^8$ m/s. Nada poderia superar esse limite e tudo se ajustou a esse novo paradigma. A radiação do corpo negro, explicada por Max Planck (1858 – 1947), e o efeito fotoelétrico, elucidado por Einstein no princípio do século XX, fomentaram o surgimento da Mecânica Quântica, em progresso até os dias de hoje.

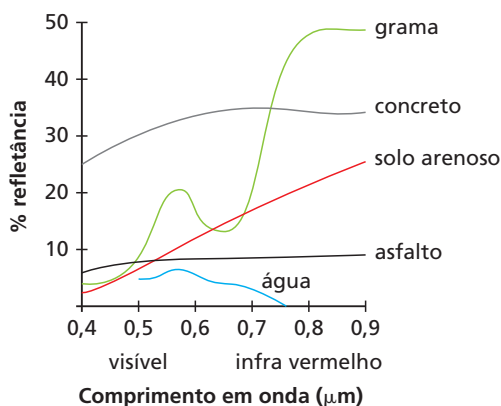
As novas teorias apresentadas na primeira metade do século XX e os paradigmas estabelecidos nessa ocasião, ampliaram sobremaneira o conhecimento da natureza e serviram de base para a elaboração de novos fundamentos tecnológicos que podem ser notados atualmente. Computadores, telefones celulares, equipamentos de GPS (sigla em inglês para *Global Positioning System*), produtos que utilizam raios LASER (sigla em inglês para *Light Amplification by Stimulated Emisson of Radiation*), como tocadores de CD(s) e DVD(s), além de instalações e armas nucleares, funcionam com base na Física Moderna, denominação que engloba as proposições de Planck, Einstein, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwing Schroedinger, Louis De Broglie, dentre outros.

Podemos dizer que a mecânica newtoniana foi descartada com esses novos paradigmas? Claro que não! Ela continua explicando satisfatoriamente a grande maioria dos fenômenos com os quais convivemos. As novas teorias serviram apenas para estender limites e possibilidades, demonstrando que nenhuma ciência pode ser considerada pronta e encerrada em si mesma. A evolução científica ocorre por meio de uma sucessão de ideias, sempre interfaceadas com outros saberes, que são propostas de acordo com as tecnologias disponíveis em cada época. É um edificio em pemanente construção, algo análogo ao que ocorre na cidade de Barcelona, na Espanha, com o Templo Expiatório da Sagrada Família, iniciado em 1882 e ainda em construção. Logo no início, a edificação ficou a cargo do arquiteto catalão Antônio Gaudí, que adotou o estilo neogótico. Gaudí liderou a obra por cerca de 40 anos. Depois dele, porém, o projeto passou por várias reformulações e novas concepções arquitetônicas imprimiram às três fachadas do templo peculiaridades bastante diferentes.

O Templo da Sagrada Família, em Barcelona, exemplifica o que ocorre com a Física: é um edifício em permanente construção, que contempla no seu todo valores fundamentais e referências de diversas épocas.

## Exercícios

nível 3

**42.** (Enem) – O processo de interpretação de imagens capturadas por sensores instalados a bordo de satélites que imageiam determinadas faixas ou bandas do espectro de radiação eletromagnética (REM) baseia-se na interação dessa radiação com os objetos presentes sobre a superfície terrestre. Uma das formas de avaliar essa interação é por meio da quantidade de energia refletida pelos objetos. A relação entre a refletância de um dado objeto e o comprimento de onda da REM é conhecida como curva de comportamento espectral ou assinatura espectral do objeto, como mostrado na figura, para objetos comuns na superfície terrestre.

D'ARCO, E. *Radiometria e Comportamento Espectral de Alvos*. INPE. Disponível em: <http:/www.agro.unitau.br>. Acesso em: 3 maio 2009.

De acordo com as curvas de assinatura espectral apresentadas na figura, para que se obtenha a menor discriminação dos alvos mostrados, convém selecionar a banda correspondente a que comprimento de onda em micrômetros (μm)?

a) 0,4 a 0,5
b) 0,5 a 0,6
c) 0,6 a 0,7
d) 0,7 a 0,8
e) 0,8 a 0,9

**43.** (Vunesp-SP) – O gráfico da figura 1 representa a intensidade da radiação transmitida ou refratada (curva **T**) e a intensidade da radiação refletida (**R**) em função do ângulo de incidência da luz numa superfície plana de vidro transparente de índice de refração 1,5. A figura 2 mostra três direções possíveis — I, II e III — pelas quais o observador **O** olha para a vitrine plana de vidro transparente, V.

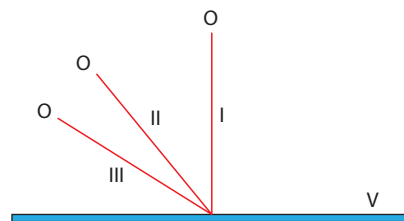
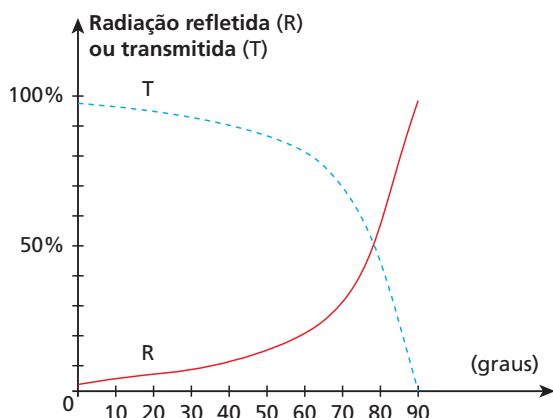



Figura 2

Comparando as duas figuras, pode-se concluir que esse observador vê melhor o que está dentro da vitrine quando olha na direção:

a) I e vê melhor o que a vitrine reflete quando olha na direção II.
b) I e vê melhor o que a vitrine reflete quando olha na direção III.
c) II e vê melhor o que a vitrine reflete quando olha na direção I.
d) II e vê melhor o que a vitrine reflete quando olha na direção III.
e) III e vê melhor o que a vitrine reflete quando olha na direção I.

**44.** (Enem) Para que uma substância seja colorida ela deve absorver luz na região do visível. Quando uma amostra absorve luz visível, a cor que percebemos é a soma das cores restantes que são refletidas ou transmitidas pelo objeto. A Figura 1 mostra o espectro de absorção para uma substância e é possível observar que há um comprimento de onda em que a intensidade de absorção é máxima. Um observador pode prever a cor dessa substância pelo uso da roda de cores (Figura 2); o comprimento de onda correspondente à cor do objeto é encontrado no lado oposto ao comprimento de onda da absorção máxima.

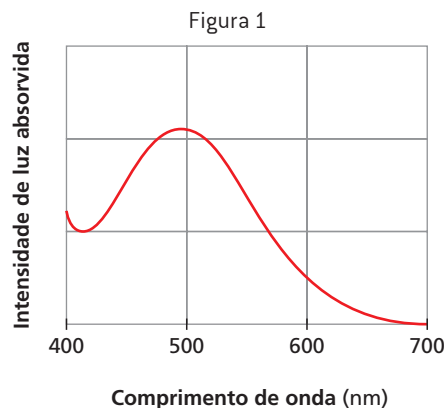



Figura 1

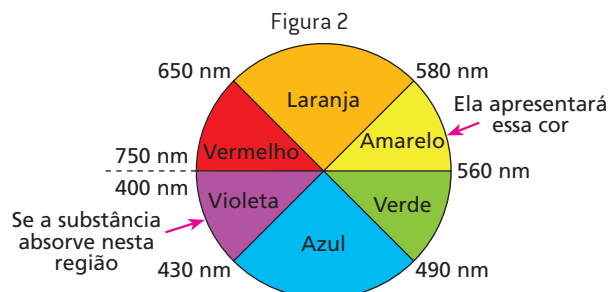



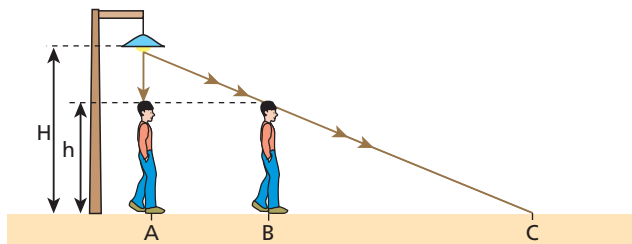
Figura 2

BROWN, T. *Química e Ciência Central*. 2005 (adaptado)

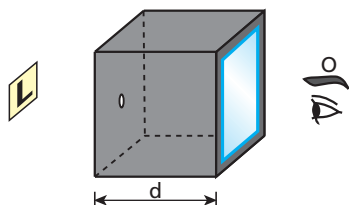
Qual a cor da substância que deu origem ao espectro da Figura 1?

a) Azul.
b) Verde.
c) Violeta.
d) Laranja.
e) Vermelho.

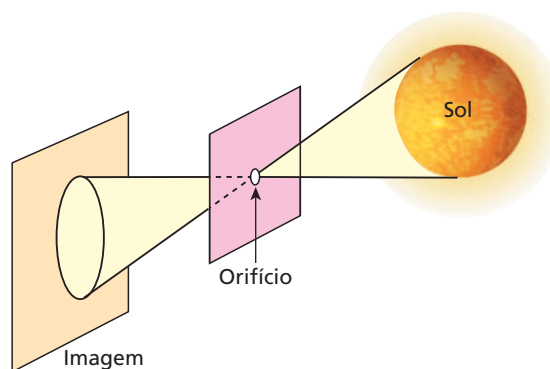
**45.** Os raios solares incidem sobre uma pessoa de 1,60 m de altura. Sua sombra projetada sobre um piso horizontal tem 2,40 m de comprimento. Um poste vertical situado próximo à pessoa também tem sua sombra projetada sobre o piso. Algumas horas mais tarde, a sombra da pessoa apresenta 2,00 m de comprimento, enquanto a sombra do poste tem 2,50 m a menos de comprimento que a anterior. Qual a altura do poste?

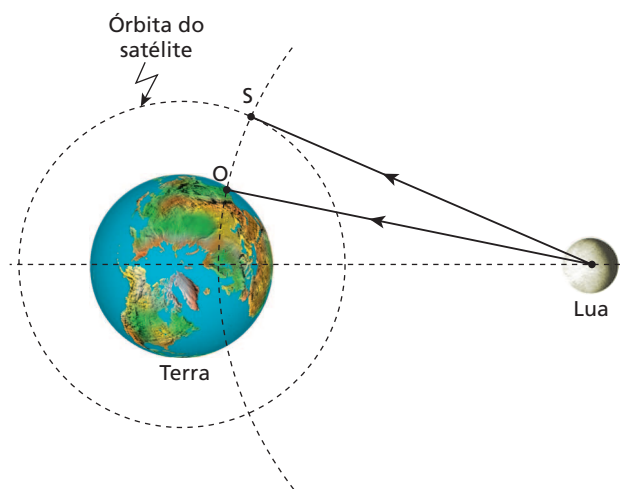
**46.** Na situação esquematizada a seguir, um homem de altura **h**, em movimento para a direita, passa pelo ponto **A**, da vertical baixada de uma lâmpada fixa num poste a uma altura **H** em relação ao solo, e dirige-se para o ponto **B**.

Sabendo que, enquanto o homem se desloca de **A** até **B** com velocidade média de intensidade **V**, a sombra de sua cabeça projetada sobre o solo horizontal se desloca de **A** até **C** com velocidade média de intensidade **V**', calcule **V**' em função de **h**, **H** e **V**.

**47.** (Fatec-SP) Uma placa retangular de madeira tem dimensões 40 cm × 25 cm. Através de um fio que passa pelo seu baricentro, ela é presa ao teto de uma sala, permanecendo horizontalmente a 2,0 m do assoalho e a 1,0 m do teto. Bem junto ao fio, no teto, há uma lâmpada cujo filamento tem dimensões desprezíveis.
A área da sombra projetada pela placa no assoalho vale, em metros quadrados:
a) 0,90. b) 0,40. c) 0,30. d) 0,20. e) 0,10.

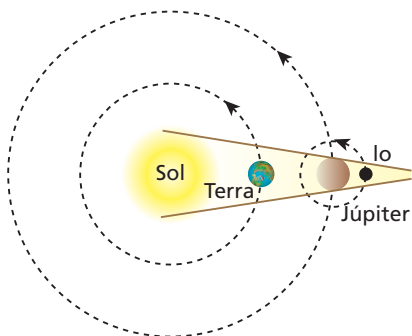
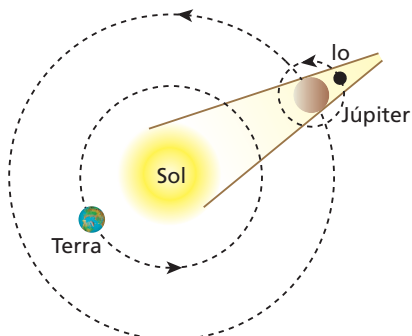
**48.** (Fuvest-SP) Um aparelho fotográfico rudimentar é constituído de uma câmara escura com um orifício em uma face e um anteparo de vidro fosco na face oposta. Um objeto luminoso em forma de **L** encontra-se a 2,0 m do orifício e sua imagem no anteparo é 5 vezes menor que seu tamanho natural:

a) Que imagem é vista pelo observador **O** indicado na figura? Esquematize.
b) Determine a largura **d** da câmara.

**49.** (FEI-SP) Um dos métodos para medir o diâmetro do Sol consiste em determinar o diâmetro de sua imagem nítida, produzida sobre um anteparo, por um orifício pequeno feito em um cartão paralelo a este anteparo, conforme ilustra a figura fora de escala a seguir. Em um experimento realizado por esse método, foram obtidos os seguintes dados:

I. Diâmetro da imagem = 9 mm
II. Distância do orifício até a imagem = 1,0 m
III. Distância do Sol à Terra = $1,5 \cdot 10^{11}$ m

Qual é aproximadamente o diâmetro do Sol medido por esse método?
a) $1,5 \cdot 10^8$ m
b) $1,35 \cdot 10^9$ m
c) $2,7 \cdot 10^8$ m
d) $1,35 \cdot 10^8$ m
e) $1,5 \cdot 10^9$ m

**50.** Com seu telescópio, um astrônomo visa a Lua para observar a decolagem de um módulo lunar. Ao mesmo tempo, seu assistente observa o fenômeno pela televisão, que faz uma transmissão via satélite. No instante da decolagem, o satélite **S** e o observatório **O** (onde estão o astrônomo e seu assistente) acham-se sobre uma mesma circunferência, que tem centro na Lua, conforme mostra o esquema a seguir (fora de escala e em cores-fantasia). A distância **OS** vale $6,0 \cdot 10^4$ km.

O astrônomo e seu assistente cronometram o instante em que aparecem as chamas do foguete do módulo lunar. Adotando-se para as ondas eletromagnéticas a velocidade $3,0 \cdot 10^8$ m/s (no vácuo e na atmosfera terrestre), pode-se afirmar que o assistente vê o fenômeno:
a) no mesmo instante que o astrônomo.
b) 0,20 s antes do astrônomo.
c) 0,20 s após o astrônomo.
d) 2,0 s antes do astrônomo.
e) 2,0 s após o astrônomo.

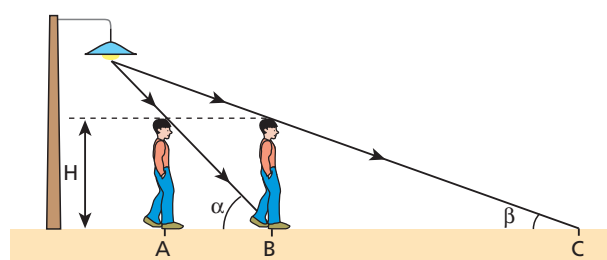
## Para raciocinar um pouco mais

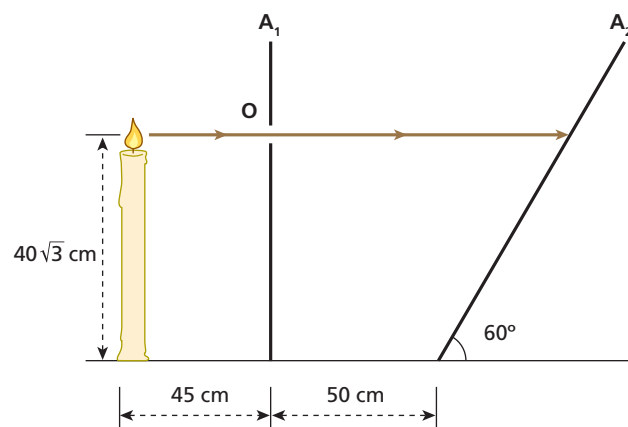
**51.** Em 1672, o astrônomo dinamarquês Ole Christensen Römer (1644-1710), estudando eclipses do satélite Io de Júpiter, obteve um valor bastante razoável para a velocidade da luz. Römer observou o instante do início de dois eclipses do satélite — imersão de Io no cone de sombra de Júpiter: o primeiro, com a Terra em conjunção com Júpiter, e o segundo, com a Terra em oposição a Júpiter, conforme ilustram os esquemas fora de escala abaixo.

Representação esquemática da Terra e de Júpiter em conjunção.

Representação esquemática da Terra e de Júpiter em oposição.

Ele notou que, no segundo caso, a informação luminosa demorava um intervalo de tempo a mais para atingir a Terra que no primeiro caso. Então questionou: como poderia um fenômeno astronômico regular e previsível ter seu início retardado em função do local do espaço de onde era observado? A explicação dada pelo astrônomo foi a seguinte: com a Terra em oposição a Júpiter, a luz indicativa do início do eclipse teria de percorrer uma distância maior — um segmento de reta adicional — para atingir a Terra, o que justificaria o atraso verificado. Essa distância seria o diâmetro da órbita terrestre. Realizando-se a medição da velocidade da luz pelo método Römer com recursos atuais, determina-se um atraso de 16 min 34 s entre o início dos dois eclipses de Io. Sabendo-se que o raio médio da órbita terrestre em torno do Sol é igual a 149 milhões de quilômetros, responda:

a) Os eclipses, de um modo geral, confirmam que princípio da Óptica Geométrica?
b) Que valor se obtém modernamente para a velocidade da luz pelo método de Römer?

**52.** A primeira medição da distância entre a Terra e o Sol foi realizada pelo filósofo grego Anaxágoras, cerca de quatro séculos antes de Cristo. Ele não conhecia o paralelismo dos raios solares que atingem nosso planeta, porém sabia que estacas verticais cravadas no solo não projetavam sombra em Siena, mas projetavam sombra em Alexandria, ao meio-dia do solstício de verão – 21 de junho, no hemisfério Norte. Anaxágoras considerava a Terra plana e sabia que a distância de Siena a Alexandria era de 5 000 *stadia* (1 *stadium* = = 183 metros, Egito). Sendo **h** a altura da estaca, a medida de sua sombra em Alexandria era de 0,126 **h**.
Determine, em quilômetros, a distância entre a Terra e o Sol (na realidade, de Siena ao Sol) obtida por Anaxágoras. Analise o resultado, comparando-o com a medida atual.

**53.** A figura a seguir representa um homem de altura **H** que vai do ponto **A** ao ponto **B** em movimento retilíneo. Durante o mesmo intervalo de tempo, a sombra de sua cabeça, projetada no solo horizontal, vai do ponto **B** ao ponto **C**:

Conhecendo os ângulos **α** e **β** ($\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$), determine a relação entre as velocidades escalares médias da sombra ($v_s$) e do homem ($v_h$).

**54.** Uma vela acesa, de comprimento inicial $40\sqrt{3}$ cm, está a 45 cm de um anteparo opaco $A_1$ dotado de um pequeno orifício **O**, situado no mesmo nível da posição inicial da chama pontual da vela. O experimento é realizado no interior de um laboratório escurecido de modo que um estreito feixe luminoso proveniente da vela atravessa **O** indo incidir em um outro anteparo $A_2$, inclinado de 60° em relação à horizontal e apoiado a 50 cm de $A_1$, conforme ilustra a figura.

Tendo-se verificado que, decorridas 2,0 h da situação inicial, o comprimento da vela reduziu-se de $15\sqrt{3}$ cm, pode-se afirmar que a velocidade escalar média com que o feixe luminoso projetado em $A_2$ percorreu esse anteparo foi, em cm/min, igual a:

a) 0,25.
b) 0,50.
c) 0,75.
d) 1,00.
e) 1,50.

# Tópico 2

# Reflexão da luz

## Bloco 1

### 1. Reflexão: conceito, elementos e leis

A mitologia grega é mesmo pródiga...

Segundo a narrativa do poeta romano Ovídio em seu livro *Metamorfoses*, Narciso foi um jovem belíssimo que, por ter recusado o amor da ninfa Eco, foi condenado por Nêmesis, deusa da vingança e da ética, a apaixonar-se por sua própria imagem refletida nas águas de um lago tranquilo. Narciso, nome derivado de *narke*, que em grego significa entorpecido, teria ficado obcecado por admirar-se, até sua completa inanição, o que lhe ceifou a vida, transformando-o em uma flor: o narciso.

Narciso tem inspirado artistas de vários segmentos ao longo do tempo, como Caravaggio (1571-1610), pintor do barroco italiano que retratou este símbolo máximo de vaidade como reproduzido abaixo.

Michelangelo Merisi da Caravaggio/Palazzo Barberini, Roma, Itália.

*Narciso* (1594-1596), obra do pintor italiano Caravaggio. Óleo sobre tela, Galleria Nazionale d'Arte Antica, Roma.

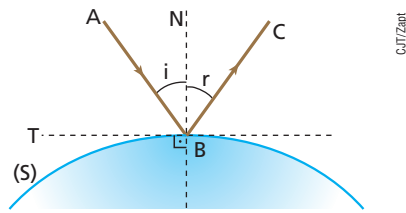
Note que a superfície da água se comporta como um bom espelho plano, o qual, refletindo a luz difundida pelo corpo do rapaz, produz a imagem encantadora, razão de seu autodeslumbramento.

Este capítulo refere-se ao fenômeno da reflexão da luz e suas aplicações em sistemas ópticos, como espelhos planos e esféricos. Dentro de equipamentos ópticos de larga utilização, a luz também se reflete, o que pode ser verificado em algumas câmeras fotográficas, periscópios, binóculos e telescópios.

Em Ondulatória e também no capítulo anterior, vimos que:

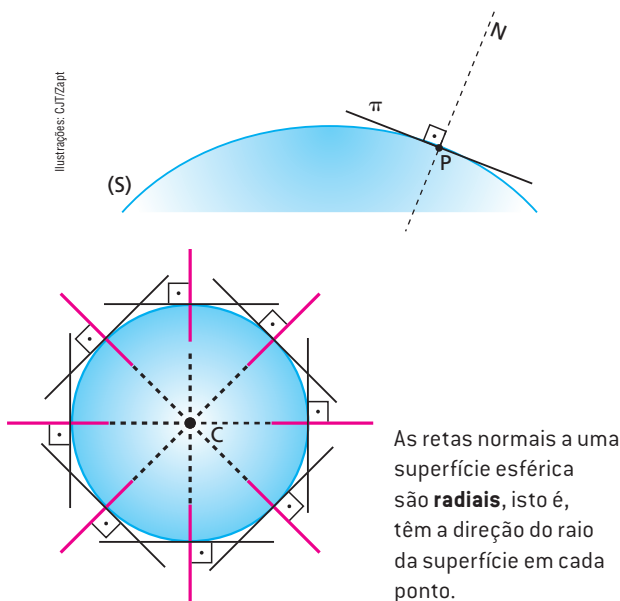
**Reflexão** é o fenômeno que consiste no fato de a luz voltar a se propagar no meio de origem, após incidir na superfície de separação desse meio com outro.

#### Elementos

Considere o esquema a seguir, que representa a reflexão de um raio de luz, destacando os elementos nela envolvidos.

S = superfície polida e refletora
AB = raio incidente
BC = raio refletido
N = reta normal a **S** no ponto de incidência
T = reta tangente a **S** no ponto de incidência
i = ângulo de incidência, formado pelo raio incidente (**AB**) e pela reta normal (**N**)
r = ângulo de reflexão, formado pelo raio refletido (**BC**) e pela reta normal (**N**)

A reta normal a uma superfície em determinado ponto é a reta perpendicular a um plano tangente à superfície no ponto considerado. Veja a figura a seguir, em que:

**S** é a superfície considerada;
$\pi$ é o plano tangente a **S** no ponto **P**;
**N** é a reta normal a **S** no ponto **P**.

As retas normais a uma superfície esférica são **radiais**, isto é, têm a direção do raio da superfície em cada ponto.

Ao plano formado pelo raio incidente e pela reta normal dá-se o nome de **plano de incidência**.

### Leis

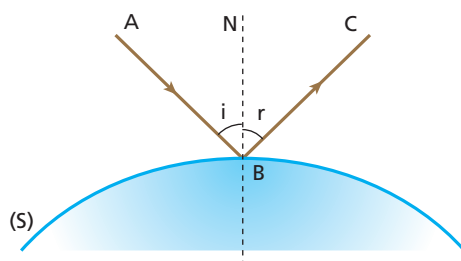
O fenômeno da reflexão é regido por duas leis, que podem ser verificadas teórica e experimentalmente.

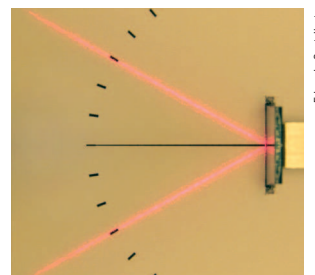
#### 1ª Lei da Reflexão

O raio refletido pertence ao plano de incidência, ou seja, o raio refletido, a reta normal no ponto de incidência e o raio incidente são **coplanares**.

#### 2ª Lei da Reflexão

O ângulo de reflexão é sempre **igual** ao ângulo de incidência.

Veja o esquema a seguir, que representa a reflexão de um raio luminoso em uma superfície **S**.

De acordo com as leis da reflexão, se **AB** e **N** estiverem contidos no plano do papel, o mesmo deverá acontecer com **BC**, e teremos ainda a igualdade r = i.

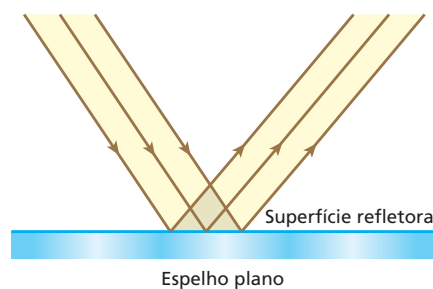
Na fotografia abaixo, um estreito pincel cilíndrico de luz proveniente de um apontador *laser* é refletido por um pequeno espelho.

Podemos observar que os pincéis incidente e refletido são coplanares, isto é, estão quase totalmente contidos no plano de apoio do espelho, e também que o ângulo de reflexão é igual ao de incidência. É possível verificar ainda a reversibilidade da luz. Repare que, independentemente de a luz provir de cima ou de baixo, sua trajetória é a mesma.

## 2. O espelho plano

Chama-se **espelho plano** qualquer superfície plana, polida e com alto poder refletor.

Bons espelhos planos são obtidos com o polimento de chapas metálicas. Entretanto, os espelhos obtidos assim nem sempre são baratos e funcionais. Em geral, os espelhos planos são confeccionados a partir de uma lâmina de vidro hialino (transparente) de faces paralelas, sendo uma delas recoberta por uma película de nitrato de prata que se reduz a prata metálica. A fixação dessa película é obtida colocando-se sobre ela uma fina camada de cobre que recebe demãos de tinta e verniz.

Os espelhos planos têm emprego bastante diversificado. São utilizados domesticamente, prestando-se a variados fins, e também como componentes de vários sistemas ópticos.

Adotaremos o esquema abaixo para representar os espelhos planos.

Convém notar que, em um espelho plano, há predominância da reflexão regular.

## Leitura

### A distância da Terra à Lua (384 000 km, em média) é monitorada pela reflexão da luz

A Lua, único satélite natural da Terra, sempre exerceu enorme fascínio sobre a mente humana. É realmente encantador contemplar a lua cheia em noites de pouca nebulosidade e deixar a imaginação indagar a respeito das mais profundas questões da humanidade.

E os devaneios do homem traduziram-se em ousadia, colocando-o materialmente em solo lunar no histórico 20 de julho de 1969. A missão Apollo 11, tripulada por Neil A. **Armstrong**, Michael **Collins** e Buzz **Aldrin**, permitiu, pela primeira vez, a um habitante terrestre caminhar sobre a superfície da Lua, dando início à maior saga da humanidade em sua busca por conhecimentos sobre o cosmo.

Passada a emoção do pioneirismo, dois desses astronautas, Armstrong e Aldrin, deixaram suas emblemáticas pegadas no arenoso solo lunar e iniciaram os procedimentos e experimentações previstos. Colheram farto material para posterior análise, fotografaram detalhadamente o ambiente lunar e saltitaram com leveza sob a ação de uma aceleração da gravidade menos intensa que a da Terra (cerca de 1,67 m/s$^2$ ante 9,81 m/s$^2$, respectivamente). Faltando aproximadamente uma hora para abandonar o local, deixaram no chamado Mar da Tranquilidade (na verdade, uma grande cratera árida) um equipamento que é utilizado até os dias de hoje para monitoramento da distância entre a Terra e a Lua: o refletor lunar de feixes *laser* ou, em inglês, *lunar laser retroreflector array*.

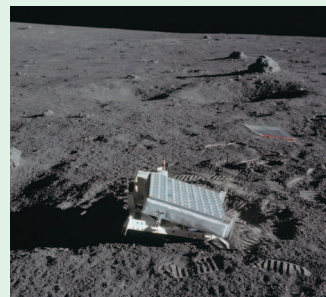
O processo de medição da distância da Terra à Lua é relativamente simples: dispara-se um estreito feixe *laser* de grande potência a partir de um determinado telescópio terrestre e cronometra-se o intervalo de tempo gasto pelo feixe para atingir a Lua, sofrer reflexão no equipamento lá deixado e ser captado de volta pelo mesmo telescópio. Com a medida do referido intervalo de tempo (cerca de 2,56 s) e o conhecimento da velocidade de propagação da luz ($3{,}0 \cdot 10^8$ m/s), torna-se possível determinar a distância do satélite ao nosso planeta. Os valores obtidos são próximos de 384 000 km, em média.

Sendo $\Delta t$ o intervalo de tempo medido pelo equipamento e *c* a intensidade da velocidade da luz, o cálculo da distância *d* da Terra à Lua é feito automaticamente pelos computadores do telescópio com base nos conceitos do movimento uniforme:

$$c = \frac{2d}{\Delta t} \Rightarrow d = \frac{c\,\Delta t}{2}$$

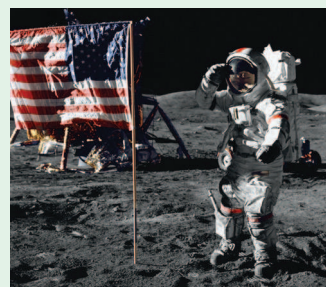
O feixe *laser*, no entanto, espraia-se durante sua propagação, atingindo a Lua com um diâmetro próximo de 7 km e a Terra, em seu retorno, com um diâmetro em torno de 20 km. Por isso os sensores de captação existentes nos telescópios são muito sensíveis, chegando até a registrar a incidência de uns poucos fótons de luz. O método permite a obtenção de medidas com grande precisão, afetadas por uma margem de erro de apenas alguns centímetros.

Além do equipamento deixado pela missão Apollo 11, missões posteriores, incluindo uma soviética, também instalaram, em outros locais da Lua, sistemas semelhantes. Dessa forma, é possível manter um monitoramento preciso da órbita lunar em torno da Terra, bem como dos movimentos desse satélite. Isso é feito em alguns telescópios terrestres, instalados em sua maioria nos Estados Unidos e na Europa. Tais avaliações possibilitaram aos astrônomos saber, entre outras informações, que a Lua está se afastando de nosso planeta cerca de 3,8 cm ao ano.

As viagens tripuladas à Lua foram de importância singular por terem agregado, ao que já se sabia, conhecimentos essenciais sobre o satélite, o Sistema Solar, o Universo e a própria espécie humana.

Nasa Images

Fotografia do refletor lunar de feixes *laser* deixado no solo da Lua. Ele é formado por células prismáticas dispostas lado a lado.

Biosphoto/Other Images – Brasil

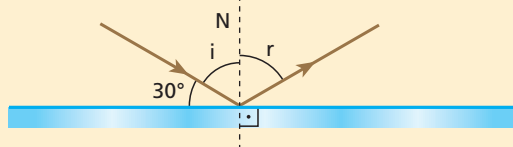
Um potente feixe *laser* é disparado rumo à Lua do observatório da Côte d'Azur, Nice, França.

Nasa Images

A última missão norte-americana tripulada à Lua foi a Apollo 17, em dezembro de 1972. Nesta fotografia, o comandante da expedição, o astronauta Eugene A. Cernan, reverencia a bandeira de seu país deixada no solo lunar como um marco dessa grande aventura humana.

## Exercícios — nível 1

**1. E.R.** Um raio luminoso incide sobre um espelho plano formando um ânguio de 30° com sua superfície refletora. Qual o ângulo formado entre os raios incidente e refletido?

**Resolução:**

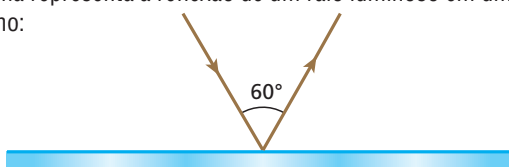
A figura a seguir ilustra a situação proposta:

O ângulo procurado é $\alpha$, dado por: $\alpha = i + r$.

Porém, conforme a **2ª Lei da Reflexão**, $r = i$ (o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência). Logo:

$$\alpha = i + i \Rightarrow \alpha = 2i$$

Observando que $30° + i = 90°$, temos: $i = 60°$

Portanto: $\alpha = 2 \cdot 60° \Rightarrow \boxed{\alpha = 120°}$

**2.** O esquema representa a reflexão de um raio luminoso em um espelho plano:

Determine:

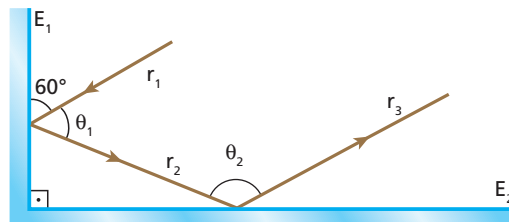
a) o ângulo de incidência da luz.

b) o ângulo formado entre o raio refletido e o espelho.

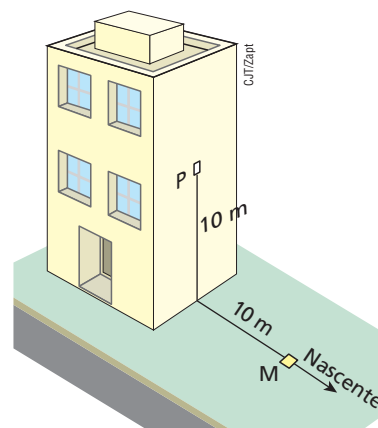
**3.** (Esam-RN) Na figura a seguir, considere:

$E_1$ – espelho plano vertical

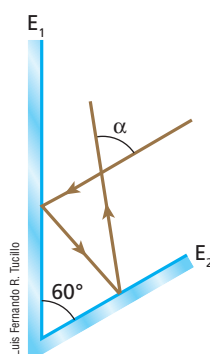
$E_2$ – espelho plano horizontal

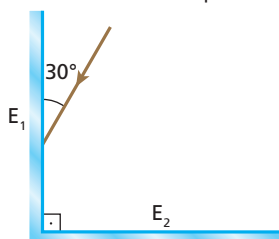
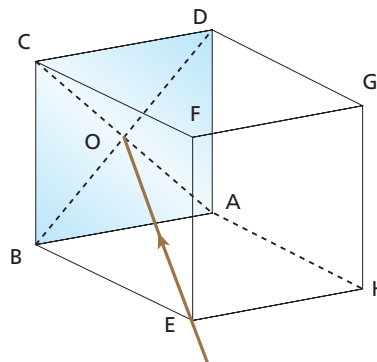
$r_1$, $r_2$ e $r_3$ – segmentos de um raio luminoso que incide sucessivamente em $E_1$ e $E_2$

Nas condições indicadas, quanto valem, respectivamente, os ângulos $\theta_1$ e $\theta_2$?

**4.** Observe a figura:

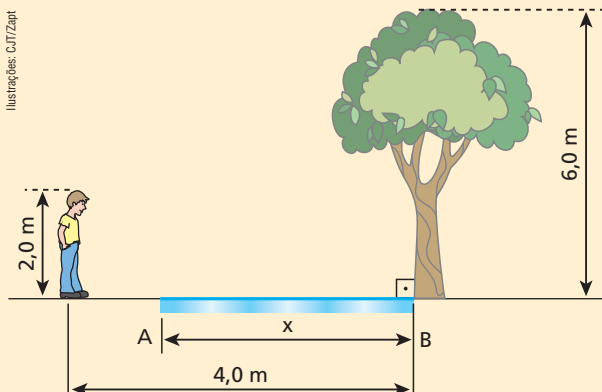
Em um dia de céu claro, o Sol estava no horizonte (0°) às 6 h da manhã. Às 12 h, ele se encontrava no zênite (90°). A que horas a luz solar, refletida no espelhinho plano **M** deitado sobre o solo, atingiu o ponto **P**?

## Exercícios — nível 2

**5.** Dois espelhos planos formam entre si um ângulo de 60°. Um raio de luz monocromática incide no espelho $E_1$, reflete-se, incide no espelho $E_2$, reflete-se e emerge do sistema conforme ilustra a figura.

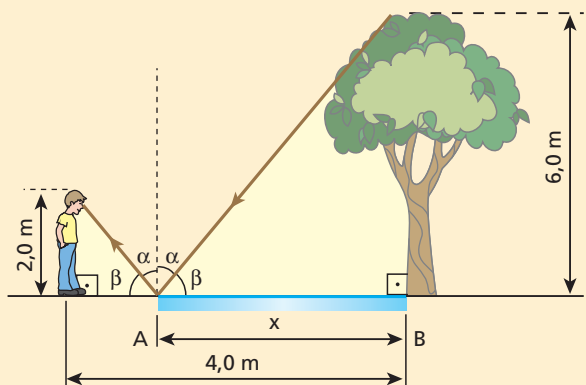
Qual o valor do ângulo $\alpha$? O valor de $\alpha$ depende do ângulo de incidência da luz em $E_1$?

**6.** Na figura, os espelhos planos $E_1$ e $E_2$ são perpendiculares. Um raio luminoso incide no espelho $E_1$ formando 30° com a superfície refletora, conforme está indicado:

Copie a figura em seu caderno e represente a trajetória da luz até que esta deixe o sistema de espelhos.

**7.** Considere a caixa cúbica representada abaixo, em que a face ABCD é espelhada, de tal modo que a superfície refletora seja voltada para dentro da caixa. Suponha que um raio luminoso penetre na caixa pelo vértice **E** e incida no ponto **O**, centro do espelho.

Você poderá, então, afirmar que o correspondente raio refletido sairá da caixa pelo vértice:

a) **C**.
b) **G**.
c) **F**.
d) **H**.
e) **A**.

**8. E.R.** No esquema, o observador deseja visar a imagem da árvore por meio do espelho plano **AB** deitado sobre o solo:

Qual deve ser o menor comprimento **x** do espelho para que o observador veja a imagem completa da árvore, isto é, do topo até o pé?

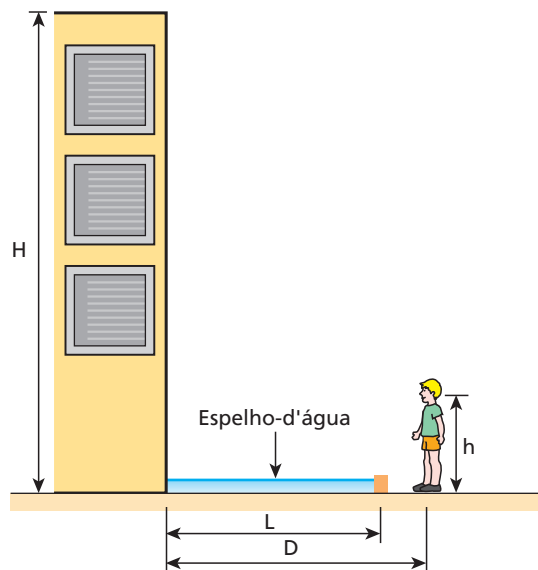
**Resolução:**

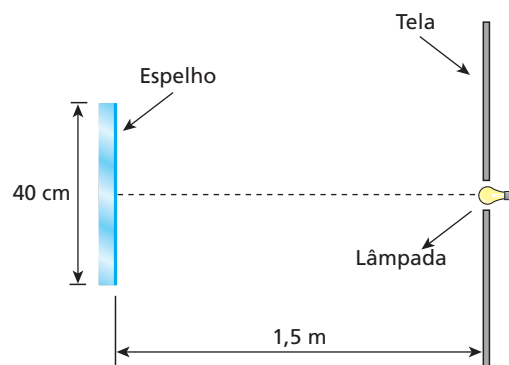
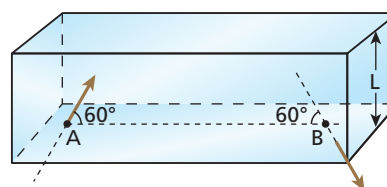
Se o comprimento **x** do espelho é o menor possível para que o observador veja a imagem completa da árvore, um raio de luz proveniente do seu topo deve refletir-se na borda esquerda do espelho e atingir o olho do observador, conforme o esquema a seguir.

Os triângulos retângulos destacados são semelhantes. Logo:

$$\frac{x}{4,0 - x} = \frac{6}{2,0} \Rightarrow x = 3,0\,(4,0 - x)$$

$$x = 12 - 3,0\,x \Rightarrow 4,0\,x = 12$$

$$\boxed{x = 3,0 \text{ m}}$$

**9.** Um garoto, cujo globo ocular está a uma altura **h** em relação ao solo, observa que a imagem completa de um prédio de altura **H**, situado a uma distância **D** da vertical do seu corpo, abrange toda a extensão **L** de um espelho-d'água existente defronte do prédio.

Sabendo que $h = 1,5$ m, $L = 3,2$ m e $D = 3,6$ m, calcule o valor de **H**.

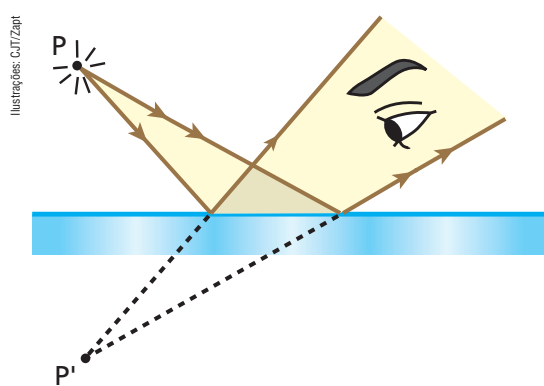
**10.** Uma tela opaca de grandes dimensões apresenta um pequeno furo onde está instalada uma lâmpada pontual de grande potência. Um espelho plano quadrado de lado igual a 40 cm é fixado paralelamente à tela, a 1,5 m de distância dela, conforme representa a figura. Desconsiderando a existência de outras fontes de luz no local do experimento, determine, em metros quadrados, a área iluminada na tela.

**11.** (Fuvest-SP) Um feixe de luz entra em uma caixa retangular de altura **L**, espelhada internamente, através de uma abertura **A**. O feixe, após sofrer 5 reflexões, sai da caixa por um orifício **B** depois de decorrido $1,0 \cdot 10^{-8}$ segundo.

Os ângulos formados pela direção do feixe e o segmento **AB** estão indicados na figura.

a) Calcule o comprimento do segmento AB. **Dado:** $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s

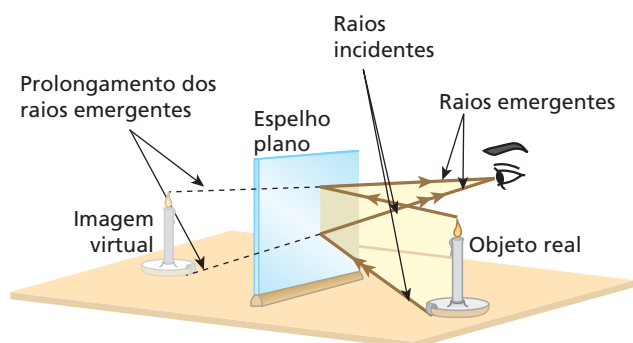
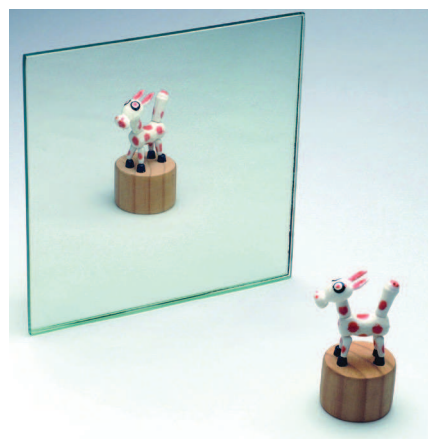
b) O que acontece com o número de reflexões e com o tempo entre a entrada e a saída do feixe se diminuirmos a altura da caixa **L** pela metade?

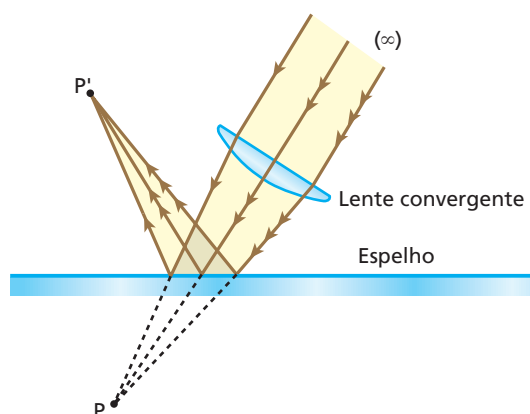
# Bloco 2

## 3. Construção gráfica de imagens nos espelhos planos

Consideremos o espelho plano abaixo e o ponto luminoso **P**. Pretendemos traçar a imagem de **P** conjugada pelo espelho. Para isso, utilizamos dois raios luminosos (pelo menos) que, partindo de **P**, incidem no espelho. Esses raios incidentes determinam raios refletidos, cujos prolongamentos se interceptam no ponto **P**'.

O ponto **P**', que é o vértice do pincel luminoso emergente do sistema, é a imagem do objeto **P**, conjugada pelo espelho.

Observe que, no caso, **P** é um objeto real, enquanto **P**' é uma imagem virtual (formada "atrás do espelho", isto é, obtida pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios refletidos).

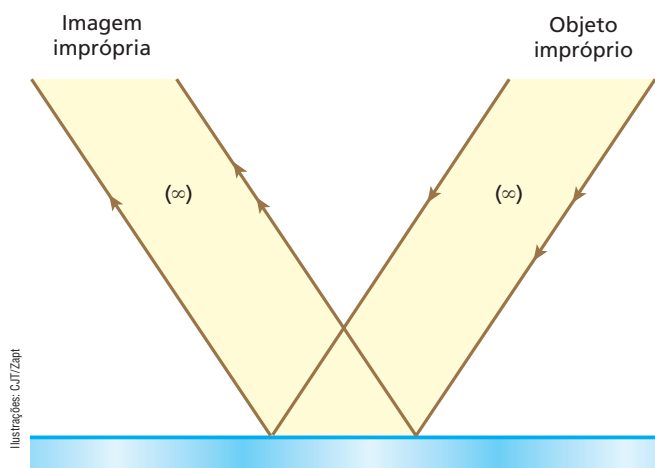
É importante destacar que, em relação ao olho do observador, **P**' se comporta como objeto real, como se a luz fosse proveniente desse ponto.

Nesta ilustração, você pode notar a imagem virtual da vela situada "atrás do espelho". Essa imagem não tem existência luminosa, mas funciona como objeto real em relação ao olho do observador.

Nesta fotografia, você vê um brinquedo de madeira e sua respectiva imagem fornecida por um espelho plano vertical.

Façamos, agora, o traçado da imagem conjugada ao ponto **P** pelo espelho plano indicado na figura abaixo.

Note que, nesse caso, em relação ao espelho, **P** é um objeto virtual (formado "atrás do espelho", ou seja, obtido pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios incidentes), enquanto **P**' é uma imagem real (vértice efetivo do pincel luminoso emergente do sistema).

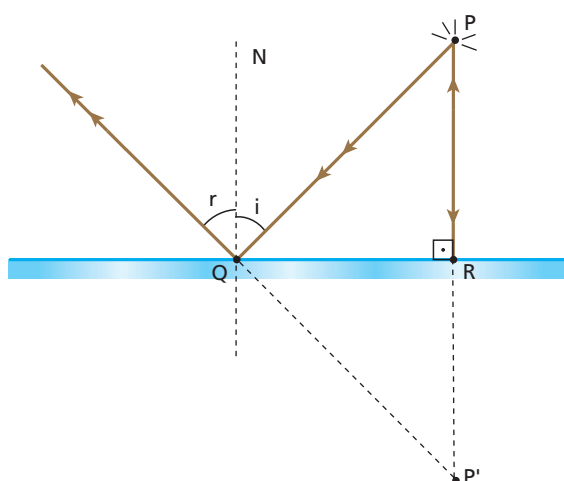
O que acaba de ser exposto, além de mostrar o processo de construção gráfica das imagens, permite uma conclusão importante:

> Nos espelhos planos, o objeto e a respectiva imagem têm sempre **naturezas opostas**, isto é, se o primeiro for real, o outro será virtual e vice-versa.

Em razão da reflexão regular da luz nos espelhos planos, a um objeto impróprio ("situado no infinito") corresponde uma imagem imprópria ("situada no infinito").

Pelo fato de conjugarem uma imagem imprópria a um objeto impróprio, os espelhos planos são sistemas ópticos **afocais**.

## 4. Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos: a simetria

Considere o espelho plano representado na figura a seguir, diante do qual se situa um objeto luminoso pontual **P**. Os raios luminosos **PR** e **PQ** incidem no espelho, respectivamente, normal e obliquamente. O raio **PR** se refletirá sobre si mesmo, enquanto **PQ** dará origem a um raio refletido oblíquo em relação ao espelho. A imagem de **P** é **P'**, obtida pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios refletidos.

A fim de apresentar a Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos, demonstremos a congruência dos triângulos PQR e P'QR.

- O lado QR é comum aos dois triângulos.
- $Q\hat{P}R \equiv \hat{i}$ (alternos internos) e $Q\hat{P}'R \equiv \hat{r}$ (correspondentes). Mas, como $r = i$ (2ª Lei da Reflexão), tem-se $Q\hat{P}'R \equiv Q\hat{P}R$.
- $Q\hat{R}P \equiv Q\hat{R}P'$ = ângulo reto (por construção).

Demonstrada a congruência dos dois triângulos, podemos afirmar que:

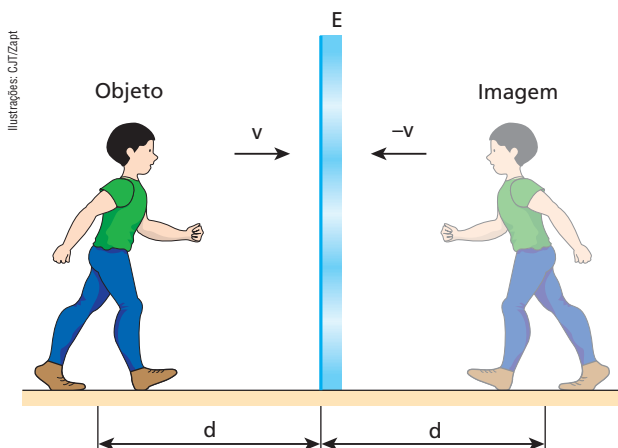
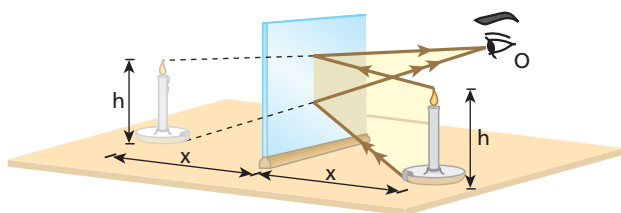
$$PR = P'R$$

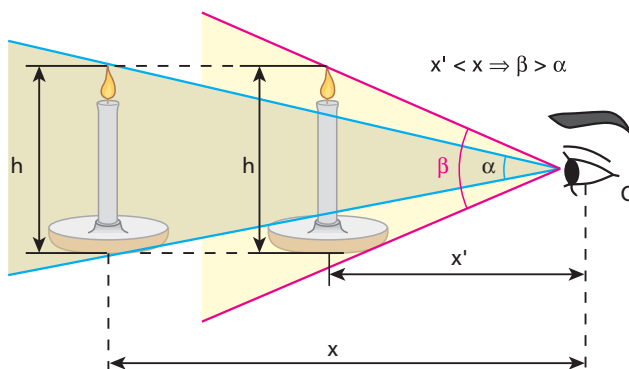
Isso significa que a distância do objeto ao espelho (**PR**) é igual à distância da imagem ao espelho (**P'R**). Tal verificação é conhecida por **Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos** e pode ser enunciada assim:

Nos espelhos planos, a imagem é sempre **simétrica** do objeto em relação ao espelho.

Estas fotografias ilustram satisfatoriamente a Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos: a **simetria**. Observe que a distância da imagem ao espelho é idêntica à distância do objeto ao espelho.

A superfície tranquila da água do lago comporta-se como um espelho plano, fazendo corresponder aos objetos reais da paisagem imagens virtuais e simétricas em relação a eles.

Na situação esquematizada a seguir, uma pessoa se aproxima de um espelho plano **E**, fixo, com velocidade de módulo **v**. Por causa da **simetria**, a imagem também se aproxima do espelho com velocidade de módulo **v**. Se, entretanto, adotarmos a pessoa como referencial, a imagem se aproximará dela com velocidade de módulo 2v.

Na situação representada na figura a seguir, um observador **O** contempla a imagem de uma vela de altura **h** por meio de um espelho plano vertical.

Em razão da **simetria** entre o objeto e a respectiva imagem, a altura da imagem também será **h**, mesmo que a vela seja aproximada ou afastada do espelho.

No caso de uma aproximação, por exemplo, o observador terá a **sensação** de que a altura da imagem aumenta, mas isso apenas decorre do aumento do ângulo visual de observação.

Quanto mais próxima do olho estiver a imagem, maior será o ângulo visual de observação, dando a impressão de aumento em sua altura.

## Ângulo visual

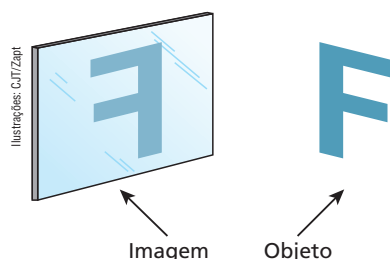
Nestas fotografias, uma câmera fotográfica simples, instalada sobre um tripé, "viu" (fotografou) de uma mesma posição um mesmo homem. Na fotografia **A**, o homem estava distante da câmera e, na fotografia **B**, ele estava mais próximo dela.

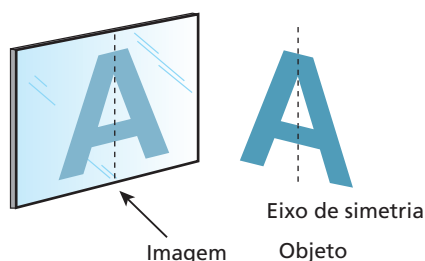
Veja como o homem aparenta uma altura maior em **B**. Isso se deve ao fato de, nessa fotografia, o ângulo visual de observação ser maior que em **A**. Note, no entanto, que a altura do homem é a mesma. Daí se conclui que, quanto maior for o ângulo visual, maior aparentará ser o objeto observado.

## 5. Imagem e objeto não superponíveis

É importante observar que, devido à simetria, a imagem de um objeto extenso fornecida por um espelho plano, embora idêntica a ele, não lhe é, em geral, superponível.

Considere, por exemplo, a ilustração abaixo, que representa um espelho plano diante do qual se coloca a letra **F**.

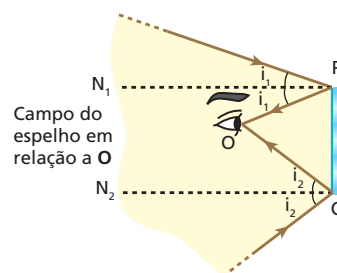
Nessas condições, a imagem fornecida pelo espelho é um **F** ao contrário não superponível ao objeto que lhe deu origem. Há uma aparente inversão lateral da letra. Diz-se que a imagem é **enantiomorfa**, isto é, tem forma contrária à do objeto.

Entretanto, a imagem fornecida por um espelho plano de um objeto monocromático que admite um eixo de simetria é superponível a ele.

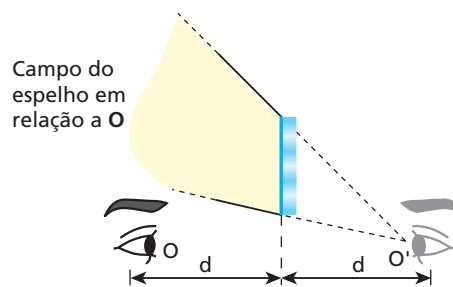
Se, por exemplo, tivermos uma letra **A** vertical e simétrica diante de um espelho plano vertical, o objeto produzirá uma imagem que lhe será superponível.

Fotografia mostrando como as palavras aparecem estampadas em uma ambulância.

Em viaturas utilizadas em emergências, como ambulâncias e carros de bombeiros, é comum pintar a palavra que as designa "ao contrário". O objetivo é proporcionar aos motoristas que estão à frente uma leitura adequada em seus espelhos retrovisores.

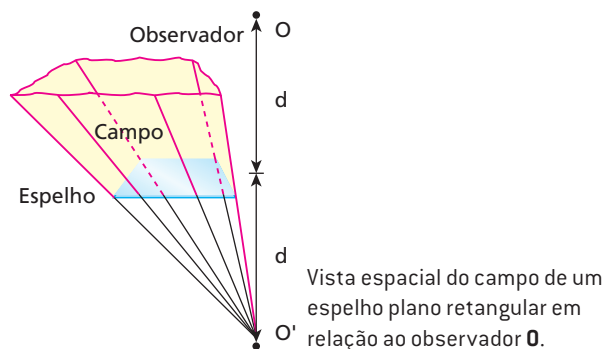
## 6. Campo de um espelho plano

Chama-se **campo de um espelho plano**, para determinado observador, a região do espaço que pode ser contemplada por ele pela reflexão da luz no espelho.

A demarcação do campo do espelho é feita da seguinte maneira: na figura a seguir, **O** é o olho do observador e PO e QO são raios refletidos na periferia do espelho, que atingem **O**.

A região destacada corresponde ao campo do espelho em relação a **O**.

A demarcação do campo pode ser feita de forma mais imediata. Dada a posição do observador **O**, determina-se a posição simétrica **O'** em relação à superfície refletora. A região do espaço visível por reflexão é determinada ligando-se o ponto **O'** ao contorno periférico do espelho.

Tudo se passa como se o observador **O** estivesse olhando a partir de **O'**.

Convém apontar que o campo de um espelho qualquer é uma região **tridimensional**.

Vista espacial do campo de um espelho plano retangular em relação ao observador **O**.

## Faça você mesmo

### Verificação experimental da 2ª Lei da Reflexão

Sugerimos a seguir um experimento bastante simples que você pode realizar na escola ou mesmo em casa para verificar a **2ª Lei da Reflexão**: o ângulo de reflexão é sempre igual ao ângulo de incidência.

**Material necessário:**

- Um espelho plano de base reta com moldura
- Um transferidor (medidor de ângulos) semicircular
- Dois lápis apontados (ou canetas) diferentes, de preferência um de cada cor

> **ATENÇÃO! Cuidado ao manusear o espelho.**

**Procedimentos:**

1. Coloque o espelho sobre o transferidor de modo que sua base coincida com a linha de base desse instrumento. Com isso, a linha indicativa de 90° do transferidor fica perpendicular à superfície do espelho (essa linha fará o papel de reta normal à superfície refletora).
2. Pegue um dos lápis (vermelho, por exemplo, que chamaremos de lápis **A**) e encoste sua ponta no espelho, no local em que a linha indicativa de 90° do transferidor encontra a superfície espelhada. O lápis **A** fará o papel de raio incidente.
3. Pegue o outro lápis (azul, por exemplo, que chamaremos de lápis **B**) e encoste também sua ponta no espelho, fazendo-a coincidir com a ponta do lápis **A**. O lápis **B** fará o papel de raio refletido.
4. Alinhe, agora, da maneira mais perfeita possível, o lápis **B** com a imagem do lápis **A**, conforme representa a figura.
5. Por fim, meça os ângulos formados entre os lápis **A** e **B** e a linha indicativa de 90° do transferidor. Observe que esses ângulos são **iguais**, o que comprova a **2ª Lei da Reflexão**.

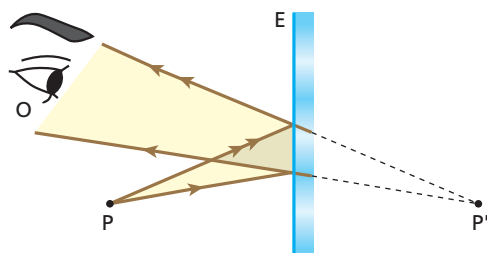
Modificando a inclinação do lápis **A** em relação à linha indicativa de 90° do transferidor, você perceberá a necessidade de ajustar também a posição do lápis **B** para que ele fique devidamente alinhado com a imagem do lápis **A**. Isso revela que o resultado do experimento é válido, independentemente do ângulo formado entre o lápis **A** e a linha indicativa de 90° do transferidor.

## Exercícios

nível 1

**12.** A imagem fornecida por um espelho plano será:

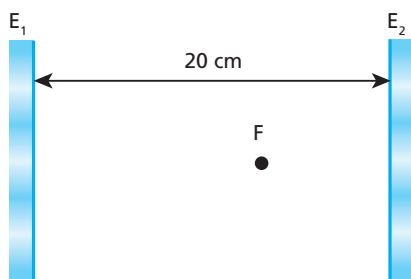
a) real, se o objeto for real.
b) virtual, se o objeto for virtual.
c) virtual, se o objeto for real, e real, se o objeto for virtual.
d) sempre virtual.
e) sempre real.

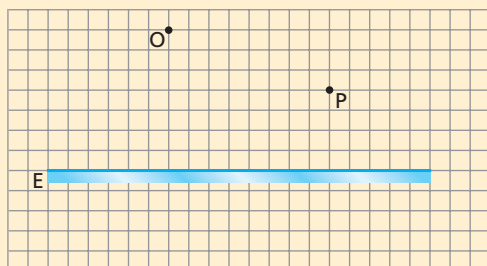
**13.** Considere o esquema seguinte, no qual **P** é um ponto luminoso, **E** é um espelho plano e **O** é o olho de um observador:

É correto afirmar que:

a) em relação a **E**, **P'** é imagem real.
b) em relação a **E**, **P'** é imagem imprópria.
c) em relação a **O**, **P'** é imagem real.
d) em relação a **O**, **P'** é imagem virtual.
e) em relação a **O**, **P'** se comporta como objeto real.

**14.** (Ufal) Um espelho plano está no piso horizontal de uma sala com o lado espelhado voltado para cima. O teto da sala está a 2,40 m de altura e uma lâmpada está a 80 cm do teto. Com esses dados, pode-se concluir que a distância entre a lâmpada e sua imagem formada pelo espelho plano é, em metros, igual a:

a) 1,20.
b) 1,60.
c) 2,40.
d) 3,20.
e) 4,80.

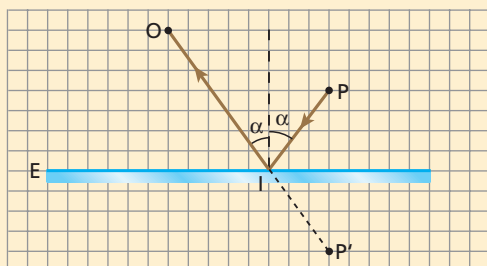
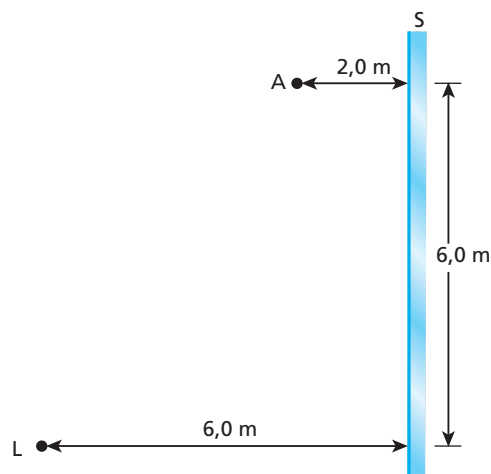
**15.** (UFF-RJ) Dois espelhos planos paralelos, $E_1$ e $E_2$, estão frente a frente separados pela distância de 20 cm. Entre eles há uma fonte luminosa **F**, de pequenas dimensões, na posição indicada na figura:

a) Calcule a distância entre a primeira imagem fornecida pelo espelho $E_1$ e a primeira imagem fornecida pelo espelho $E_2$.
b) A distância calculada no item **a** depende da posição de **F** em relação a $E_1$ e $E_2$?

**16. E.R.** No esquema da figura, **P** é um ponto luminoso, **E** é um espelho plano e **O** é o olho de um observador:

Trace o caminho óptico da luz, que, partindo de **P**, sofre reflexão em **E** e atinge **O**.

**Resolução:**

Traçado do raio refletido:

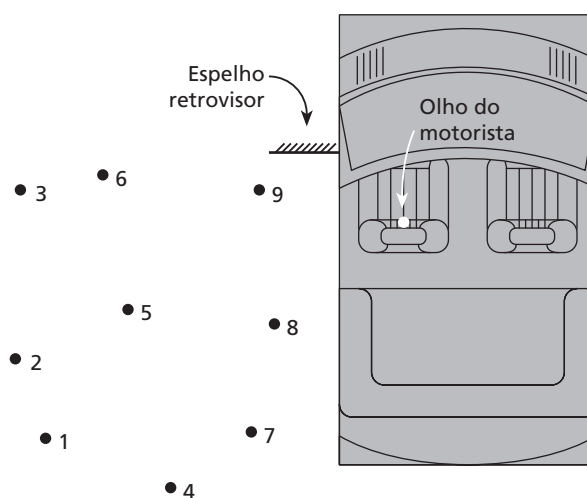
Determina-se, por simetria, a imagem **P'**, que o espelho conjuga a **P**. A partir de **P'**, traça-se a reta **P'O**. O cruzamento dessa reta com o espelho define o ponto de incidência **I**, e o raio refletido corresponde ao segmento **IO**.

O raio incidente correspondente ao segmento **PI**.

**17.** (Fuvest-SP) A figura representa um objeto **A**, colocado a uma distância de 2,0 m de um espelho plano **S**, e uma lâmpada **L**, colocada à distância de 6,0 m do espelho:

a) Copie a figura e desenhe o raio emitido por **L** e refletido por **S** que atinge **A**. Explique a construção.
b) Calcule a distância percorrida por esse raio.

**18.** (Vunesp-SP) Um estudante veste uma camiseta em cujo peito se lê a inscrição seguinte:

UNESP

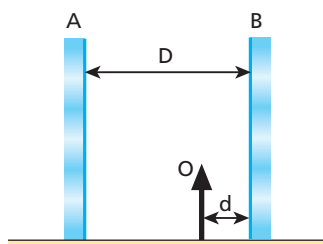
a) De que forma a imagem dessa inscrição aparece para o estudante quando ele se encontra frente a um espelho plano?
b) Suponha que a inscrição esteja a 70 cm do espelho e que cada letra da camiseta tenha 10 cm de altura. Qual a distância entre a inscrição e sua imagem? Qual a altura de cada letra da imagem?

**19.** (Unicamp-SP) A figura abaixo mostra um espelho retrovisor plano na lateral esquerda de um carro. O espelho está disposto verticalmente e a altura do seu centro coincide com a altura dos olhos do motorista. Os pontos da figura pertencem a um plano horizontal que passa pelo centro do espelho.
Nesse caso, os pontos que podem ser vistos pelo motorista são:

a) 1, 4, 5 e 9.
b) 4, 7, 8 e 9.
c) 1, 2, 5 e 9.
d) 2, 5, 3 e 6.

## Exercícios — nível 2

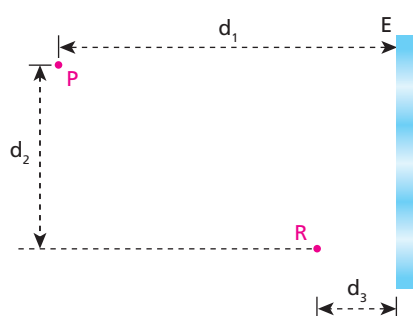
**20.** (UFPR) Um espelho plano fornece, de um dado objeto em relação ao espelho, uma imagem real, projetável sobre um anteparo. Pode-se, então, afirmar, sobre o objeto e sobre o feixe incidente que o define, respectivamente, que:

a) é real e divergente.
b) é virtual e convergente.
c) é virtual e divergente.
d) é real e convergente.
e) é real e paralelo.

**21.** (UFPI) Dois espelhos planos, paralelos, um defronte ao outro, estão separados por uma distância D = 2,0 m. O objeto **O** está situado entre eles, a uma distância d = 0,50 m de **B** (veja a figura ao lado).

A distância que separa as duas primeiras imagens formadas em **A** e a distância que separa as duas primeiras imagens formadas em **B** são, respectivamente:

a) 0,50 m e 1,5 m.
b) 1,5 m e 3,5 m.
c) 2,0 m e 4,0 m.
d) 1,0 m e 3,0 m.
e) 2,0 m e 2,0 m.

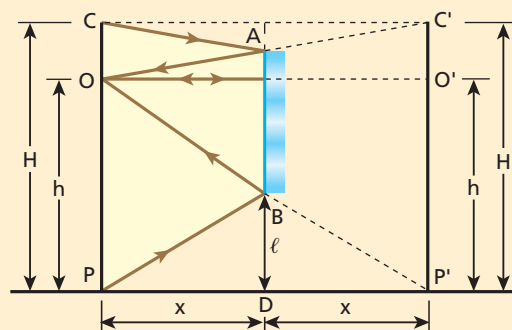
**22.** Fotografias obtidas diante de um ou mais espelhos planos são bastante comuns. Com essa técnica, que exige especiais cuidados do fotógrafo, belos e curiosos efeitos visuais podem ser registrados.

No esquema abaixo se vê, de cima, o jovem Paulo, um fotógrafo principiante, posicionado no local **P** diante da superfície refletora de um espelho plano vertical **E**. Paulo deseja fotografar a imagem fornecida por **E** do corpo de sua irmã, Regina, posicionada no local **R**. Os comprimentos $d_1$, $d_2$ e $d_3$, indicados na figura, são tais que $d_1$ = 4,0 m, $d_2$ = 3,6 m e $d_3$ = 0,8 m.

a) Para que distância Paulo deverá regular sua câmera para obter uma fotografia devidamente focalizada da imagem de Regina? Em relação a **E**, essa imagem é de natureza real ou virtual?
b) Supondo que Paulo queira obter uma fotografia de sua própria imagem utilizando um *flash* acoplado à câmera (o que não deve ser feito quando se dirige, como no caso de Paulo, o eixo do equipamento perpendicularmente ao espelho, sob pena de inserir na imagem um brilho comprometedor), qual o intervalo de tempo, em nanossegundos (1 ns = $10^{-9}$ s), gasto pela luz do *flash* para retornar à câmera após o disparo? Adote para a velocidade da luz o valor c = $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

**23. E.R.** Um observador de altura **H** deseja mirar-se de corpo inteiro, utilizando para tanto um espelho plano circular disposto verticalmente. Sendo **h** a altura de seus olhos em relação ao solo, plano e horizontal:

a) calcule o mínimo diâmetro **d** que o espelho deve ter para que o observador realize seu intento.
b) obtenha a distância **ℓ** do extremo inferior do espelho ao solo.
c) responda: as dimensões **d** e **ℓ** dependem ou não da distância **x** do observador em relação ao espelho?

### Resolução:

Nas condições do esquema seguinte, o observador CP consegue mirar-se de corpo inteiro, utilizando para isso o espelho plano com diâmetro mínimo:

Observe na figura:

**C** = extremo superior da cabeça do observador
**O** = olho do observador
**P** = extremo inferior do pé do observador
**C'**, **O'** e **P'** = imagens de **C**, **O** e **P**, respectivamente, fornecidas pelo espelho

**AB** = espelho (AB = d)

a) Os triângulos OAB e OC'P' são semelhantes. Por isso:

$$\frac{d}{H} = \frac{x}{2x} \Rightarrow \boxed{d = \frac{H}{2}}$$

O diâmetro mínimo do espelho deve corresponder à metade da altura do observador.

b) Os triângulos OPP' e BDP' são semelhantes. Por isso:

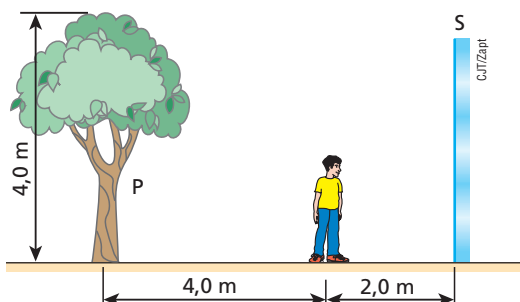
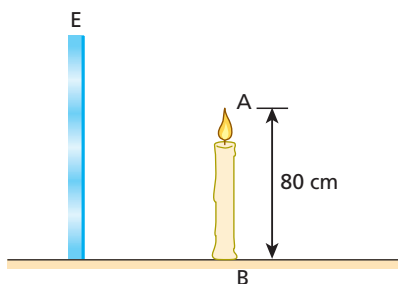
$$\frac{\ell}{h} = \frac{x}{2x} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{h}{2}}$$

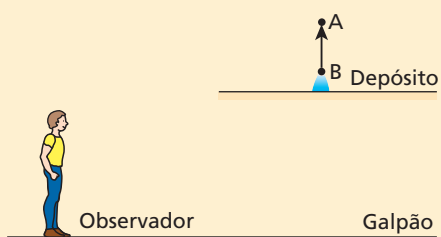
A distância do extremo inferior do espelho ao solo deve corresponder à metade da altura dos olhos do observador.

c) As dimensões **d** e **ℓ** independem de **x**, que foi cancelado nos cálculos.

**24.** Um homem com 1,80 m de altura deseja mirar-se dos pés à cabeça em um espelho plano quadrado, disposto verticalmente e com sua base paralela ao solo. Sendo a altura de seus olhos ao solo igual a 1,70 m, calcule:

a) a menor medida admissível para o lado do espelho, a fim de que o homem consiga seu objetivo.
b) a distância da borda inferior do espelho ao solo, no caso de o homem estar se vendo no espelho de corpo inteiro.

**25.** O esquema abaixo representa um homem de frente para um espelho plano **S**, vertical, e de costas para uma árvore **P**, de altura igual a 4,0 m. Qual deverá ser o comprimento mínimo do espelho para que o homem possa ver nele a imagem completa da árvore?

**26.** (FEI-SP) Um objeto vertical AB, de altura $\overline{AB} = 80$ cm, encontra-se diante de um espelho plano vertical **E**. Sabe-se que a imagem do ponto **B** se encontra a 30 cm do espelho. Um raio de luz, partindo do ponto **B**, encontra o espelho num ponto **C**, segundo um ângulo de incidência $\alpha$, e reflete-se passando pelo ponto **A**. Qual o valor de sen $\alpha$?

**27. E.R.** Numa fábrica, um galpão tem o teto parcialmente rebaixado, criando um compartimento superior que é utilizado como depósito.

Para ter acesso visual a esse compartimento, constrói-se um sistema óptico simples, com dois espelhos planos $E_1$ e $E_2$, de modo que um observador no andar de baixo possa ver as imagens dos objetos guardados no depósito (como o objeto AB, por exemplo).

São possíveis duas configurações. Na primeira, os espelhos são paralelos, ambos formando 45° com a horizontal, como mostra a figura 1:

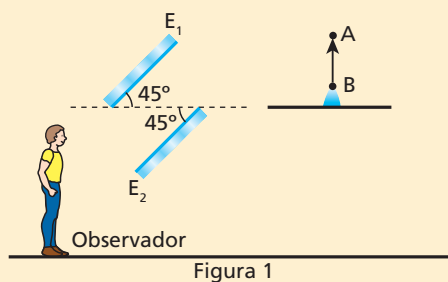



Figura 1

Na outra, os espelhos são perpendiculares entre si, ambos formando 45° com a horizontal, como mostra a figura 2:

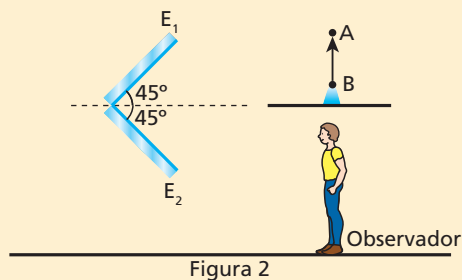



Figura 2

Posicione em cada configuração as imagens $A_1B_1$ e $A_2B_2$ fornecidas por $E_1$ e $E_2$, respectivamente, e responda: as imagens visadas pelo observador são **direitas** ou **invertidas** em relação ao objeto AB?

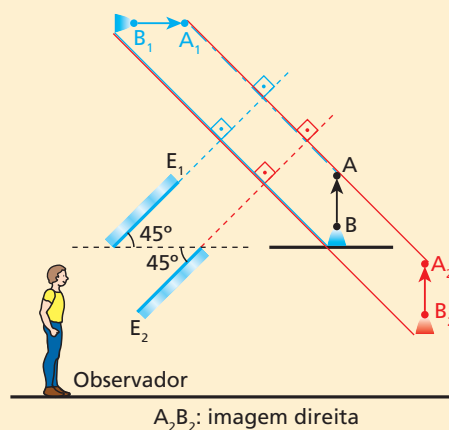
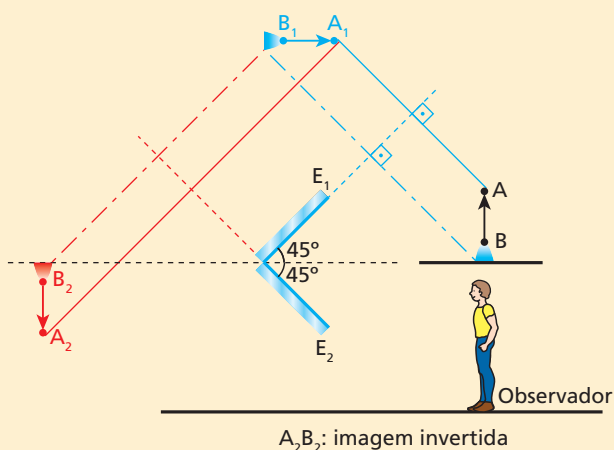
**Resolução:**

O posicionamento das imagens é feito observando-se a Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos: a imagem é **simétrica** do objeto em relação à superfície refletora.

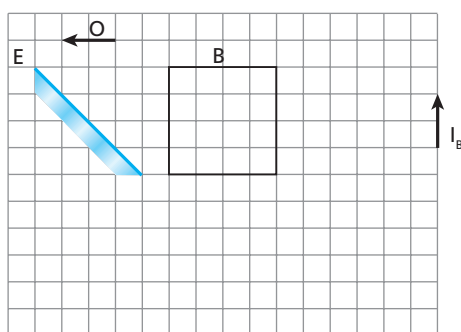
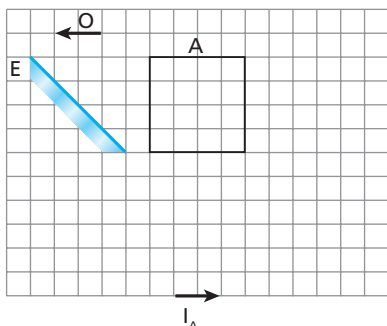
**Configuração 1:**

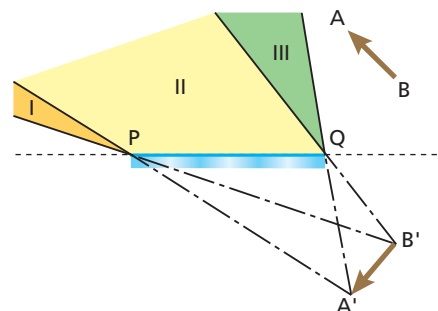
$A_2B_2$: imagem direita

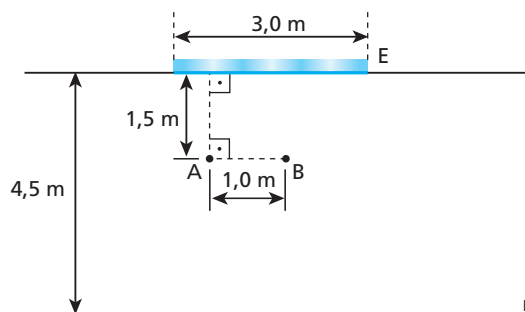
**Configuração 2:**

$A_2B_2$: imagem invertida

**Nota:**

- Em ambas as configurações, a imagem $A_1B_1$ fornecida pelo espelho $E_1$ para o objeto AB funciona como objeto para o espelho $E_2$.

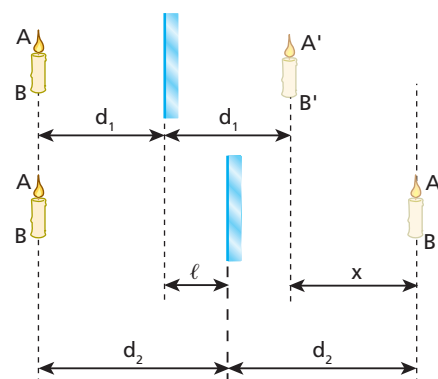
**28.** (Vunesp-SP) As figuras a seguir mostram a posição de um objeto **O** em relação a um espelho plano **E** e duas regiões delimitadas pelos quadrados **A** e **B**. Dentro de cada uma dessas regiões deve-se colocar um outro espelho plano, de modo que se obtenham as imagens $I_A$ e $I_B$ indicadas nas figuras.

a) Copie o quadrado **A** numa folha. Em seguida, posicione no interior do quadrado um espelho plano capaz de criar a imagem $I_A$ indicada na primeira figura.
b) Copie o quadrado **B** numa folha. Em seguida, posicione no interior do quadrado um espelho plano capaz de criar a imagem $I_B$ indicada na segunda figura.

**29.** No esquema seguinte, **PQ** é um espelho plano, **AB** é um objeto linear e **A'B'** é a imagem de **AB** conjugada pelo espelho:

Para que um observador de dimensões desprezíveis veja a imagem A'B' inteira, deve colocar-se:
a) nas regiões I, II ou III, indiferentemente.
b) nas regiões I ou II, indiferentemente.
c) exclusivamente na região I.
d) exclusivamente na região II.
e) exclusivamente na região III.

**30.** Juliana está parada no ponto **A**, indicado na figura a seguir, contemplando sua imagem num espelho plano vertical **E**, de largura 3,0 m. Rodrigo, um colega de classe, vem caminhando ao longo da reta **r**, paralela à superfície refletora do espelho, com velocidade de intensidade 2,0 m/s.

Desprezando-se as dimensões de Juliana e de Rodrigo, responda:
a) Por quanto tempo Juliana poderá observar a imagem de Rodrigo em **E**?
b) Se Juliana estivesse na posição **B**, qual seria o tempo de observação da imagem de Rodrigo?

# Bloco 3

## 7. Translação de um espelho plano

No esquema ao lado, tem-se um objeto **AB** situado diante de um espelho plano. Nesse caso, o espelho conjuga a **AB** a imagem **A'B'** indicada. O espelho é então transladado, afastando-se de **AB** paralelamente a si mesmo. Agora, em sua nova posição, o espelho conjuga ao objeto **AB** a nova imagem **A"B"**.

Sejam $\ell$ o comprimento correspondente à translação do espelho e **x** o comprimento correspondente à translação da imagem de **AB**. Relacionando **x** e $\ell$ por meio dos outros comprimentos referidos na figura, temos:

$$x = 2d_2 - 2d_1 \Rightarrow x = 2(d_2 - d_1) \quad \text{(I)}$$

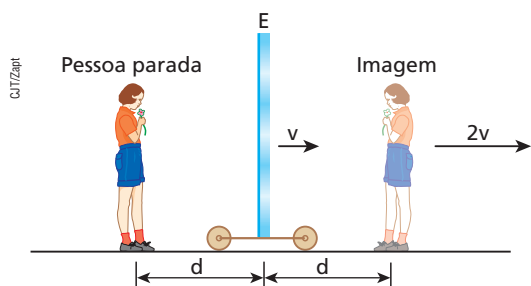
$$\ell = d_2 - d_1 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), tem-se:

$$x = 2\ell$$

Concluímos, portanto, o seguinte:

Quando um espelho plano é transladado paralelamente a si mesmo, a imagem de um objeto fixo sofre translação no mesmo sentido, com o dobro do comprimento em relação à do espelho.

Na situação esquematizada a seguir, um espelho plano **E** afasta-se, com velocidade **v**, de um objeto fixo (a pessoa parada na ilustração). O espelho está a uma distância **d** da pessoa e a imagem a uma distância 2d dela. Considerando um determinado intervalo de tempo, podemos afirmar que: se a velocidade do espelho em relação à pessoa é **v**, então a velocidade da imagem é 2v. Se, entretanto, adotarmos o espelho como referencial, a velocidade da imagem em relação a ele será **v**.

## 8. Rotação de um espelho plano

Veja a figura a seguir, em que um raio luminoso **A** incide no ponto $I_1$ de um espelho plano, situado inicialmente na posição $E_1$. O raio **A** determina, nessa situação, o raio refletido **A'**.

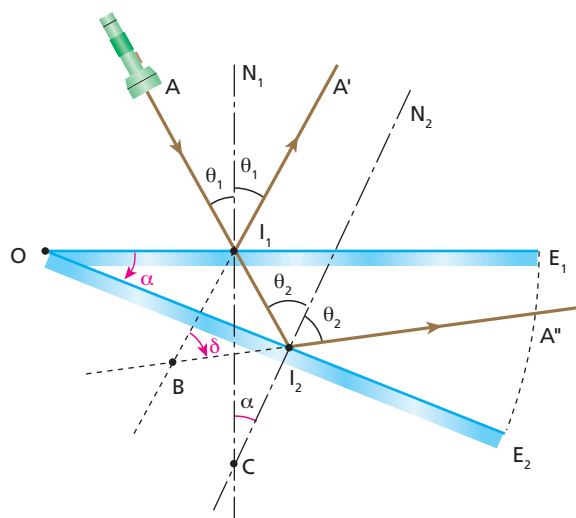
Admita, agora, que o espelho seja girado em torno do eixo **O**, sofrendo uma rotação equivalente ao ângulo $\alpha$ e passando à nova posição $E_2$. Nesse caso, o raio **A** incide no espelho no ponto $I_2$, determinando o novo raio refletido **A"**.

Sendo $\delta$ o ângulo formado pelas direções dos raios refletidos **A'** e **A"**, relacionemos $\delta$ com $\alpha$.

No triângulo $I_1I_2B$, temos $B\hat{I}_1I_2 = 2\theta_1$. Aplicando o Teorema do Ângulo Externo, temos:

$$\delta + 2\theta_1 = 2\theta_2 \Rightarrow \delta = 2(\theta_2 - \theta_1) \quad \text{(I)}$$

No triângulo $I_1I_2C$, temos $C\hat{I}_1I_2 = \theta_1$. Aplicando também o Teorema do Ângulo Externo, temos:

$$\alpha + \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \alpha = \theta_2 - \theta_1 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

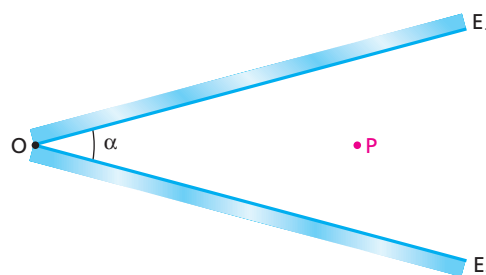
$$\delta = 2\alpha$$

Concluímos, então, que:

Quando um espelho plano sofre uma rotação de um ângulo $\alpha$ em torno de um eixo normal ao plano de incidência de um raio de luz proveniente de uma fonte fixa, o raio refletido correspondente sofre uma rotação, no mesmo sentido, de um ângulo que equivale ao dobro de $\alpha$.

## 9. Imagens múltiplas em dois espelhos planos associados

A figura a seguir representa dois espelhos planos, $E_1$ e $E_2$, que formam entre suas superfícies refletoras um ângulo diedro $\alpha$. O ponto **P** representa um objeto pontual colocado diante dos espelhos.

A luz emanada de **P** sofrerá múltiplas reflexões, até emergir do sistema. Por causa disso, a associação de espelhos conjugará a **P** várias imagens, que se apresentarão distribuídas ao longo de uma circunferência de centro em **O** e raio **OP**.

O número **n** de imagens fornecidas pela associação fica determinado pela expressão empírica:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1$$

em que **α**, ângulo formado pelos espelhos, deve ser divisor de 360°.

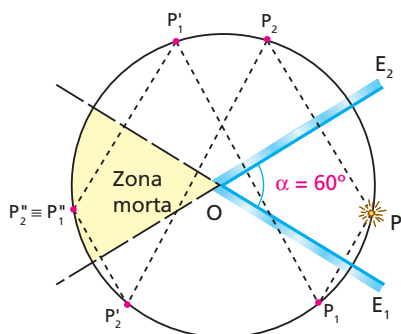
**Notas:**

- Se o quociente de $\frac{360°}{\alpha}$ for par, a expressão será aplicável qualquer que seja a posição de **P** entre os espelhos.
- Se o quociente de $\frac{360°}{\alpha}$ for ímpar, a expressão só será aplicável se **P** estiver no plano bissetor do diedro formado pelos espelhos.

Para exemplificar melhor, vamos analisar o caso em que se tem um objeto **P** situado entre as superfícies refletoras de dois espelhos planos que formam entre si um ângulo diedro $\alpha = 60°$. O número **n** de imagens que poderão ser observadas é:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1 \Rightarrow n = \frac{360°}{60°} - 1$$

$$n = 5 \text{ imagens}$$

No esquema abaixo, fazemos uma representação esquemática correspondente à situação em estudo.

Na figura:

$P_1$ = imagem formada por $E_1$, por simples reflexão. Essa imagem é enantiomorfa em relação a **P**.

$P'_1$ = imagem formada por $E_2$, por dupla reflexão. Essa imagem é igual a **P**.

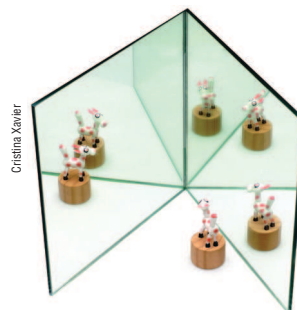
$P''_1$ = imagem formada por $E_1$, por tripla reflexão. Essa imagem é enantiomorfa em relação a **P**.

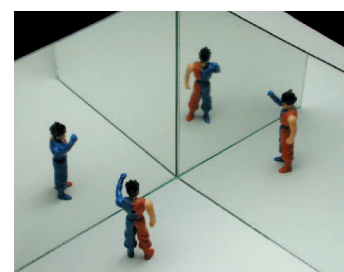
$P_2$ = imagem formada por $E_2$, por simples reflexão. Essa imagem é enantiomorfa em relação a **P**.

$P'_2$ = imagem formada por $E_1$, por dupla reflexão. Essa imagem é igual a **P**.

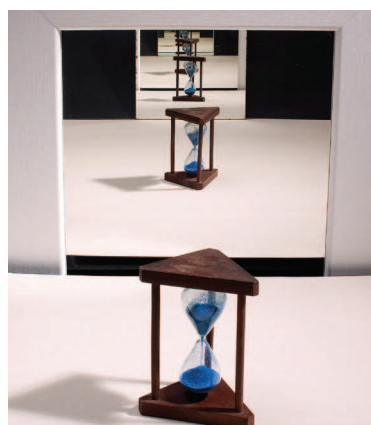
$P''_2$ = imagem formada por $E_2$, por tripla reflexão. Essa imagem é enantiomorfa em relação a **P**.

**Notas:**

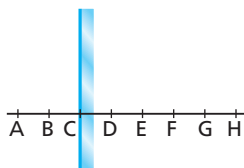
- As imagens formadas por um número ímpar de reflexões são sempre enantiomorfas em relação ao objeto dado.
- As imagens $P''_1$ e $P''_2$, superpostas, constituem, na realidade, uma só imagem.
- O ponto $P''_1 \equiv P''_2$, pelo fato de estar situado na zona morta da associação, isto é, atrás tanto de $E_1$ como de $E_2$, não produz imagens subsequentes.

Nesta fotografia, o ângulo formado entre os espelhos é de 60°. Observe o brinquedo de madeira posicionado diante das duas superfícies refletoras e as cinco imagens produzidas pela associação.

Na fotografia ao lado, os espelhos planos formam 90° entre suas superfícies refletoras. A associação conjuga três imagens ao boneco, sendo duas enantiomorfas (formadas por simples reflexão da luz) e a outra igual ao objeto (obtida por dupla reflexão da luz).

Fotografia mostrando os espelhos perpendiculares e as três imagens de boneco.

Se os espelhos planos forem dispostos paralelamente entre si, um objeto colocado entre suas superfícies refletoras produzirá "infinitas" imagens.

Essas "infinitas" imagens, entretanto, não serão totalmente observáveis em razão da gradual diminuição sofrida pelo ângulo visual de observação à medida que o número de reflexões da luz no sistema vai aumentando. Além disso, as múltiplas reflexões impõem uma sucessiva dissipação da energia luminosa, que vai sendo absorvida pelos espelhos e pelo meio existente entre eles.

Imagens fornecidas por dois espelhos planos paralelos de uma ampulheta colocada entre eles.

## Exercícios — nível 1

**31.** (UEL-PR) A figura representa um espelho plano vertical e um eixo horizontal onde estão os pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**, equidistantes entre si. Se o espelho plano sofrer uma translação, passando do ponto **C** ao ponto **D**, a imagem de **A** vai passar do ponto:

a) **D** para o ponto **E**.
b) **E** para o ponto **G**.
c) **E** para o ponto **F**.
d) **E** para o ponto **H**.
e) **F** para o ponto **G**.

**32. E.R.** Dois espelhos planos são associados de modo que suas superfícies refletoras formem um ângulo diedro de 45°. Um objeto luminoso é colocado diante da associação. Determine:
a) o número de imagens que os espelhos conjugam ao objeto.
b) o número de imagens enantiomorfas e o número de imagens iguais ao objeto.

**Resolução:**

a) O número de imagens que a associação conjuga ao objeto é calculado pela fórmula:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1$$

Sendo $\alpha = 45°$, determinemos **n**:

$$n = \frac{360°}{45°} - 1 \Rightarrow \boxed{n = 7 \text{ imagens}}$$

b) 1ª e 2ª imagens: simples reflexão ⇒ enantiomorfas
3ª e 4ª imagens: dupla reflexão ⇒ iguais ao objeto
5ª e 6ª imagens: tripla reflexão ⇒ enantiomorfas
7ª imagem: quádrupla reflexão ⇒ igual ao objeto

Portanto, temos:

| 4 imagens enantiomorfas |
|---|
| 3 imagens iguais ao objeto |

**33.** Diante de dois espelhos planos que formam entre suas superfícies refletoras um ângulo de 90°, um rapaz coloca um relógio, cujo painel é dotado de traços no lugar dos números. Sabendo que o experimento é realizado às 4 h 10 min, determine:
a) o número de imagens que os espelhos conjugam ao relógio.
b) quantas imagens têm o aspecto da figura I e quantas têm o aspecto da figura II.

Figura I

Figura II

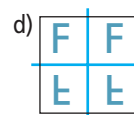
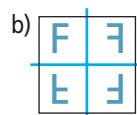
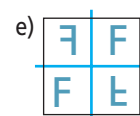
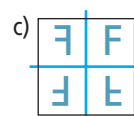
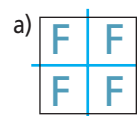
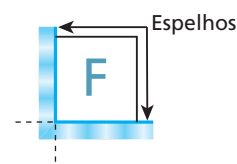
**34.** (Fuvest-SP) Na figura, **F** indica um ladrilho colocado perpendicularmente a dois espelhos planos que formam um ângulo reto:
Indique a alternativa que corresponde às três imagens formadas pelos espelhos.

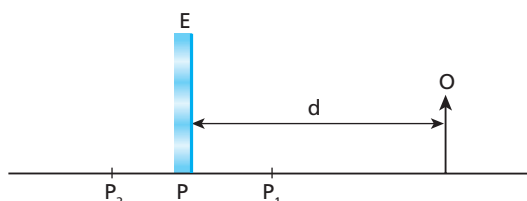
a) 

b)

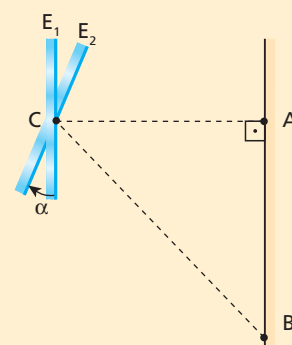
c) 

d)

e) 

## Exercícios — nível 2

**35.** (UFC-CE) A figura abaixo mostra um objeto **O** diante do espelho plano **E**, em posição vertical. Originalmente, o espelho está na posição **P**, a uma distância **d** do objeto. Deslocando-se o espelho para a posição $P_1$, a distância da imagem de **O** até o espelho é de 7 cm. Se o espelho é deslocado para a posição $P_2$, a distância da imagem de **O** até o espelho passa a ser de 11 cm. $P_1$ e $P_2$ estão a igual distância de **P**. A distância original, **d**, entre o espelho e o objeto vale:

a) 4 cm. b) 9 cm. c) 14 cm. d) 18 cm. e) 22 cm.

**36.** Um caminhão trafega em uma estrada retilínea com velocidade de 40 km/h. Olhando no espelho retrovisor plano, o motorista contempla a imagem de um poste vertical fixo na estrada.
a) Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao solo?
b) Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao motorista do caminhão?

**37. E.R.** A figura a seguir representa um espelho plano que pode girar em torno de um eixo contendo seu centro **C**.
Estando na posição $E_1$, o espelho capta a luz proveniente de uma fonte pontual **A**, fixa no anteparo, refletindo-a de volta ao ponto de partida. O espelho sofre, então, uma rotação equivalente a um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$, passando para a posição $E_2$. Nesse caso, ao receber a luz emitida por **A**, reflete-a para o ponto **B**.
Sabendo que $AB = \sqrt{3}\ AC$, calcule o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$.

**Resolução:**

A figura a seguir representa os raios refletidos $r_1$ e $r_2$, que correspondem, respectivamente, às posições $E_1$ e $E_2$ do espelho:

No triângulo ABC, temos:

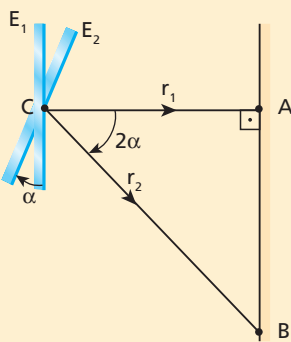
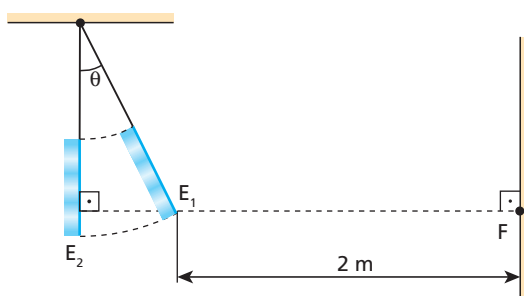
$$\text{tg } 2\alpha = \frac{AB}{AC}$$

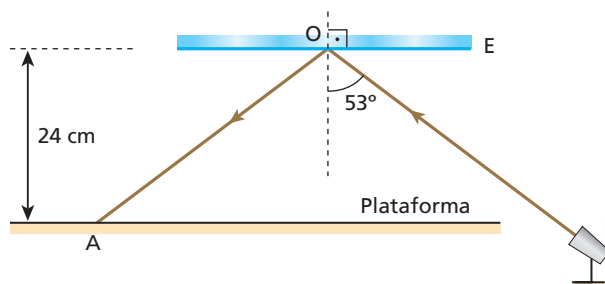
Mas, sendo $AB = \sqrt{3}\ AC$, vem:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\sqrt{3}\ AC}{AC}$$

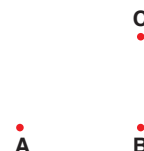
$$\text{tg } 2\alpha = \sqrt{3}$$

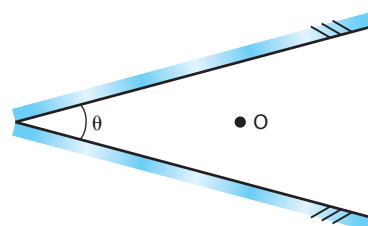
Portanto:

$$2\alpha = 60° \Rightarrow \boxed{\alpha = 30°}$$

**38.** O esquema a seguir representa um pêndulo. Na extremidade do fio, está preso um espelho plano. Incrustada no anteparo há uma lâmpada pontual **F** que emite um pincel luminoso cilíndrico na direção horizontal para a esquerda. O pêndulo é posto a oscilar, fazendo com que o espelho passe pelas posições $E_1$ e $E_2$ e varra, de uma para a outra, um ângulo $\theta = 30°$ no plano da figura:

Calcule a extensão do anteparo percorrida pelo pincel luminoso proveniente de **F** e refletido pelo espelho, quando o espelho vai de $E_1$ para $E_2$.

**39.** Na situação esquematizada a seguir, **F** é uma pequena lanterna fixa que emite um estreito feixe cilíndrico de luz e **E** é um espelho plano que pode girar em torno de um eixo **O** perpendicular ao plano desta página.
Inicialmente, a luz proveniente de **F** incide em **E** sob um ângulo de 53°, como indica a figura, produzindo um feixe refletido que ilumina o ponto **A** de uma plataforma também fixa.

O espelho sofre, então, uma rotação de 8° no sentido anti-horário, fazendo com que o feixe refletido atinja um outro ponto **B** da mesma plataforma.
Sabendo-se que sen 53° = cos 37° = 0,80 e cos 53° = sen 37° = = 0,60, pode-se afirmar que a distância entre os pontos **A** e **B** vale:

a) 32 cm; c) 18 cm; e) 12 cm.
b) 24 cm; d) 14 cm;

**40.** (Fuvest-SP) Tem-se um objeto **O** em frente a dois espelhos planos perpendiculares entre si. Os pontos **A**, **B** e **C** correspondem às imagens formadas do referido objeto. A distância AB é igual a 80 cm e a distância BC, igual a 60 cm.

a) Qual a distância entre o objeto e a imagem **B**?
b) Desenhe em uma folha de papel o esquema com os espelhos, o objeto e as imagens.

**41.** (PUC-SP) Um aluno colocou um objeto **O** entre as superfícies refletoras de dois espelhos planos associados e que formavam entre si um ângulo **θ**, obtendo **n** imagens.
Quando reduziu o ângulo entre os espelhos para $\frac{\theta}{4}$ passou a obter **m** imagens.

A relação entre **m** e **n** é:

a) m = 4n + 3 c) m = 4n (n+ 1) c) m = 4n
b) m = 4n – 3 d) m = 4 (n – 1)

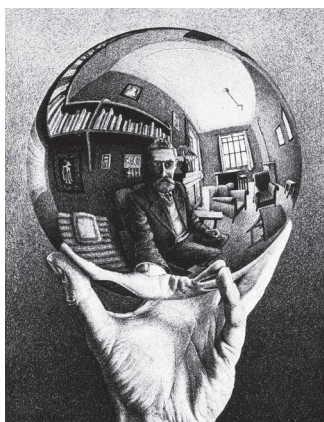
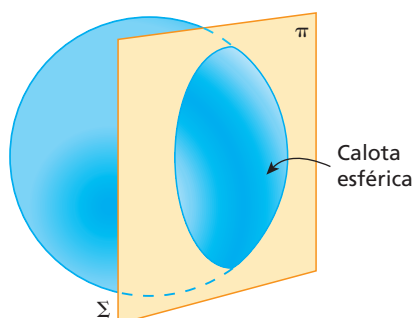
# Bloco 4

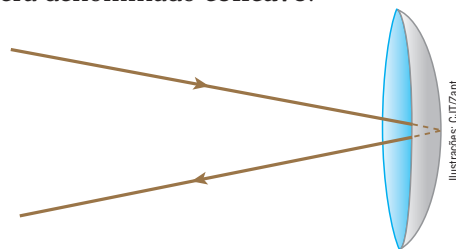
## 10. Classificação e elementos geométricos dos espelhos esféricos

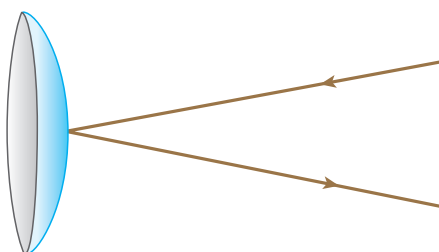
Você já deve ter notado que, além dos sempre comuns espelhos planos, há também espelhos com outros formatos, como os esféricos. Estes estão presentes em situações em que se almeja produzir imagens aumentadas (espelhos côncavos) ou campos visuais maiores, necessários em determinados ambientes (espelhos convexos).

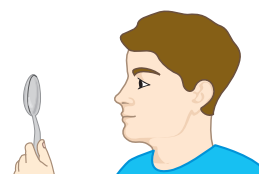
O desenhista e pintor holandês Mauritz Cornelis **Escher** (1898-1972) tem um trabalho fundamentado em xilografias, litografias e meios-tons

que instiga a imaginação do observador. São figuras impressionantes, algumas verdadeiras distorções da realidade. Em sua obra reproduzida ao lado, o artista se autorretrata em seu escritório refletido em uma esfera espelhada — um espelho convexo — que permite uma visualização mais ampla do ambiente.

Autorretrato de M. C. Escher segurando uma esfera refletora. Litografia de janeiro de 1935.

Considere a superfície esférica $\Sigma$ da figura a seguir, secionada por um plano $\pi$. O secionamento corta $\Sigma$ e determina uma "casca" esférica denominada **calota**.

Chama-se **espelho esférico** qualquer calota esférica polida e com alto poder refletor.

Se a superfície refletora da calota estiver voltada para dentro da esfera, o espelho esférico correspondente será denominado **côncavo**.

Representação de um espelho esférico côncavo.

Se a superfície refletora da calota estiver voltada para fora da esfera, o espelho esférico correspondente será denominado **convexo**.

Representação de um espelho esférico convexo.

Uma colher de aço inoxidável tem comportamento semelhante ao dos espelhos esféricos. A face sobre a qual são colocados os alimentos é um **espelho côncavo**, enquanto a face oposta é um **espelho convexo**. É importante observar, entretanto, que essas colheres em geral não são superfícies esféricas.

## Espelhos esféricos: muitas aplicações práticas

Os espelhos esféricos côncavos são utilizados como espelhos de aumento nos estojos de maquiagem, como refletores atrás das lâmpadas de sistemas de iluminação e projeção — lanternas, faróis, holofotes e projetores em geral — e como objetivas de telescópios, entre diversas outras aplicações.



Nas fotografias acima, espelhos côncavos estão sendo utilizados como espelhos de aumento.

Ricardo Helou Doca

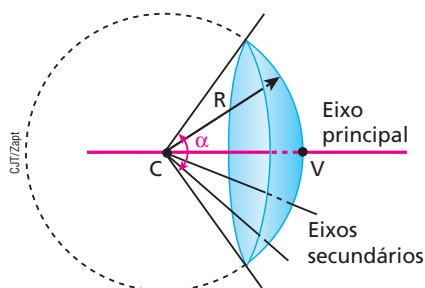
Por trás da lâmpada desta lanterna há um espelho côncavo (não esférico) que reflete a luz, proporcionando um feixe luminoso de pequena abertura angular.

Bo Zaunders/CORBIS/Latinstock

Jonny Gitti

Nestas fotografias, espelhos convexos estão sendo utilizados para retrovisão.

Os espelhos esféricos convexos são utilizados como espelhos retrovisores de veículos — como motos e alguns carros de passeio — e em pontos estratégicos de garagens, cruzamentos de ruas estreitas, portas de elevadores e ônibus. A vantagem dos espelhos convexos sobre os espelhos planos, nesses casos, é proporcionar, em idênticas condições, um campo visual maior. Deve-se notar, no entanto, que as imagens produzidas pelos espelhos convexos para objetos reais são menores que os respectivos objetos.

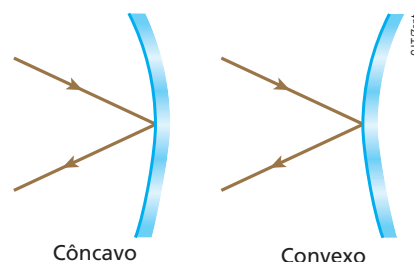
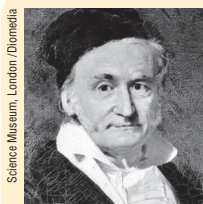
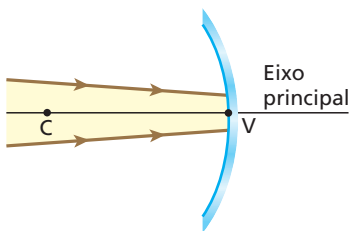
Veja a seguir o esquema de um espelho esférico com seus principais elementos geométricos:

- O centro **C** da esfera que originou a calota é chamado de **centro de curvatura** do espelho.
- O polo **V** da calota é chamado de **vértice** do espelho.
- A reta que passa por **C** e **V** é chamada de **eixo principal** do espelho.
- Todas as demais retas que contêm o centro **C** são chamadas de **eixos secundários**.
- O ângulo **α**, que tem o vértice no centro **C** e os lados passando por pontos diametralmente opostos da calota, é chamado de **abertura** do espelho.
- O raio **R** da esfera que originou a calota é denominado **raio de curvatura** do espelho.
- Qualquer plano perpendicular ao eixo principal é denominado **plano frontal**.

## 11. Espelhos esféricos gaussianos

Em geral, os espelhos esféricos não são sistemas ópticos estigmáticos, nem aplanéticos, nem ortoscópicos, como ocorre nos espelhos planos, uma vez que as imagens fornecidas por eles são sensivelmente distorcidas em comparação com os objetos correspondentes. As distorções provocadas por esses espelhos são denominadas **aberrações de esfericidade**.

Entretanto, o físico e matemático alemão Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) observou que, operando-se com raios luminosos pouco inclinados e pouco afastados em relação ao eixo principal (raios **paraxiais**), as aberrações de esfericidade inerentes aos espelhos esféricos ficavam sensivelmente minimizadas.

Neste livro, salvo recomendação em contrário, abordaremos os espelhos esféricos gaussianos, isto é, aqueles em que os raios luminosos envolvidos são pouco inclinados e pouco afastados em relação ao eixo principal. Por raios luminosos "pouco afastados" em relação ao eixo principal entendemos aqueles cuja distância do ponto de incidência ao referido eixo é pequena em comparação com o raio de curvatura do espelho.

A representação esquemática dos espelhos esféricos gaussianos é a seguinte:

Em relação ao pincel luminoso incidente representado na figura ao lado, o espelho esférico côncavo pode ser considerado gaussiano. Note que, nessas condições, o ângulo de abertura da região do espelho sobre a qual a luz incide não deve exceder 10°.

**Carl Friedrich Gauss** (1777-1855). Alemão, filho de família humilde, notabilizou-se logo na juventude por seus estudos em Matemática e Astronomia. Publicou em 1807 — época em que era diretor do Observatório de Gottingen — uma série de trabalhos sobre Óptica, em especial envolvendo sistemas de várias lentes. Destacou-se também pelas contribuições em Eletricidade e Magnetismo, tendo estabelecido um sistema de unidades magnéticas fundamentado nas noções de comprimento, massa e tempo.

## 12. Focos dos espelhos esféricos

De maneira geral:

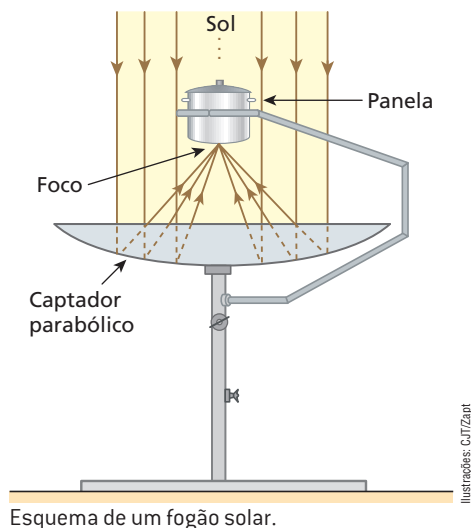
O **foco** de um sistema óptico qualquer é um ponto que tem por conjugado um ponto impróprio ("situado no infinito").

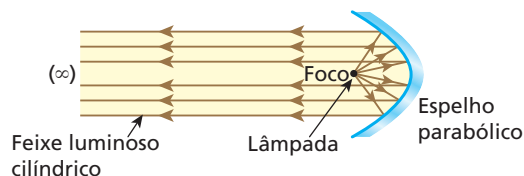
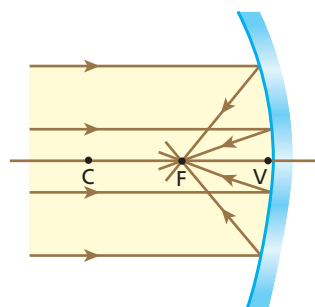
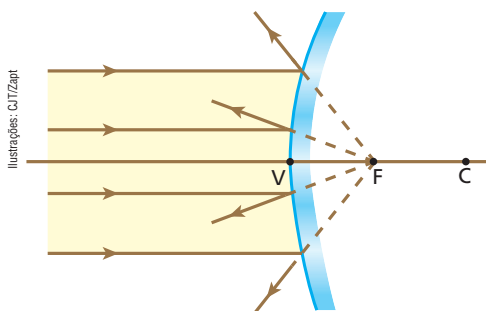
**Exemplo 1:**

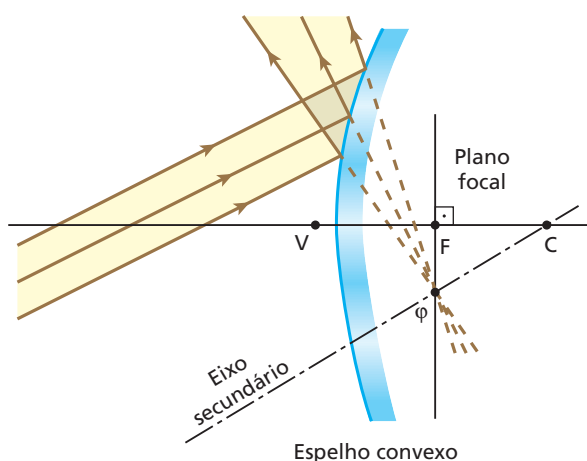
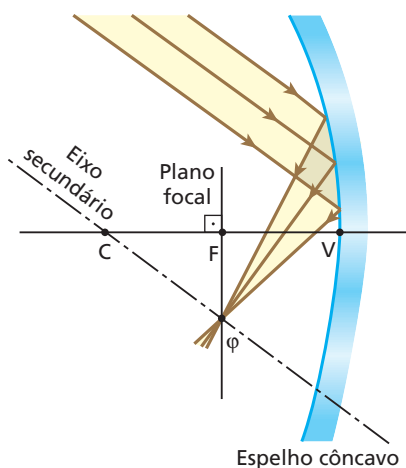
Radiotelescópios são equipamentos que rastreiam o espaço em busca de sinais — ondas eletromagnéticas compatíveis com as radiofrequências — provenientes dos mais remotos pontos do Universo. O elemento receptor desses dispositivos é uma superfície parabólica, cuja parte côncava tem alto poder de reflexão. Ondas planas incidem sobre o sistema, originando ondas esféricas refletidas que convergem para o foco do paraboloide, onde está instalado o elemento detector das informações.

Fotografia mostrando radiotelescópios.

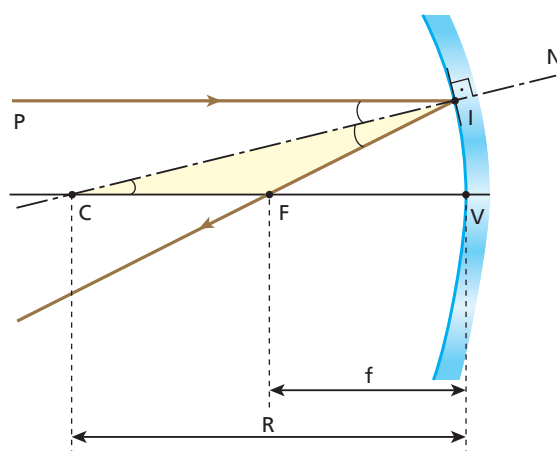
O fogão solar, projetado para ser utilizado no campo, funciona de maneira similar aos radiotelescópios. Raios solares paralelos incidem sobre um captador parabólico e, depois de refletidos, convergem para o foco do sistema, onde é colocada a panela contendo os alimentos.

Esquema de um fogão solar.

**Exemplo 2:**

Nos colimadores, holofotes e refletores que emitem feixes luminosos cilíndricos (constituídos de raios paralelos), uma pequena lâmpada é instalada sobre o foco de um espelho parabólico côncavo que conjuga à fonte de luz uma imagem imprópria.

Considere os espelhos esféricos gaussianos a seguir, nos quais incidem raios luminosos paralelos entre si e ao eixo principal. A experiência mostra que as direções dos raios refletidos passam, necessariamente, por um mesmo ponto do eixo principal, denominado **foco principal** (**F**):

Representação esquemática de espelho côncavo.

Representação esquemática de espelho convexo.

Suponhamos, agora, o caso em que incidem nos espelhos raios luminosos paralelos entre si e a um dos eixos secundários. Pode-se verificar, também nessa situação, que as direções dos raios refletidos passam por um mesmo ponto, mas do eixo secundário considerado. Esse ponto é denominado **foco secundário** (**φ**):

Prova-se, ainda, que o foco principal e os infinitos focos secundários de um espelho esférico gaussiano se alojam em um mesmo plano frontal, denominado **plano focal**.

É importantíssimo perceber que os focos de um espelho côncavo são **reais**, enquanto os de um espelho convexo são **virtuais**. A explicação para esse fato é simples: nos espelhos côncavos, os focos são determinados efetivamente pelos raios de luz (os focos apresentam-se "na frente" do espelho), enquanto nos espelhos convexos os focos são determinados pelos prolongamentos dos raios (os focos apresentam-se "atrás" do espelho).

Observe agora o espelho esférico côncavo representado a seguir, no qual incide um raio luminoso paralelo ao eixo principal. Ao se refletir, o raio intercepta o eixo principal do espelho no ponto **F** (foco principal).

Na figura, temos:

$$C\hat{I}P \equiv F\hat{I}C \text{ (2ª Lei da Reflexão)}$$

$$C\hat{I}P \equiv I\hat{C}F \text{ (alternos internos)}$$

Portanto, $F\hat{I}C \equiv I\hat{C}F$, e o triângulo FIC é isósceles, valendo a igualdade:

$$CF = FI$$

Mas $FI \cong FV$, pois o raio incidente considerado é paraxial. Assim:

$$CF \cong FV$$

ou também:

$$f \cong \frac{R}{2}$$

A conclusão acima permite afirmar:

Nos espelhos esféricos gaussianos, o **foco principal** é aproximadamente equidistante do centro de curvatura e do vértice.

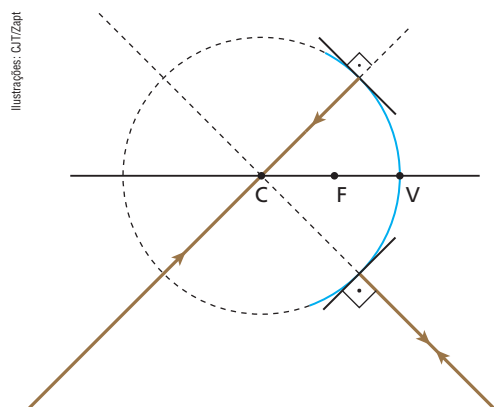
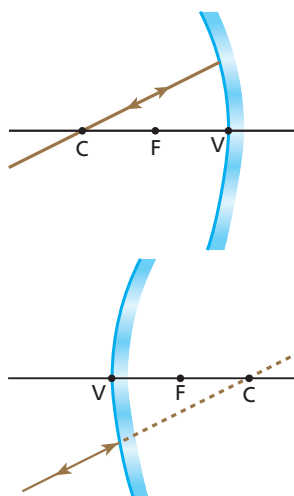
## 13. Raios luminosos particulares

Nos espelhos esféricos, alguns raios luminosos particulares de simples traçado apresentam grande interesse, pois facilitam a construção gráfica das imagens.

### 1º raio particular

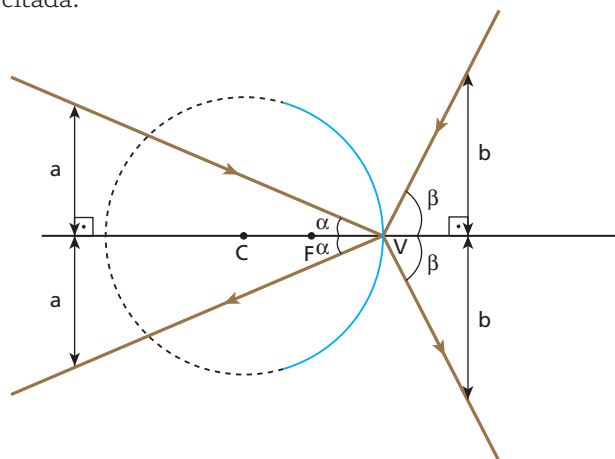
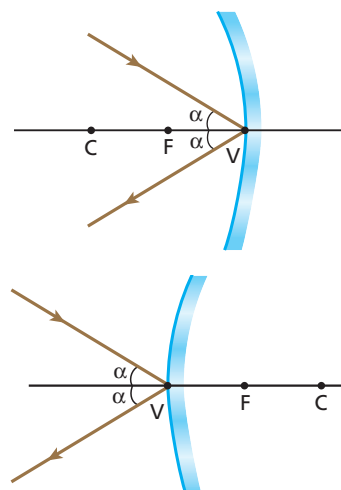
Todo raio luminoso que incide no espelho alinhado com o centro de curvatura se reflete sobre si mesmo.

Essa afirmação pode ser constatada de imediato, pois um raio luminoso que incide alinhado com o centro de curvatura é **normal** à superfície refletora.

Como a incidência é normal, o ângulo de incidência é nulo, o mesmo devendo ocorrer com o ângulo de reflexão. Daí dizermos que "o raio se reflete sobre si mesmo".

Usando a representação gaussiana, temos as figuras:

A propriedade que esse raio tem de refletir-se sobre si mesmo é verificada em qualquer tipo de espelho esférico, gaussiano ou não.

### 2º raio particular

Todo raio luminoso que incide no vértice do espelho gera, relativamente ao eixo principal, um raio refletido simétrico.

Essa afirmação é consequência da 2ª Lei da Reflexão. A reta normal à superfície refletora em **V** é o próprio eixo principal. Como o ângulo de reflexão deve ser igual ao de incidência, justifica-se a simetria citada.

Usando a representação gaussiana, temos as figuras:

A propriedade que esse raio tem de refletir-se simetricamente em relação ao eixo principal é verificada com qualquer tipo de espelho esférico, gaussiano ou não.

### 3º raio particular

Todo raio luminoso que incide paralelamente ao eixo principal se reflete alinhado com o foco principal.

Note que essa afirmação decorre da própria definição de foco principal.

Considerando a reversibilidade dos raios de luz, podemos enunciar também:

Todo raio luminoso que incide alinhado com o foco principal se reflete paralelamente ao eixo principal.

Esse raio só é verificado em espelhos esféricos gaussianos.

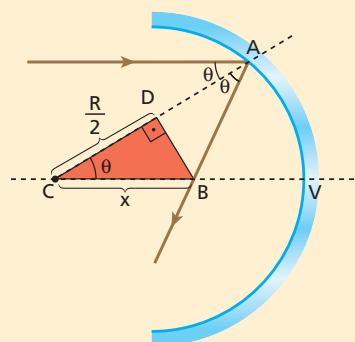
## Espelhos esféricos não gaussianos

Você viu que raios luminosos pouco afastados em relação ao eixo principal de um espelho esférico — raios paraxiais —, incidindo paralelamente a esse eixo, se refletem alinhados com o foco principal. Referimo-nos a essa situação nesta seção 13 como **3º raio particular**, inerente aos espelhos esféricos gaussianos.

Pode ocorrer, no entanto, a incidência de raios luminosos paralelos ao eixo principal, porém distantes desse eixo. Se a distância do raio incidente ao eixo principal for da ordem do raio de curvatura, o espelho operará fora das condições de Gauss, sendo então caracterizado como **não gaussiano**. Nessas circunstâncias, o foco deixará de ser pontual, observando-se na "região focal" uma mancha luminosa denominada **cáustica de reflexão**.

No caso representado ao lado, um espelho esférico côncavo de raio de curvatura igual a **R** recebe um raio luminoso paralelo ao seu eixo principal. A distância entre esse raio e o eixo é da ordem de **R** e o espelho é, portanto, não gaussiano. Sendo $\theta$ o ângulo de incidência da luz, determinemos a que distância **x** do centro de curvatura **C** esse raio luminoso intercepta o eixo principal.

Lembrando que a reta normal ao espelho no ponto de incidência passa pelo ponto **C** e que o ângulo de reflexão é igual ao de incidência, o triângulo ABC é isósceles. Considerando o triângulo retângulo, DBC, destacado na figura, e observando que nesse triângulo o cateto adjacente ao ângulo $\theta$ tem medida $\frac{R}{2}$ tem-se:

$$\cos\theta = \frac{\frac{R}{2}}{x} \qquad \boxed{x = \frac{R}{2\cos\theta}}$$

É importante destacar que, se $\theta$ tender a zero (incidência paraxial), $\cos\theta$ tenderá a 1 e **x** tenderá a $\frac{R}{2}$. Nesse caso, o raio refletido interceptará o eixo principal no ponto médio do segmento que conecta o centro de curvatura **C** ao vértice **V** do espelho, local denominado, no caso dos espelhos esféricos gaussianos, foco principal.

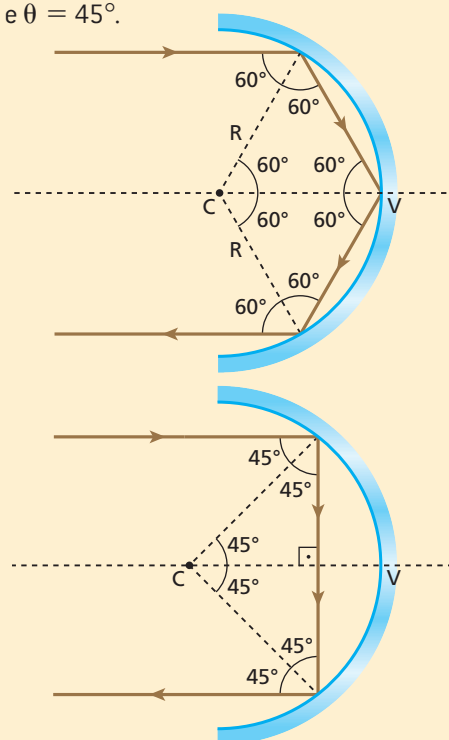
A seguir, destacamos as situações particulares em que $\theta = 60°$ e $\theta = 45°$.

**1. Para $\theta$ = 60°:** $x = \dfrac{R}{2\cos 60°} = \dfrac{R}{2 \cdot \frac{1}{2}}$  $\boxed{x = R}$

Veja no esquema ao lado a trajetória da luz:

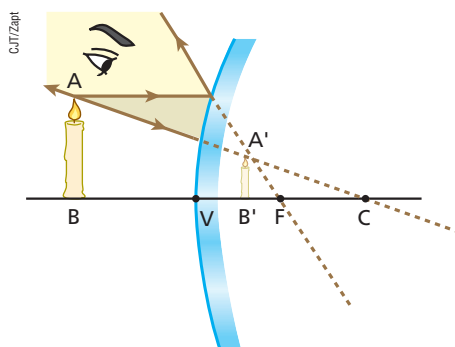
Ilustrações: CJT/Zapt

**2. Para $\theta$ = 45°:** $x = \dfrac{R}{2\cos 45°} = \dfrac{R}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$  $\boxed{x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}}$

Veja no esquema ao lado a trajetória da luz:

## 14. Construção gráfica das imagens nos espelhos esféricos

Para construir a imagem de um ponto conjugada por um sistema óptico, necessitamos de pelo menos dois raios luminosos incidentes. Em relação ao traçado das imagens fornecidas pelos espelhos esféricos, devemos utilizar os raios luminosos particulares descritos na seção anterior.

Considere, por exemplo, o espelho convexo abaixo, diante do qual há um objeto **AB** que tem o extremo **B** no eixo principal. Nesse caso, para obter a imagem de **AB**, basta obtermos a imagem do extremo **A**, pois a imagem correspondente ao extremo **B** estará situada no eixo principal.

CJT/Zapt

Observe que, nessa situação, a imagem formada é:

- virtual: obtida pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios refletidos (situada "atrás do espelho");
- direita: "de cabeça para cima" em relação ao objeto;
- menor: o "tamanho" da imagem é menor que o do objeto.

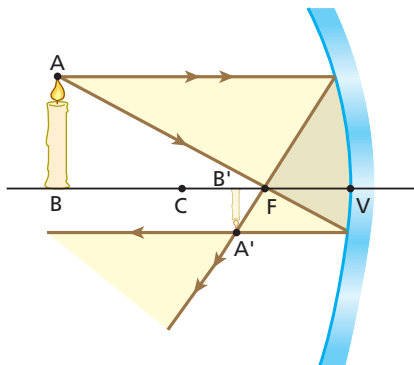
É importante destacar que:

A um objeto real, um espelho esférico convexo conjuga uma imagem sempre virtual, direita e menor, compreendida entre o foco principal e o vértice, independentemente da distância do objeto à superfície refletora.

Thales Trigo

Aumentando ou diminuindo a distância entre a vela e a superfície refletora do espelho convexo, a imagem mantém suas características: virtual, direita e menor que o objeto.

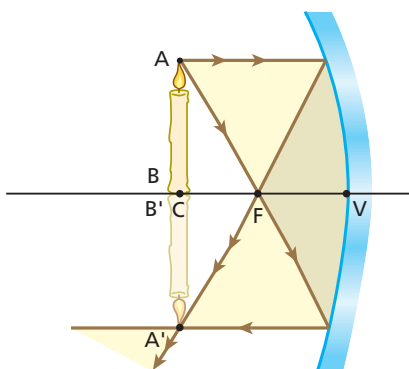
As características das imagens produzidas pelos espelhos côncavos, por sua vez, dependem da posição do objeto em relação ao espelho. Há cinco casos importantes a considerar:

## 1º) Objeto além do centro de curvatura

**Características da imagem:**

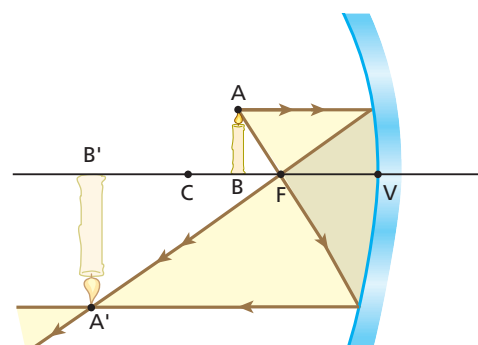
- real: formada pelo cruzamento efetivo dos raios refletidos;
- invertida: "de cabeça para baixo" em relação ao objeto;
- menor: o "tamanho" da imagem é menor que o do objeto.

Thales Trigo

Na fotografia, imagem real, invertida e menor produzida por um espelho esférico côncavo de um objeto situado além de seu centro de curvatura.

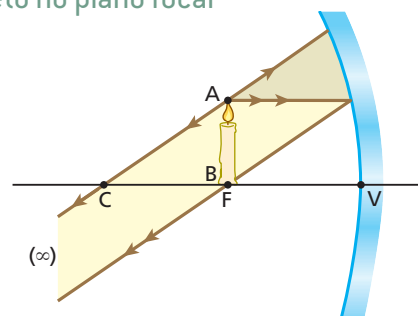
## 2º) Objeto no plano frontal, que contém o centro de curvatura

**Características da imagem:**

- real;
- invertida;
- do mesmo tamanho que o objeto.

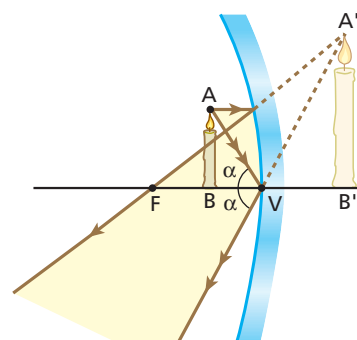
## 3º) Objeto entre o centro de curvatura e o foco

**Características da imagem:**

- real;
- invertida;
- maior: o "tamanho" da imagem é maior que o do objeto.

Observe que as imagens reais obtidas de objetos também reais são sempre invertidas.

## 4º) Objeto no plano focal

**Características da imagem:**

Nesse caso, como os raios luminosos emergentes do sistema são paralelos entre si, a imagem "forma-se no infinito", sendo, portanto, **imprópria**.

## 5º) Objeto entre o foco e o vértice

**Características da imagem:**

- virtual;
- direita;
- maior.

Esse é o único caso em que, de um objeto real, o espelho côncavo conjuga imagem virtual.

## Duas imagens: duas classificações

Nesta fotografia, visualiza-se a imagem virtual, direita e maior de uma vela colocada entre o foco e o vértice de um espelho esférico côncavo. Visualiza-se também a imagem de um boneco colocado de cabeça para cima além do centro de curvatura do espelho. Essa imagem é real, menor e invertida, apresentando-se de cabeça para baixo em relação ao boneco.

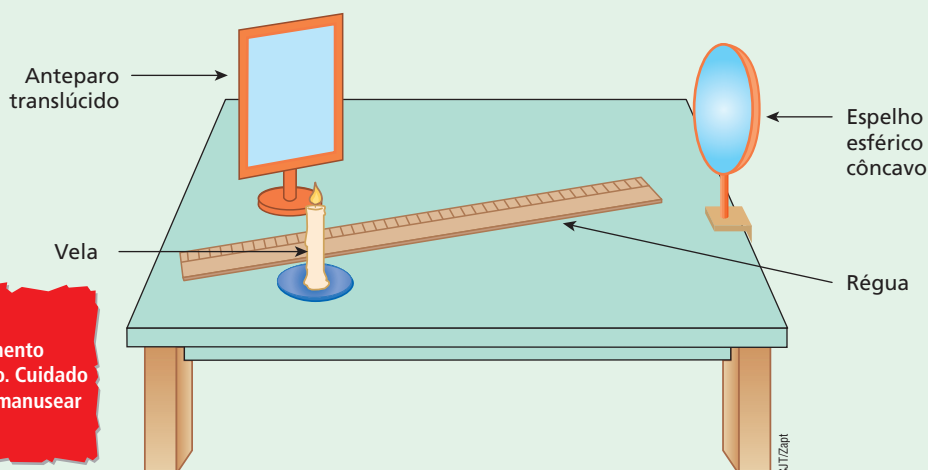
## Para dentista ver melhor!

Uma ferramenta obrigatória no exercício da Odontologia é o "espelhinho", utilizado pelo dentista para observar a parte interna dos dentes do paciente. Esse "espelhinho" é côncavo e tem distância focal próxima de 40 mm. Com isso, o dente a ser examinado fica compreendido entre o plano focal e o vértice, fazendo com que o utensílio óptico produza uma imagem virtual, direita e ampliada do dente.

## Faça você mesmo

Há um método prático de determinar o valor aproximado da distância focal de um espelho esférico côncavo.

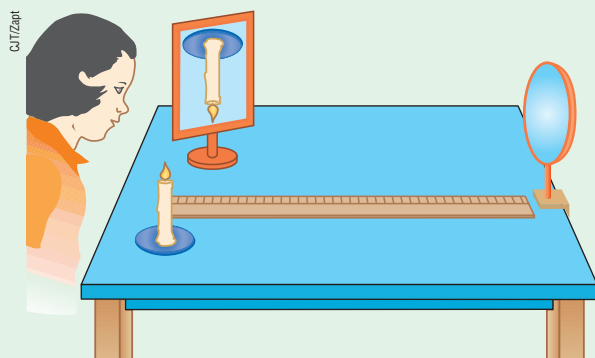
Além do espelho côncavo (que deve ter pequeno ângulo de abertura), você precisará de um anteparo, uma vela e uma régua.

A figura a seguir mostra os elementos necessários para o experimento, que deve ser realizado num ambiente escurecido.

**ATENÇÃO!** Este experimento envolve fogo. Cuidado também ao manusear os espelhos.

Coloque a vela ao lado do anteparo e faça com que a superfície refletora do espelho, previamente fixado, fique voltada para esse conjunto.

Movimente lentamente a vela e o anteparo, mantendo-os sempre emparelhados, procurando fazer com que a luz refletida pelo espelho incida sobre o anteparo.

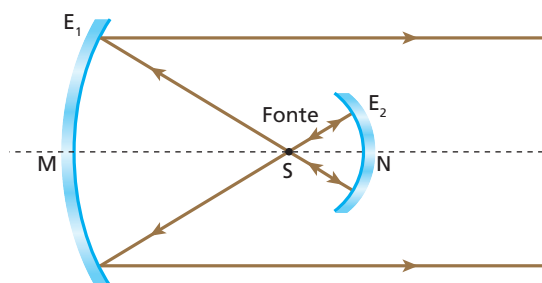
Inicialmente, você observará uma mancha luminosa desfocada projetada no anteparo, mas, movimentando o conjunto vela-anteparo convenientemente, a mancha vai se definindo até constituir-se em uma imagem nítida, devidamente focalizada, da vela.

Nesse momento, o conjunto vela-anteparo estará posicionado na região do centro de curvatura do espelho e a imagem projetada (real) será invertida e terá o mesmo tamanho da vela.

Medindo com a régua a distância do espelho ao conjunto vela-anteparo, você obterá o raio de curvatura **R** do espelho.

Dividindo **R** por 2, você terá determinado o valor da distância focal **f**:

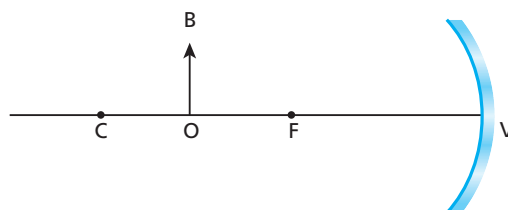
$$f = \frac{R}{2}$$

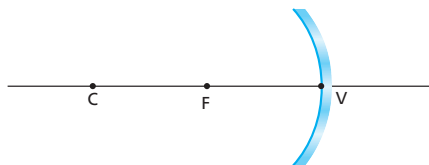
## Exercícios nível 1

**42.** (Cesgranrio-RJ) Em um farol de automóvel, dois espelhos esféricos côncavos são utilizados para se obter um feixe de luz paralelo a partir de uma fonte aproximadamente pontual. O espelho principal $E_1$ tem 16,0 cm de raio. O espelho auxiliar $E_2$ tem 2,0 cm de raio. Para que o feixe produzido seja efetivamente paralelo, as distâncias da fonte **S** aos vértices **M** e **N** dos espelhos devem ser iguais, respectivamente, a:

| | Distância SM | Distância SN |
|---|---|---|
| a) | 8,0 cm. | 1,0 cm. |
| b) | 16,0 cm. | 2,0 cm. |
| c) | 16,0 cm. | 1,0 cm. |
| d) | 8,0 cm. | 2,0 cm. |
| e) | 8,0 cm. | 4,0 cm. |

**43.** (Mack-SP) A imagem de um objeto que está a 40 cm de um espelho esférico côncavo tem a mesma altura do objeto. Colocando o objeto a grande distância do espelho, sua imagem estará a:

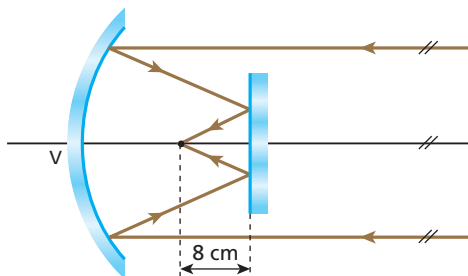
a) 60 cm do espelho.
b) 50 cm do espelho.
c) 40 cm do espelho.
d) 30 cm do espelho.
e) 20 cm do espelho.

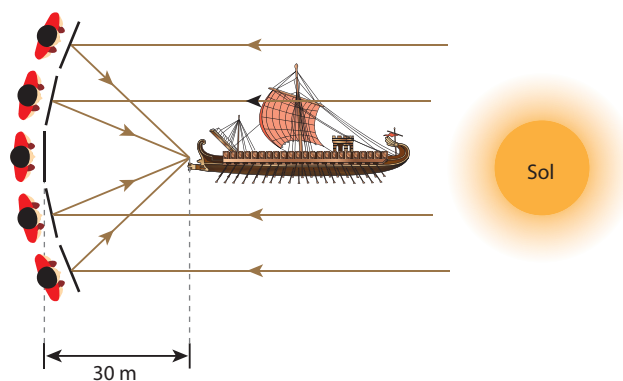
**44.** (PUC-SP) A figura mostra um espelho esférico côncavo, em que **C** é o centro, **F** é o foco e **V** é o vértice. Colocando-se um objeto OB entre **C** e **F**, sua imagem situa-se:

a) à direita de **V**.
b) entre **F** e **V**.
c) entre **F** e o objeto.
d) entre o objeto e **C**.
e) à esquerda de **C**.

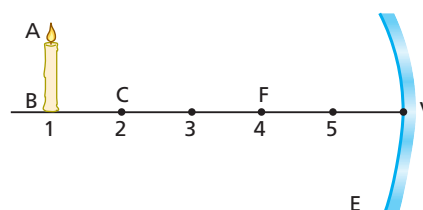
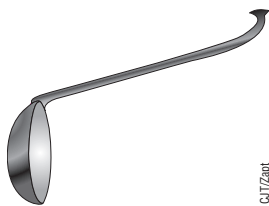
**45.** (USF-SP) Quando você se olha em um espelho esférico côncavo, sua imagem é vista direita e ampliada. Nessas condições, você deve estar:

a) além de **C**, centro de curvatura.
b) em **C**.
c) entre **C** e **F**, foco.
d) em **F**.
e) entre **F** e **V**, vértice.

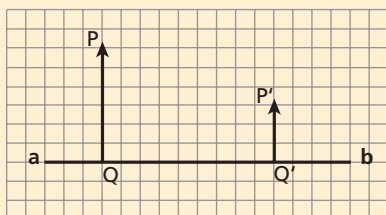
**46.** Diante de uma grande bola de Natal que tem a superfície externa espelhada, um observador dispõe um lápis, que é aproximado e afastado da superfície refletora. A respeito da imagem que a bola conjuga ao lápis, podemos afirmar que:
a) é virtual, direita e reduzida, qualquer que seja a posição do lápis.
b) pode ser real ou virtual, dependendo da posição do lápis.
c) é real, invertida e aumentada, qualquer que seja a posição do lápis.
d) é simétrica do lápis em relação à superfície refletora.
e) nenhuma proposição anterior é correta.

## Exercícios nível 2

**47.** João Laerte, interessado em estudar propriedades dos espelhos, montou o arranjo representado a seguir, em que aparecem um espelho esférico côncavo gaussiano, de raio de curvatura 50 cm, e um pequeno espelho plano, perpendicular ao eixo principal do espelho esférico. Reduzindo a iluminação do ambiente, ele fez incidir no espelho côncavo um feixe luminoso cilíndrico de eixo coincidente com o eixo principal desse espelho. Os raios luminosos refletidos pelo espelho côncavo refletiram-se também no espelho plano e convergiram em um ponto do eixo principal distante 8 cm do espelho plano.

A que distância **d** do vértice **V** do espelho côncavo João Laerte posicionou o espelho plano?

**48.** (Unicamp-SP) Uma das primeiras aplicações militares da óptica ocorreu no século III a.C. quando Siracusa estava sitiada pelas forças navais romanas. Na véspera da batalha, Arquimedes ordenou que 60 soldados polissem seus escudos retangulares de bronze, medindo 0,5 m de largura por 1,0 m de altura. Quando o primeiro navio romano se encontrava a aproximadamente 30 m da praia para atacar, à luz do sol nascente, foi dada a ordem para que os soldados se colocassem formando um arco e empunhassem seus escudos, como representado esquematicamente na figura a seguir. Em poucos minutos, as velas do navio estavam ardendo em chamas. Isso foi repetido para cada navio, e assim não foi dessa vez que Siracusa caiu. Uma forma de entendermos o que ocorreu consiste em tratar o conjunto de espelhos como um espelho côncavo. Suponha que os raios do sol cheguem paralelos ao espelho e sejam focalizados na vela do navio.

a) Qual deve ser o raio do espelho côncavo para que a intensidade do sol concentrado seja máxima?
b) Considere a intensidade da radiação solar no momento da batalha como 500 W/m$^2$. Considere que a refletividade efetiva do bronze sobre todo o espectro solar é de 0,6, ou seja, 60% da intensidade incidente é refletida. Estime a potência total incidente na região do foco.

**49.** No esquema a seguir, **E** é um espelho esférico côncavo de centro de curvatura **C**, foco principal **F** e vértice **V**. AB é um objeto luminoso posicionado diante da superfície refletora. Levando em conta as condições de Gauss, construa graficamente, em seu caderno, a imagem de AB considerando as posições 1, 2, 3, 4 e 5. Em cada caso, dê a classificação da imagem obtida.

**50.** (UFPE) A concha de aço inoxidável representada na figura pode ser usada para demonstrar propriedades dos espelhos esféricos. Uma dessas propriedades consta de uma das alternativas abaixo. Indique:

a) Para objetos colocados à direita, num afastamento inferior a um quarto do diâmetro, as imagens são invertidas.
b) Para objetos colocados à esquerda, num afastamento inferior a um quarto do diâmetro, as imagens são invertidas.
c) Imagens virtuais só podem ser obtidas para objetos colocados à esquerda.
d) Para objetos colocados à direita, num afastamento inferior a um quarto do diâmetro, as imagens são direitas.
e) Imagens virtuais só podem ser obtidas para objetos colocados à direita.

**51. E.R.** No esquema seguinte, **ab** é o eixo principal de um espelho esférico gaussiano, **PQ** é um objeto luminoso contido em um plano frontal e **P'Q'** é a imagem que o espelho conjuga ao objeto considerado:

Reproduza essa figura no seu caderno e obtenha graficamente a posição e o tipo do espelho, bem como as posições de seu centro de curvatura e de seu foco principal.

**Resolução:**

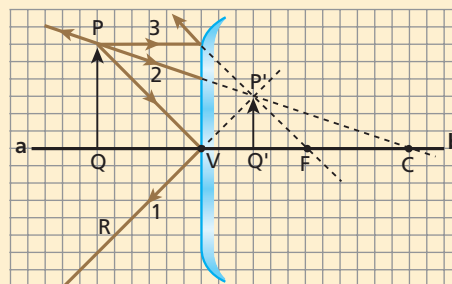
**Posição do espelho:**

Inverte-se o objeto, obtendo-se seu simétrico **QR** em relação ao eixo principal. Liga-se **R** a **P'** (raio 1). Onde o segmento **RP'** intercepta o eixo principal, tem-se o vértice **V** do espelho.

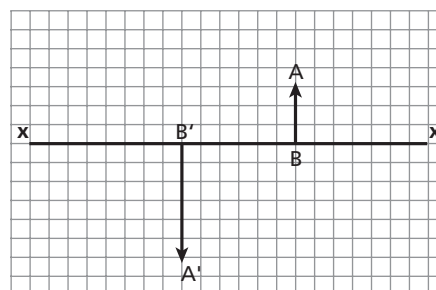
**Natureza do espelho:**

O espelho é convexo, pois a um objeto real está conjugando uma imagem virtual, direita e menor que o objeto.

**Posição do centro de curvatura:**

A partir de **P**, traça-se uma reta passando por **P'** (raio 2). Na intersecção dessa reta com o eixo principal, tem-se a posição do centro de curvatura.

**Posição do foco principal:**

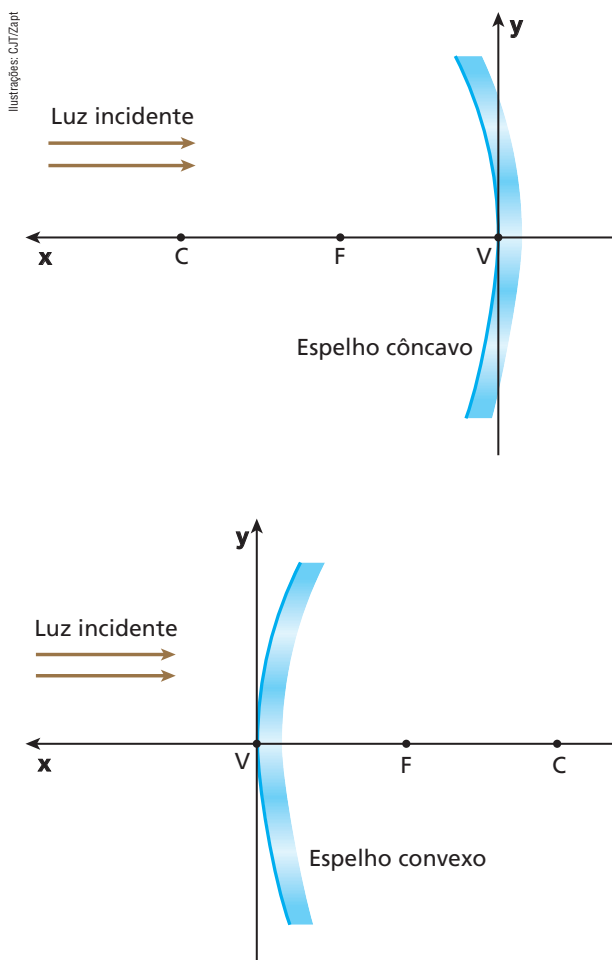
A partir de **P**, traça-se um segmento paralelo ao eixo principal (raio 3). Do ponto em que esse segmento toca o espelho, traça-se uma reta passando por **P'**. Ao cruzar o eixo principal, essa reta determina a posição do foco principal.

**52.** No esquema, **xx'** é o eixo principal de um espelho esférico gaussiano que conjuga a imagem **A'B'** ao objeto real **AB**:

Reproduza essa figura no seu caderno e obtenha graficamente a posição e o tipo do espelho, bem como as posições de seu centro de curvatura e de seu foco principal.

# Bloco 5

## 15. O referencial gaussiano

Podemos nos fundamentar em dados matemáticos e equações para discutir as características das imagens produzidas em espelhos esféricos. É importante salientar que tudo o que se pode concluir graficamente — por meio de esquemas — também pode ser determinado analiticamente, isto é, por meio dos procedimentos que apresentamos a seguir. Observe, porém, que a recíproca nem sempre é verdadeira, o que revela a maior abrangência do estudo analítico.

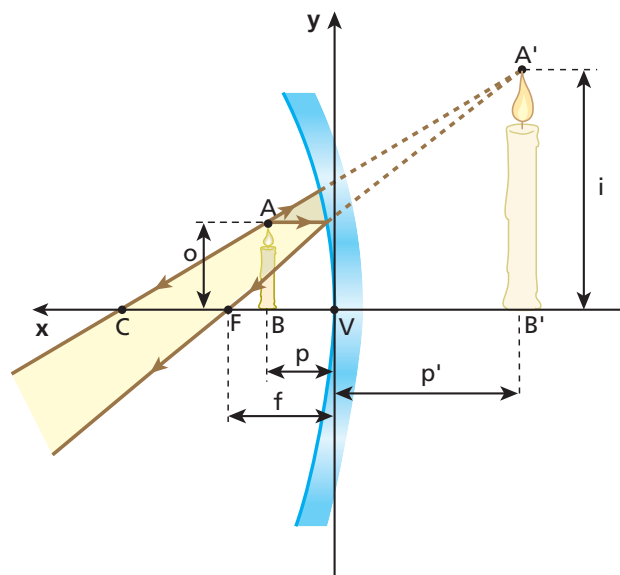
Para tanto, devemos considerar o **referencial gaussiano**, que nada mais é que um sistema cartesiano constituído de dois eixos orientados perpendicularmente entre si, Ox e Oy, com origem no vértice **V** do espelho.

O eixo das abscissas (Ox) será orientado no sentido oposto ao da luz incidente, conforme mostram os dois esquemas anteriores.

Do referencial gaussiano, decorre o seguinte:

**Elementos reais** (objetos ou imagens situados na frente do espelho): **abscissa positiva**.

**Elementos virtuais** (objetos ou imagens situados atrás do espelho): **abscissa negativa**.

Convém salientar que nos espelhos côncavos a abscissa do foco principal é positiva, enquanto nos espelhos convexos essa abscissa é negativa.

Veja o exemplo a seguir, em que é traçada a imagem do objeto **AB** situado diante de um espelho côncavo.

Considerando o referencial gaussiano, temos, nesse caso:

- $p > 0$ (objeto real)
- $p' < 0$ (imagem virtual)
- $f > 0$ (no espelho côncavo, o foco principal é real)
- $o > 0$ e $i > 0$

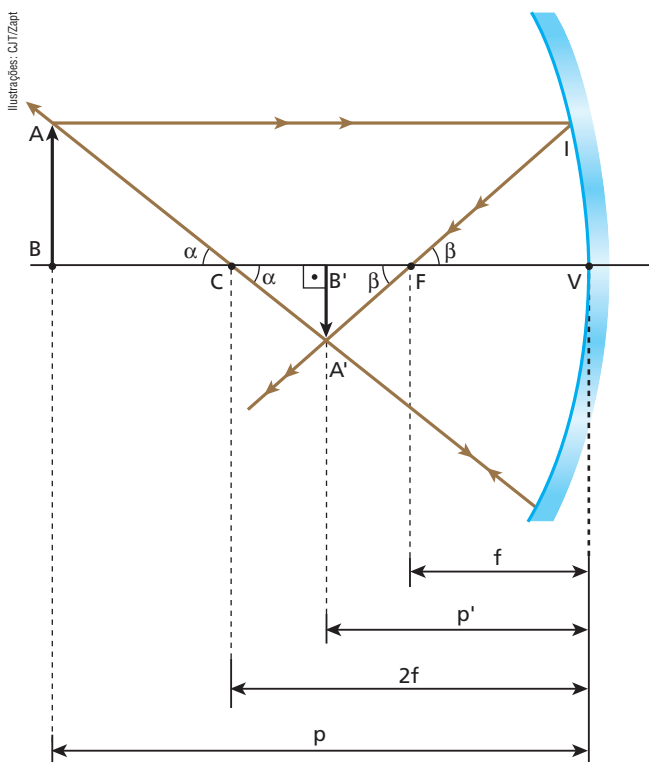
A simbologia adotada nesse exemplo será utilizada também nas próximas situações:

$p$ = abscissa do objeto
$p'$ = abscissa da imagem
$f$ = abscissa focal
$o$ = ordenada do objeto
$i$ = ordenada da imagem

**Nota:**

- O módulo de **f** recebe o nome de **distância focal**.

## 16. Função dos pontos conjugados (Equação de Gauss)

Chamada por alguns autores de Equação de Gauss, a **função dos pontos conjugados** tem grande importância no curso de óptica geométrica. Para demonstrá-la, usaremos a situação a seguir, em que **AB** é um objeto frontal e **A'B'** é a imagem correspondente conjugada por um espelho esférico côncavo.

Observando as condições de Gauss, percebemos que o arco IV é praticamente retilíneo e de mesmo comprimento que o segmento **AB**. Assim:

$$IV \cong AB \qquad (a)$$

Lembre-se de que nos espelhos esféricos gaussianos o foco principal (**F**) é equidistante do vértice (**V**) e do centro de curvatura (**C**). Assim:

$$\text{se } FV = f \;\Rightarrow\; CV = 2f$$

Os triângulos ABC e A'B'C são semelhantes. Por isso:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C}{BC}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{2f - p'}{p - 2f} \qquad (b)$$

Os triângulos A'B'F e IVF são semelhantes. Daí:

$$\frac{A'B'}{IV} = \frac{B'F}{VF}$$

$$\frac{A'B'}{IV} = \frac{p' - f}{f} \qquad (c)$$

Substituindo (a) em (c), temos:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{p' - f}{f} \qquad (d)$$

Comparando (b) e (d), segue que:

$$\frac{2f - p'}{p - 2f} = \frac{p' - f}{f}$$

$$(p - 2f)(p' - f) = f(2f - p')$$

$$p\,p' - f\,p - 2f\,p' + 2f^2 = 2f^2 - f\,p'$$

$$p\,p' = f\,p' + f\,p$$

Dividindo ambos os membros por pp'f, temos:

$$\frac{pp'}{pp'f} = \frac{fp'}{pp'f} + \frac{fp}{pp'f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$ (função dos pontos conjugados)

Convém destacar que, ao utilizar essa função, devem ser considerados os sinais algébricos dados pelo referencial gaussiano.

## 17. Aumento linear transversal

Representemos por **o** a ordenada de um objeto linear colocado diante de um espelho esférico e por **i** a ordenada da respectiva imagem, ambas dadas em relação ao referencial gaussiano.

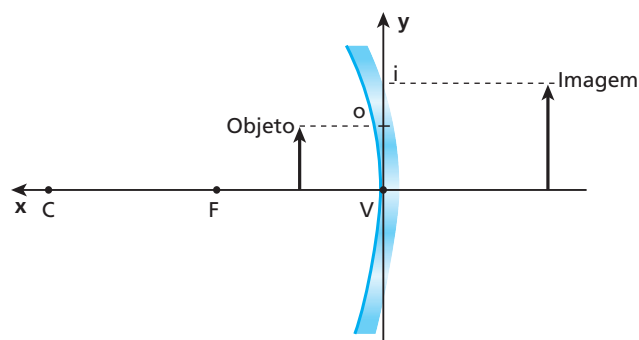
Por definição, o **aumento linear transversal** é a grandeza adimensional **A**, calculada pelo quociente da ordenada da imagem (**i**) pela ordenada do objeto (**o**):

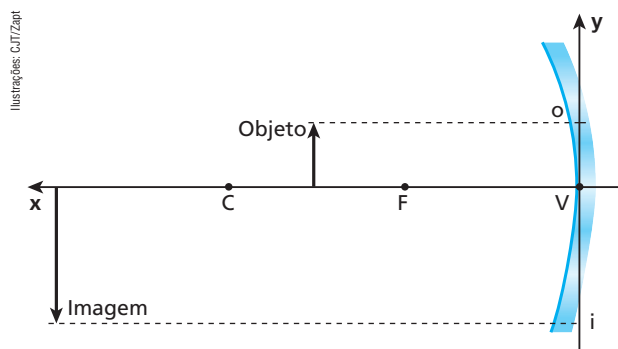
$$A = \frac{i}{o}$$

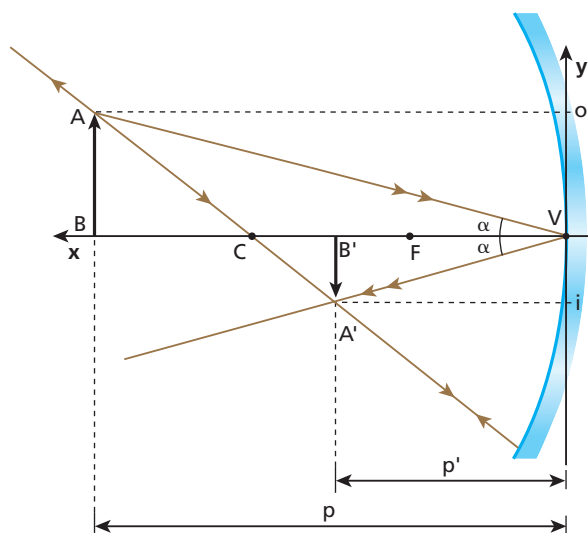
O aumento é denominado **linear** por referir-se exclusivamente às alterações do comprimento da imagem em relação ao comprimento do objeto e **transversal** por relacionar apenas ordenadas, isto é, dimensões ortogonais ao eixo principal do espelho.

O termo “aumento” deve ser entendido como ampliação ou redução. Se $|A| > 1$, a imagem é ampliada em comparação com o objeto e, se $|A| < 1$, a imagem é reduzida em comparação com o objeto.

Dependendo dos sinais das ordenadas **i** e **o**, o aumento linear transversal pode ser positivo ou negativo.

Se o aumento é positivo ($A > 0$), **i** e **o** têm o mesmo sinal e a imagem é **direita**.

Neste exemplo, $o > 0$ e $i > 0$: a imagem é direita.

Se o aumento é negativo ($A < 0$), **i** e **o** têm sinais opostos e a imagem é **invertida**.

Neste exemplo, $o > 0$ e $i < 0$: a imagem é invertida.

Considere, agora, a situação da figura a seguir.

Os triângulos ABV e A'B'V são semelhantes. Por isso, podemos escrever:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'V}{BV}$$

Mas, da figura, temos:

$AB = |o|$, $A'B' = |i|$, $BV = |p|$ e $B'V = |p'|$

Substituindo os termos na expressão anterior, segue que:

$$\frac{|i|}{|o|} = \frac{|p'|}{|p|}$$

Note que, no caso da situação proposta, $i < 0$, $o > 0$, $p > 0$ (objeto real) e $p' > 0$ (imagem real). Considerando os sinais algébricos de **i**, **o**, **p** e **p'** e lembrando que $A = \frac{i}{o}$, podemos escrever:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

Com base nessa expressão, convém comentar aqui duas situações importantes. Em cada caso, faremos a discussão analítica correspondente.

**1ª situação**: Aumento positivo.

Se $A > 0$, devemos ter:

a) **i** e **o** com o mesmo sinal: a imagem é direita;

b) **p'** e **p** com sinais opostos: o objeto e a imagem têm naturezas opostas (se um é real, o outro é virtual).

**2ª situação**: Aumento negativo.

Se $A < 0$, devemos ter:

a) **i** e **o** com os sinais opostos: a imagem é invertida;

b) **p'** e **p** com o mesmo sinal: o objeto e a imagem têm a mesma natureza (ambos são reais ou ambos são virtuais).

## Exercícios

nível 1

**53. E.R.** Um homem situado a 2,0 m do vértice de um espelho esférico visa sua imagem direita e ampliada três vezes. Determine:

a) a distância focal do espelho.

b) sua natureza (côncavo ou convexo).

**Resolução:**

a) O aumento linear transversal vale $A = +3$ ($A > 0$, porque a imagem é direita).

Sendo a distância do objeto ao espelho $p = 2,0$ m, calculemos p', que é a distância da imagem ao espelho:

$$A = -\frac{p'}{p}$$

$$3 = -\frac{p'}{2,0}$$

Donde:

$$\boxed{p' = -6{,}0 \text{ m}} \text{ (imagem virtual)}$$

A distância focal **f** pode ser obtida pela função dos pontos conjugados (equação de Gauss):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

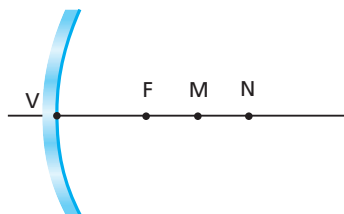
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}0} - \frac{1}{6{,}0}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{3 - 1}{6{,}0} = \frac{2}{6{,}0}$$

$$\boxed{f = 3{,}0 \text{ m}}$$

b) Como $f > 0$, o foco é real e o espelho é **côncavo**.

**54.** Considere um espelho côncavo de aumento, com distância focal $f = 1{,}0$ m, usado para uma pessoa fazer a barba. Calcule a distância do rosto ao espelho para que a imagem dele esteja ampliada 2 vezes.

**55.** (Ufal) Considere os pontos **M** e **N**, situados sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo, respectivamente a 30 cm e 40 cm do vértice do espelho.

Esse espelho côncavo, que tem foco em **F** e distância focal de 20 cm, conjuga aos pontos **M** e **N**, respectivamente, as imagens **M'** e **N'**. Determine o valor absoluto da distância entre as imagens **M'** e **N'**.

**56.** Diante de um espelho esférico, perpendicularmente ao seu eixo principal, é colocado um objeto luminoso a 15 cm do vértice. Deseja-se que a imagem correspondente seja projetada num anteparo e tenha quatro vezes o comprimento do objeto. Determine:

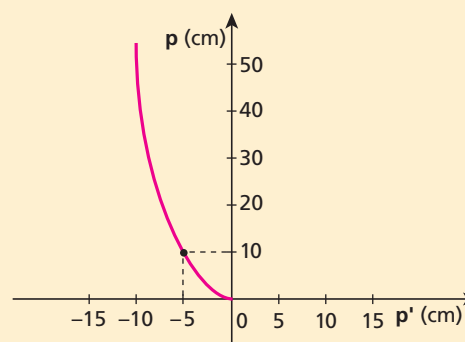
a) se a imagem é real ou virtual, direita ou invertida.
b) a distância do anteparo ao vértice do espelho para que a imagem seja nítida.
c) a distância focal do espelho.

**57.** (Vunesp-SP) Um espelho esférico côncavo tem raio de curvatura igual a 80 cm. Um objeto retilíneo, de 2,0 cm de altura, é colocado perpendicularmente ao eixo principal do espelho, a 120 cm do vértice. Essa posição resulta em uma imagem:

a) real e invertida de 1,0 cm de altura e a 60 cm do espelho.
b) virtual e direita de 1,0 cm de altura e a 10 cm do espelho.
c) virtual e invertida de 1,0 cm de altura e a 10 cm do espelho.
d) real e direita de 40 cm de altura e a 60 cm do espelho.
e) virtual e direita de 40 cm de altura e a 10 cm do espelho.

**58.** A distância entre um objeto luminoso e sua respectiva imagem conjugada por um espelho esférico gaussiano é de 1,8 m. Sabendo que a imagem tem altura quatro vezes a do objeto e que está projetada em um anteparo, responda:

a) O espelho é côncavo ou convexo?
b) Qual o seu raio de curvatura?

**59. E.R.** Um objeto é colocado sobre o eixo de um espelho convexo. O gráfico seguinte representa, respectivamente, as abscissas **p** e **p'** do objeto e de sua imagem, ambas em relação ao vértice do espelho:

Qual é a distância focal desse espelho em centímetros?

**Resolução:**

Conforme vimos, para os espelhos esféricos gaussianos aplica-se a função dos pontos conjugados. Assim:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Analisando o gráfico, observamos um ponto de coordenadas conhecidas. Vê-se, então, que:

para $p = 10$ cm, $p' = -5$ cm

Calculemos **f**, que é a distância focal do espelho:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{f = -10 \text{ cm}}$$

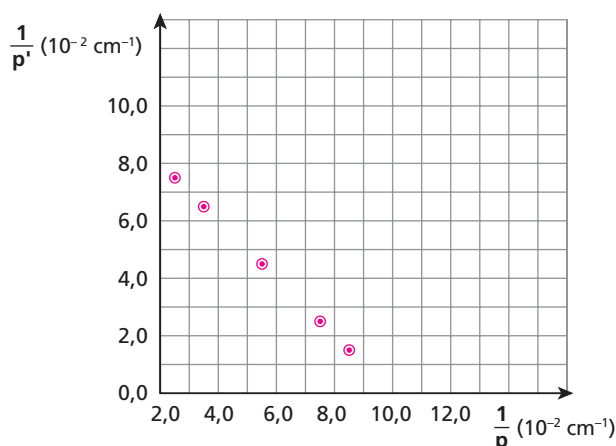
Observe que o resultado negativo deve ser atribuído ao fato de os espelhos esféricos convexos terem focos virtuais.

**60.** Diante de um espelho convexo com 30 cm de raio de curvatura coloca-se um objeto luminoso a 10 cm do vértice. Determine:

a) a abscissa focal do espelho.
b) a distância da imagem ao espelho.

## Exercícios

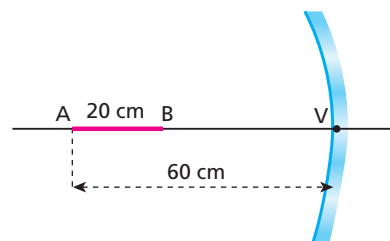
nível 2

**61.** Em certo experimento, mediram-se a distância **p** entre um objeto e a superfície refletora de um espelho esférico côncavo que obedece às condições de Gauss e a distância **p'** entre esse espelho e a correspondente imagem real produzida, em vários pontos. O resultado dessas medições está apresentado no gráfico abaixo:

Examinando cuidadosamente o gráfico, determine a distância focal do espelho.

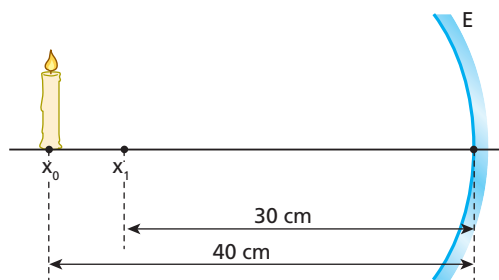
**62.** (UFBA – mod.) O quadro abaixo apresenta características de três espelhos, I, II e III:

| Espelho | I | II | III |
|---|---|---|---|
| Tipo | | | |
| Abscissa focal (cm) | +20 | –20 | |
| Abscissa da imagem (cm) | | –4 | |
| Abscissa do objeto (cm) | +10 | | +10 |
| Aumento linear transversal | | | +1 |
| Natureza da imagem | | | |
| Orientação da imagem | | | |

Detemine os dados que preenchem corretamente as lacunas da tabela referentes ao:
a) espelho I.
b) espelho II.
c) espelho III.

**63.** Uma barra AB de 20 cm de comprimento está colocada sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo. A extremidade **B** encontra-se sobre o centro de curvatura do espelho, enquanto a extremidade **A** encontra-se a 60 cm do espelho, como representa a figura.

Determine:
a) a distância focal do espelho.
b) o comprimento da imagem da barra conjugada pelo espelho.

**64.** (Mack-SP) Um objeto real se encontra diante de um espelho esférico côncavo, a 10 cm de seu vértice, sobre o eixo principal. O raio de curvatura desse espelho é de 40 cm. Se esse objeto se deslocar até o centro de curvatura do espelho, qual será a distância entre a imagem inicial e a imagem final?

**65.** Em um experimento de Óptica Geométrica dispuseram-se um toco de vela e um espelho côncavo gaussiano **E**, de distância focal igual a 20 cm, como representa a figura:

O toco de vela foi deslocado de $x_0$ a $x_1$, com velocidade escalar de módulo 1,0 cm/s. Enquanto o toco de vela foi deslocado, qual foi o módulo da velocidade escalar média da imagem, expresso em centímetros por segundo?

**66. E.R.** Um pequeno objeto linear é colocado sobre o eixo principal, em frente da superfície refletora de um espelho esférico gaussiano. Sabendo que a abscissa focal do espelho vale **f** e que a abscissa do objeto vale **p**, expresse o aumento linear transversal **A** em função de **f** e de **p**.

**Resolução:**

O aumento linear transversal é tal que:

$$A = -\frac{p'}{p}$$

Da qual: $p' = -Ap$ (I)

Sabemos, da função dos pontos conjugados, que:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Ap}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{A - 1}{Ap}$$

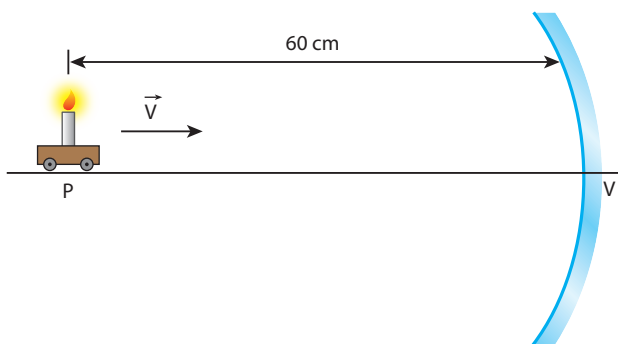
$$Af - f = Ap$$

$$A(f - p) = f$$

Donde:

$$\boxed{A = \frac{f}{f - p}}$$

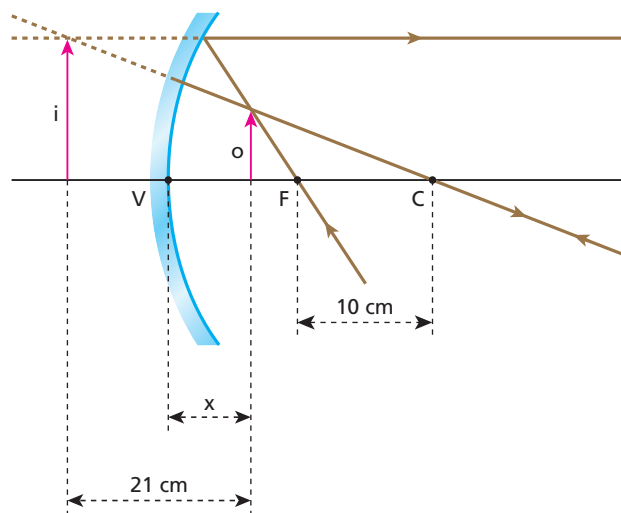
**Nota:**
- Essa expressão pode ser utilizada na resolução de exercícios, constituindo um instrumento simplificador de cálculos.

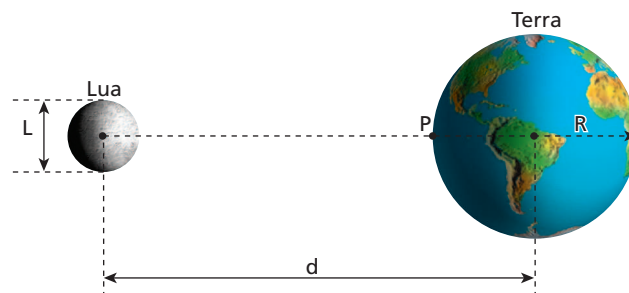
**67.** Uma vela se aproxima de um espelho esférico côncavo com velocidade escalar constante igual a 5 cm/s. Ao passar pelo ponto **P**, que está a 60 cm do vértice **V** do espelho, observa-se que a imagem conjugada pelo espelho é real e tem a metade da altura do objeto.

De acordo com o referencial de Gauss, o intervalo de tempo necessário para que a imagem se torne virtual é:
a) 2 s.
b) 4 s.
c) 6 s.
d) 8 s.
e) 10 s.

**68.** Um toco de vela é colocado frontalmente a 12 cm do vértice de um espelho esférico que obedece às condições de Gauss, obtendo-se, nesse caso, uma imagem direita e de comprimento igual a um terço do comprimento da vela. Determine:
a) o tipo do espelho utilizado (côncavo ou convexo), bem como seu raio de curvatura.
b) a distância da imagem ao vértice do espelho.

**69.** Em um espelho côncavo, a distância entre um objeto real e sua imagem é de 60 cm. Sabendo-se que a imagem é invertida e de comprimento igual à metade do comprimento do objeto, qual o raio de curvatura do espelho?

**70.** (UFSC) A distância entre a imagem e um objeto colocado em frente a um espelho côncavo é de 16 cm. Sabendo que a imagem é direita e 3 vezes maior, determine o raio de curvatura do espelho, em centímetros.

**71.** (Mack-SP) Um objeto real **O** encontra-se diante de um espelho esférico côncavo, que obedece às condições de Gauss, conforme o esquema abaixo.

Sendo **C** o centro da curvatura do espelho e **F** seu foco principal, a distância **x** entre o objeto e o vértice **V** do espelho é:
a) 6,0 cm.
b) 9,0 cm.
c) 10,5 cm.
d) 11,0 cm.
e) 35,0 cm.

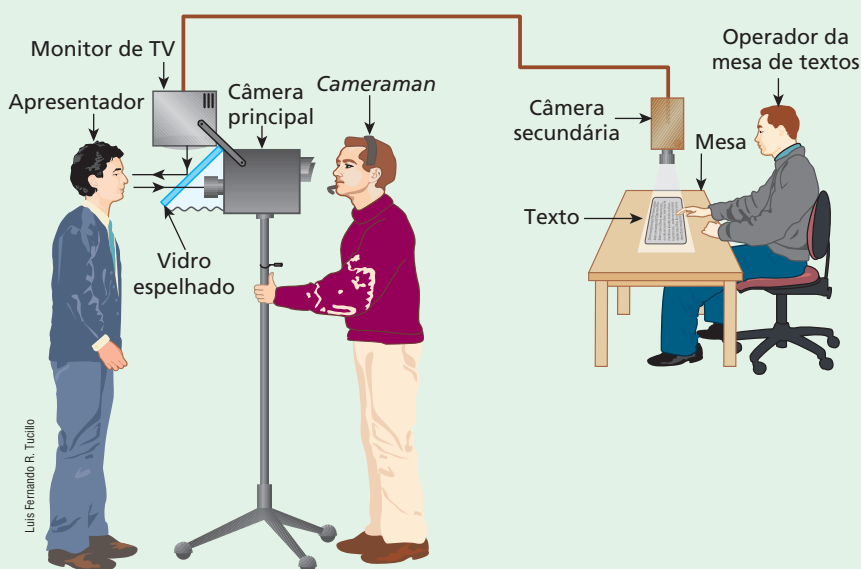
**72. Lua cheia sobre o Pacífico**
Considere a situação esquematizada a seguir, fora de escala e em cores-fantasia, em que os centros da Lua e da Terra estão separados por uma distância **d**. Admita que o raio da Terra seja igual a **R** e que o Oceano Pacífico, refletindo a luz da lua cheia, comporte-se como um espelho esférico gaussiano.

Sendo **L** o diâmetro da Lua, determine em função de **d**, **R** e **L**:
a) a distância entre a imagem da Lua e o ponto **P**.
b) o diâmetro da imagem da Lua.

# Leitura

## Como funciona o *teleprompter*

Você já deve ter reparado que os apresentadores de telejornais narram as notícias sem baixar os olhos para ler em folhas de papel. Quem está assistindo ao programa tem a impressão de que os textos são decorados.

Teriam esses profissionais uma memória tão prodigiosa, capaz de reter toda a edição de um programa noticioso que dura em média meia hora? É claro que não. Eles utilizam um equipamento denominado *teleprompter*, que permite que a leitura seja realizada diretamente numa lâmina de vidro transparente, plana e retangular, parcialmente espelhada em uma das faces, que é montada defronte à lente objetiva da câmera principal.

Uma câmera secundária capta as imagens de laudas (folhas de papel que contêm os textos) que correm sobre uma mesa a uma velocidade adequada. Essas imagens são transferidas eletronicamente para o vídeo de um monitor de TV instalado a 45° em relação à lâmina de vidro, conforme ilustra o esquema a seguir. A luz proveniente desse monitor é refletida pela superfície espelhada da lâmina, atingindo os olhos do apresentador, que faz a leitura sem dificuldades. Como a lâmina de vidro também é transparente, a luz difundida pelo corpo do apresentador chega à lente objetiva da câmera principal, e tem-se a impressão de que ele está permanentemente olhando para o telespectador.

# Descubra mais

**1.** Como são fabricados os espelhos de uso popular?

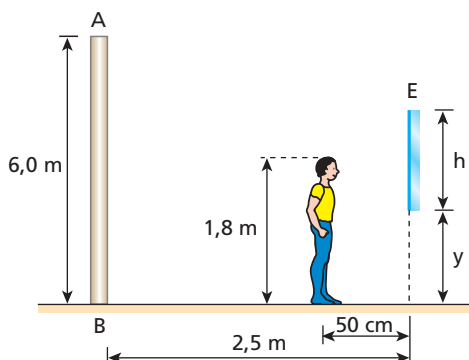
**2.** A equação de Gauss $\left(\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)$ também é aplicável aos espelhos planos?

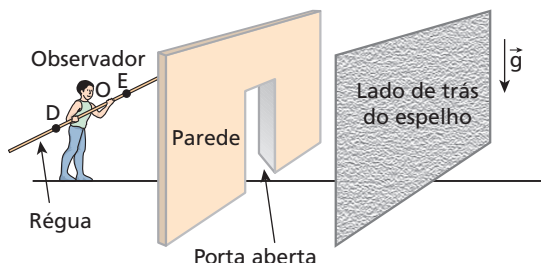
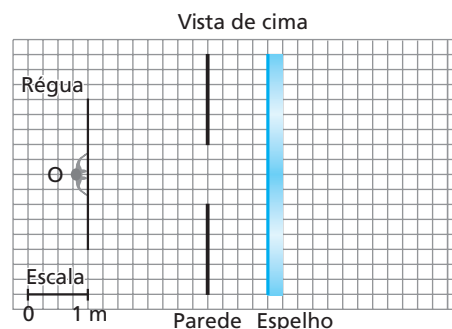
**3.** Nos grandes telescópios, os espelhos primários, responsáveis pela captação da imagem inicial de um astro, são côncavos, com diâmetros da ordem de alguns metros. Como se faz para minimizar os efeitos da dilatação térmica sobre esses espelhos, que altera dimensões importantes, como a distância focal?

**4.** Por que nos telescópios são utilizados espelhos parabólicos em vez de espelhos esféricos?

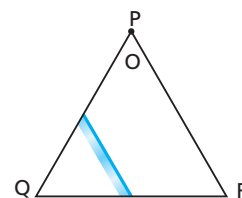
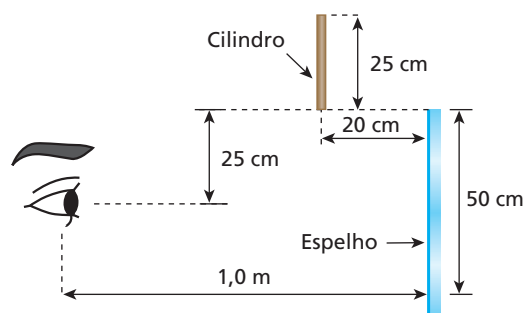
## Exercícios nível 3

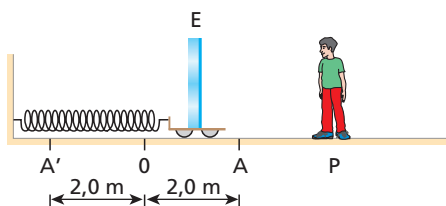
**73.** (FGV-SP) Do lado oeste da rua, um prédio revestido com vidros planos e espelhados posicionados verticalmente em toda a fachada, faz com que os raios solares nele refletidos iluminem um segundo prédio do outro lado da rua até o limite entre a base desse prédio e a calçada. No mesmo momento, um poste de iluminação, com 5 m de altura, está projetando no chão horizontal uma sombra de 2 m.
Se a distância entre os prédios, um voltado frontalmente para o outro, é de 15 m, e, sabendo que naquele dia o Sol passaria pelo ponto mais alto do céu, pode-se dizer que o prédio que se encontra do lado leste da rua tem uma altura, em m, igual a
a) 30. b) 45. c) 50. d) 65. e) 75.

**74.** Uma pessoa cujos olhos se encontram a 1,8 m do chão está em repouso diante de um espelho plano vertical **E**, a 50 cm dele. A pessoa visualiza, por reflexão em **E**, a imagem de um poste AB, de 6,0 m de altura, situado atrás de si e a 2,5 m de **E**.

Determine:
a) a mínima dimensão vertical **h** que deve ter o espelho para que a pessoa possa ver inteiramente a imagem do poste.
b) a distância **y** da borda inferior do espelho ao chão nas condições do item anterior.

**75.** (Fuvest-SP – mod.) Um observador **O** olha-se em um espelho plano vertical pela abertura de uma porta com 1 m de largura, paralela ao espelho, conforme a figura e o esquema a seguir.
Segurando uma régua longa, ele a mantém na posição horizontal, paralela ao espelho e na altura dos ombros, para avaliar os limites da região que consegue enxergar através do espelho (limite **D**, à sua direita, e limite **E**, à sua esquerda).

a) Copie a figura e trace os raios que, partindo dos limites **D** e **E** da região visível da régua, atingem os olhos do observador **O**. Construa a solução, utilizando linhas cheias para indicar esses raios e linhas tracejadas para prolongamentos de raios ou outras linhas auxiliares. Indique, com uma flecha, o sentido do percurso da luz.

b) Copie o esquema e identifique **D** e **E**, estimando, em metros, a distância **L** entre esses dois pontos da régua.

**76.** (Vunesp-SP) Um observador **O** encontra-se no vértice **P** de uma sala, cuja planta é um triângulo equilátero de lado igual a 6,0 m. Em um dos cantos da sala, existe um espelho vertical de 3,0 m de largura ligando os pontos médios das paredes PQ e QR.

Nessas condições, olhando através do espelho, o observador vê (no plano horizontal que passa pelos seus olhos):
a) metade de cada parede da sala.
b) um terço de PR e metade de QR.
c) um terço de PR e um terço de PQ.
d) metade de QR e metade de PR.
e) PR inteira e metade de QR.

**77.** (Faap-SP) Um cilindro de 25 cm de altura e de diâmetro desprezível foi abandonado de uma posição tal que sua base inferior estava alinhada com a extremidade superior de um espelho plano de 50 cm de altura e a 20 cm deste. Durante sua queda, ele é visto, assim como sua imagem, por um observador, que se encontra a 1 m do espelho e a meia altura deste (ver figura).

Calcule por quanto tempo o observador ainda vê a imagem do cilindro (total ou parcial), que permanece vertical durante a queda. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

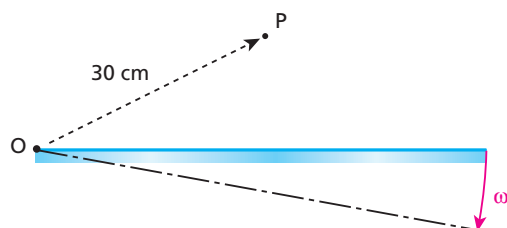
**78.** Na situação esquematizada, um espelho plano vertical **E**, instalado sobre um carrinho, realiza movimento harmônico simples (MHS) entre os pontos **A** e **A'** do solo plano e horizontal, com sua superfície refletora voltada para um garoto em repouso na posição **P**. A mola a que está ligado o carrinho tem massa desprezível e sua constante elástica é $K = 180$ N/m.

Sabendo que a massa do conjunto carrinho-espelho vale m = 20 kg e que $\pi \cong 3$, aponte a alternativa em que estão relacionados corretamente o período **T** de oscilação do sistema e a intensidade máxima **v** da velocidade da imagem do garoto, dada por **E**, em relação ao solo:

a) T = 1,0 s; v = 6,0 m/s.
b) T = 2,0 s; v = 12 m/s.
c) T = 2,0 s; v = 6,0 m/s.
d) T = 1,0 s; v = 12 m/s.
e) T = 1,5 s; v = 9,0 m/s.

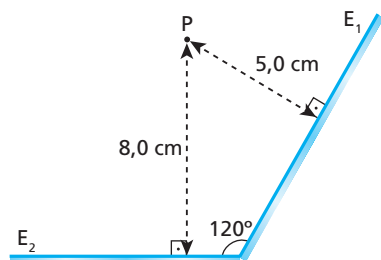
**79.** Na situação esquematizada abaixo, está representado um carrinho elétrico, controlado por controle remoto, que se movimenta em linha reta sobre o solo plano e horizontal. Esse carrinho está equipado com um espelho plano vertical, firmemente acoplado à sua caçamba, e se desloca com velocidade escalar constante igual a 50 cm/s. Ao observar sua imagem refletida no espelho, um assustado cãozinho põe-se a perseguir o carrinho, deslocando-se na mesma direção que o veículo com velocidade escalar constante igual a 150 cm/s.

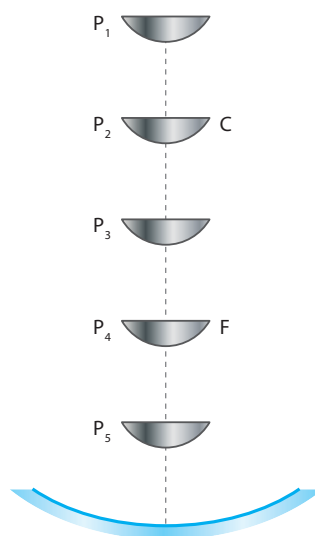
Francisco Vilachã

Qual é a velocidade escalar da imagem do cãozinho em relação ao solo?

**80.** Um objeto pontual **P** está diante da superfície refletora de um espelho plano, conforme a figura:

Se o espelho girar em torno do eixo **O** (perpendicular à página) com velocidade escalar angular $\omega$ = 5,0 rad/s, qual será a velocidade escalar linear da imagem de **P**?

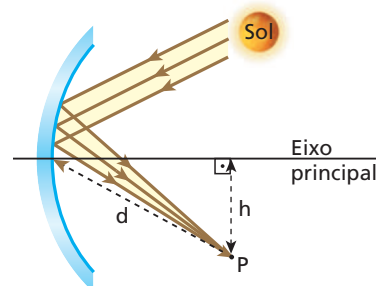
**81.** Considere dois espelhos planos $E_1$ e $E_2$, associados conforme representa a figura ao lado, com suas superfícies refletoras formando um ângulo de 120° entre si.

Se um objeto luminoso **P** for fixado diante dos dois espelhos, a 5,0 cm de $E_1$ e a 8,0 cm de $E_2$, conforme está ilustrado, pode-se afirmar que a distância entre as duas imagens de **P**, obtidas por simples reflexão da luz nos espelhos, será igual a:

a) 12,0 cm.
b) 14,0 cm.
c) 16,0 cm.
d) 18,0 cm.
e) 26,0 cm.

**82.** (Unifesp-SP) Os elevados custos da energia, aliados à conscientização da necessidade de reduzir o aquecimento global, fazem ressurgir antigos projetos, como é o caso do fogão solar. Utilizando as propriedades reflexivas de um espelho esférico côncavo, devidamente orientado para o Sol, é possível produzir aquecimento suficiente para cozinhar ou fritar alimentos. Suponha que um desses fogões seja constituído de um espelho esférico côncavo ideal e que, num dado momento, tenha seu eixo principal alinhado com o Sol.

Na figura, $P_1$ a $P_5$ representam cinco posições igualmente espaçadas sobre o eixo principal do espelho, nas quais uma pequena frigideira pode ser colocada. $P_2$ coincide com o centro de curvatura do espelho e $P_4$, com o foco. Considerando que o aquecimento em cada posição dependa exclusivamente da quantidade de raios de luz refletidos pelo espelho que atinja a frigideira, a ordem decrescente de temperatura que a frigideira pode atingir em cada posição é:

a) $P_4 > P_1 = P_3 = P_5 > P_2$
b) $P_4 > P_3 = P_5 > P_2 > P_1$
c) $P_2 > P_1 = P_3 = P_5 > P_4$
d) $P_5 = P_4 > P_3 = P_2 > P_1$
e) $P_5 > P_4 > P_3 > P_2 > P_1$

**83.** No século III a.C., Arquimedes teria liderado guerreiros da Sicília – na época pertencente à Magna Grécia – na defesa da cidade de Siracusa, vítima constante de ataques marítimos de frotas romanas. Conta-se que ele instalava na região costeira da ilha espelhos ustórios (ou incendiários), que consistiam em enormes calotas esféricas, polidas na parte interna (côncava), que "concentravam" os raios solares, produzindo fogo nas galeras inimigas.

O esquema ao lado representa um desses espelhos, em operação de acordo com as condições de Gauss, e a trajetória seguida pela luz até um ponto fatal **P**, de alta concentração energética.

Supondo-se conhecidos os comprimentos **d** e **h**, o raio de curvatura do espelho fica determinado por:

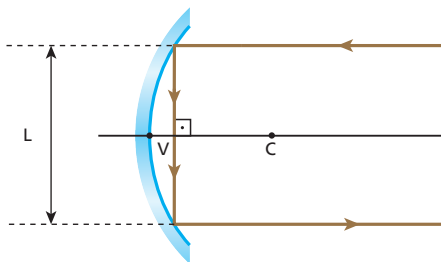
a) $(d^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$

b) $2(d^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$

c) $(d^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$

d) $2(d^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$

e) $(h^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}$

**84.** A figura representa um espelho esférico côncavo de centro de curvatura **C** e vértice **V**. Um raio de luz, ao incidir paralelamente ao eixo $\overleftrightarrow{CV}$, reflete-se duas vezes, deixando o espelho também paralelamente ao eixo $\overleftrightarrow{CV}$.

Sabendo que o raio de curvatura do espelho vale $\sqrt{2}$ m, calcule o comprimento **L**.

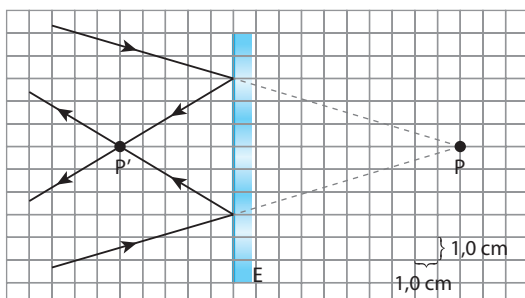
**85.** (Cesgranrio-RJ) A distância mínima entre seu olho e um determinado objeto, para que você o veja nitidamente, é de 24 cm. Tendo um espelho côncavo de distância focal igual a 16 cm, e querendo se olhar nele, a que distância mínima do espelho deverá ficar seu olho para que você o veja ampliado?

**86.**

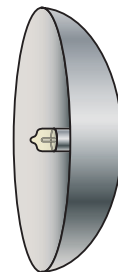
*Espelhos, mitos e histórias*

*Na mitologia grega, encontramos a figura de Narciso, que foi condenado pela deusa da vingança, Némesis, a apaixonar-se pela própria imagem refletida nas águas tranquilas de um lago (espelho plano), permanecendo obsessivo a admirar-se até a completa inaninação e a consequente morte.*

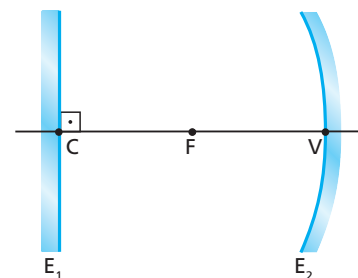
*Já por volta do século III a.C., Arquimedes teria utilizado a luz solar refletida em grandes espelhos esféricos para incendiar embarcações romanas que tentavam aportar em Siracusa, Magna Grécia, numa tentativa de tomar a cidade.*

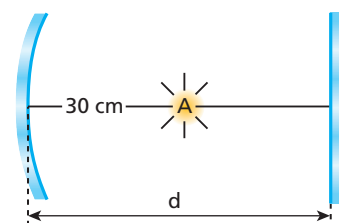
No esquema seguinte, **E** representa um espelho esférico que obedece às condições de aproximação de Gauss:

Considerando-se os elementos do esquema, podemos afirmar que
a) o espelho é côncavo e sua distância focal tem módulo 10,0 cm.
b) o espelho é côncavo e sua distância focal tem módulo 7,5 cm.
c) o espelho é côncavo e sua distância focal tem módulo 5,0 cm.
d) o espelho é convexo e sua distância focal tem módulo 10,0 cm.
e) o espelho é convexo e sua distância focal tem módulo 5,0 cm.

**87.** (FGV-SP) Ao estacionar seu carro, o motorista percebeu a projeção da imagem da pequena lâmpada acesa de um dos faroletes, ampliada em 5 vezes, sobre a parede vertical adiante do carro. Em princípio, o farolete deveria projetar raios de luz paralelos, já que se tratava de um farol de longo alcance.

Percebeu, então, que o conjunto lâmpada-soquete tinha se deslocado da posição original, que mantinha a lâmpada a 10,0 cm da superfície espelhada do espelho esférico côncavo existente no farol. Considerando que o foco ocupa uma posição adiante do vértice do espelho, sobre o eixo principal, é possível concluir que, agora, a lâmpada se encontra a

a) 2,0 cm atrás do foco.
b) 1,0 cm atrás do foco.
c) 0,5 cm atrás do foco.
d) 0,5 cm adiante do foco.
e) 2,0 cm adiante do foco.

**88.** No esquema a seguir, $E_1$ é um espelho plano e $E_2$ é um espelho esférico côncavo de raio de curvatura R = 60 cm.

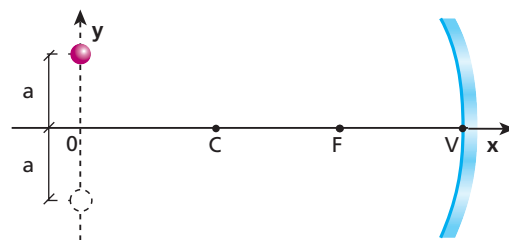
**C**, **F** e **V** são, respectivamente, em relação a $E_2$, o centro de curvatura, o foco e o vértice. Em **F**, é colocada uma fonte pontual de luz. Determine a distância da fonte à sua imagem, considerando que a luz sofre dupla reflexão, primeiro em $E_1$ e posteriormente em $E_2$.

**89.** (ITA-SP) Um espelho plano está colocado em frente de um espelho côncavo, perpendicularmente ao eixo principal. Uma fonte luminosa pontual **A**, colocada sobre o eixo principal entre os dois espelhos, emite raios que se refletem sucessivamente nos dois espelhos e formam, sobre a própria fonte **A**, uma imagem real desta. O raio de curvatura do espelho é 40 cm e a distância do centro da fonte **A** até o vértice do espelho esférico é de 30 cm. A distância **d** do espelho plano até o vértice do espelho côncavo é, então:

a) 20 cm.
b) 30 cm.
c) 40 cm.
d) 45 cm.
e) 50 cm.

**90.** Um espelho convexo cuja distância focal tem módulo igual a 10 cm está situado a 20 cm de um espelho côncavo de distância focal 20 cm. Os espelhos estão montados coaxialmente e as superfícies refletoras se defrontam. Coloca-se um objeto luminoso no ponto

médio do segmento que une os vértices dos dois espelhos. Localize a imagem fornecida pelo espelho convexo ao receber os raios luminosos que partem do objeto e são refletidos pelo espelho côncavo.

**91.** Uma partícula pontual realiza, na vertical, um movimento harmônico simples (MHS) cuja elongação **y** é dada em função do tempo **t** por:

$$y = a \cos (\omega t)$$

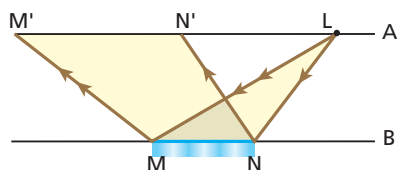
O plano de oscilação da partícula é perpendicular ao eixo principal (eixo **Ox**) de um espelho esférico côncavo gaussiano e está a uma distância do vértice igual a três vezes a distância focal do espelho.

Determine:

a) a frequência angular de oscilação da imagem da partícula.

b) a amplitude de oscilação da imagem.

c) a diferença de fase $\Delta\phi$ entre o movimento de oscilação da partícula e o da sua imagem.

## Para raciocinar um pouco mais

**92.** Considere um corredor delimitado por duas paredes planas, verticais e paralelas entre si. Numa das paredes (**A**) está incrustada uma lâmpada puntiforme (**L**) acesa. Na outra parede (**B**) está fixado um espelho plano (MN), que reflete luz proveniente de **L**, iluminando a região M'N' da parede **A**.

Admitindo-se que a parede **A** passe a se aproximar da parede **B** com velocidade constante de módulo **V**, permanecendo, porém, paralela a **B**, pode-se afirmar que a velocidade de **M'** em relação a **N'** terá:

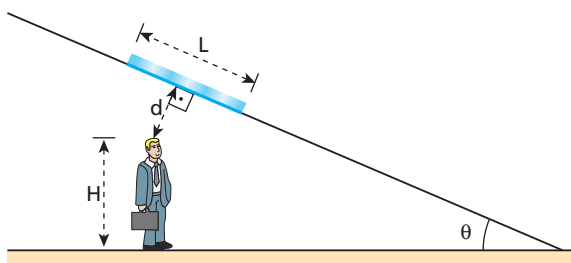
a) módulo nulo.

b) módulo V/2.

c) módulo V.

d) módulo 2V.

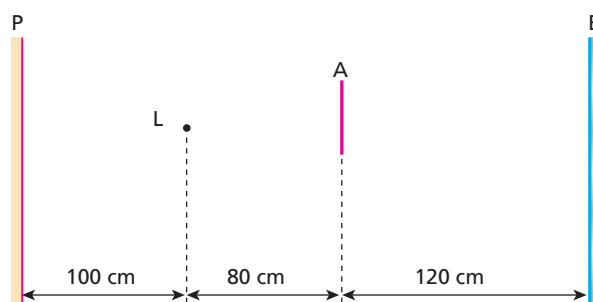
e) um outro valor.

**93.** (Olimpíada Brasileira de Física – mod.) A figura a seguir ilustra uma pessoa de altura **H** posicionada diante de um espelho plano fixado em uma parede inclinada de um ângulo **θ** em relação ao solo.

Supondo-se conhecida a distância **d** entre o topo da cabeça da pessoa e o espelho e desprezando-se a distância entre seus olhos e o topo de sua cabeça, pede-se determinar:

a) o comprimento mínimo **L** do espelho para que a pessoa possa se ver de corpo inteiro.

b) o valor de **L** para o caso particular em que $\theta = 90°$.

c) a distância **Y** entre a borda inferior do espelho e o solo na situação do item **b**.

**94.** No esquema, **P** é uma parede vertical de cor clara, **L** é uma lâmpada pontual capaz de emitir luz branca exclusivamente para a direita, **A** é um anteparo quadrado, opaco e fixo, com lado de comprimento igual a 40 cm, e **E** é um espelho plano também fixo. Admita que **P** e **E** tenham grandes dimensões e que **A** e **E** sejam paralelos a **P**.

Se a partir de determinado instante **L** começar a se movimentar verticalmente para baixo, poderá ser observada em **P**:

a) uma área quadrada de sombra, com lado de comprimento crescente a partir de 2,0 m, movimentando-se para cima.

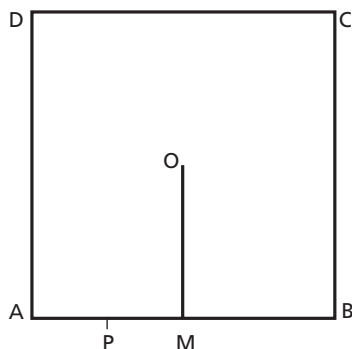
b) uma área quadrada de sombra, com lado de comprimento constante igual a 2,5 m, movimentando-se para baixo.

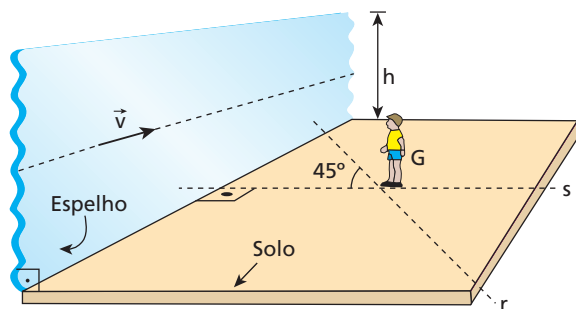
c) uma área quadrada de sombra, com lado de comprimento constante igual a 2,5 m, movimentando-se para cima.

d) uma área quadrada de sombra, com lado de comprimento crescente a partir de 2,0 m, movimentando-se para baixo.

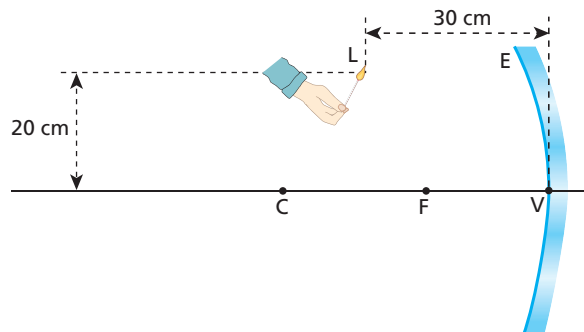
e) uma área de sombra, a princípio quadrada e depois retangular, movimentando-se para cima.

**95.** A figura a seguir mostra a planta baixa de uma sala quadrada ABCD, de lado 12,0 m, com uma parede de comprimento 6,0 m, que vai do ponto **M** (médio de AB) até o ponto **O** (centro geométrico da sala). Um espelho plano será fixado na parede DC, cobrindo do solo até o teto, de modo que uma pessoa situada no

ponto **P** (médio de AM) consiga enxergar por reflexão a maior extensão possível da parede MB.

A largura mínima do espelho que satisfaz essa condição é:
a) 2,5 m.
b) 3,0 m.
c) 4,5 m.
d) 6,0 m.
e) 7,5 m.

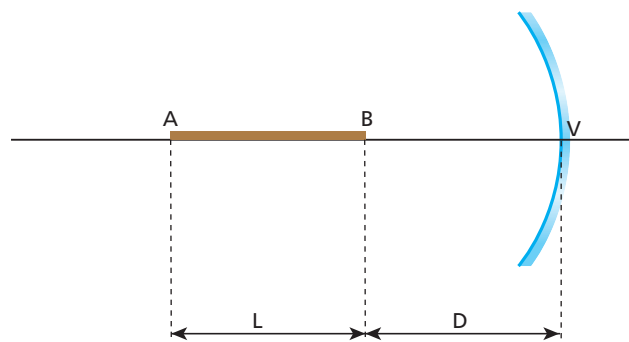
**96.** Considere um espelho plano retangular, disposto perpendicularmente ao solo, considerado plano e horizontal. O espelho tem altura **h** desprezível em comparação com o comprimento de sua base. Admita que esse espelho esteja em movimento na direção do seu eixo longitudinal, com velocidade $\vec{v}$ de módulo 1,0 m/s, conforme ilustra o esquema a seguir, que também mostra um garoto **G** que pode caminhar sobre o solo.

a) Supondo **G** em repouso em relação ao solo, qual o módulo da velocidade da imagem de **G** em relação ao espelho?
b) Supondo que **G** se aproxime do espelho, percorrendo a reta **r** coplanar à reta **s** com velocidade de módulo $4{,}0\sqrt{2}$ m/s em relação ao solo, qual o módulo da velocidade da imagem de **G** em relação ao espelho?

**97.** Embora menos utilizados que os espelhos planos, os espelhos esféricos são empregados em finalidades específicas, como em sistemas de iluminação e telescópios, no caso dos espelhos côncavos, e retrovisão, no caso dos espelhos convexos.
Na situação esquematizada, **E** é um espelho esférico côncavo que opera de acordo com as condições de estigmatismo de Gauss. **C** é o centro de curvatura, **F** é o foco principal e **V** é o vértice do espelho.
Uma chama de dimensões desprezíveis, **L**, é colocada diante da superfície refletora de **E**, distante 30 cm do espelho e a uma altura de 20 cm em relação ao eixo principal, conforme indicado na figura.

Sendo R = 45 cm o raio de curvatura do espelho, pode-se concluir que a distância entre **L** e sua respectiva imagem é:

a) 60 cm. b) 70 cm. c) 80 cm. d) 90 cm. e) 100 cm.

**98.** Dois espelhos $E_1$ e $E_2$ são alinhados de modo que tenham eixo óptico comum e permaneçam com suas faces refletoras voltadas entre si, separadas por 32 cm. Um objeto pontual é colocado sobre o eixo do sistema, a meia distância entre os dois espelhos. Observa-se, então, que a imagem final desse objeto, após múltiplas reflexões da luz, situa-se também sempre a meia distância entre os dois espelhos. O espelho $E_1$ é esférico côncavo e tem raio de curvatura igual a 24 cm.
a) Determine a posição da imagem do objeto formada apenas pelo espelho $E_1$.
b) Identifique o tipo do espelho $E_2$.

**99.** Um automóvel cujo velocímetro não funciona está se deslocando em movimento uniforme ao longo de uma avenida retilínea em que a velocidade máxima permitida é de 50 km/h. Esse veículo possui um espelho retrovisor esférico (convexo) de raio de curvatura igual a 2,0 m. Ao passar diante de uma estaca vertical de altura 1,8 m, o motorista põe em marcha um cronômetro, verificando que transcorreram 14 s desde o instante em que foi acionado o instrumento até o instante em que a altura da imagem da estaca dada pelo espelho é de 10 mm. Considerando válidas as condições de Gauss no funcionamento do espelho retrovisor, determine se o automóvel trafega ou não dentro do limite de velocidade da avenida.

**100.** (Olimpíada Brasileira de Física – mod.) Uma haste retilínea AB de comprimento **L** é colocada diante da superfície refletora de um espelho esférico côncavo **E**, que obedece às condições de Gauss, sobre o eixo principal do espelho, conforme representa a figura.

A distância focal do espelho é igual a **f** e a extremidade **B** da haste encontra-se a uma distância **D** (D > f) do vértice **V**.
a) Calcule em função de **f**, **L** e **D** o comprimento **C** da imagem da haste produzida por **E**.
b) Determine a relação entre **L** e **f** para o caso particular de a imagem de **B** se formar sobre esse mesmo ponto, com $C = \frac{L}{2}$.

# Tópico 3

# Refração da luz

## Bloco 1

### 1. Introdução

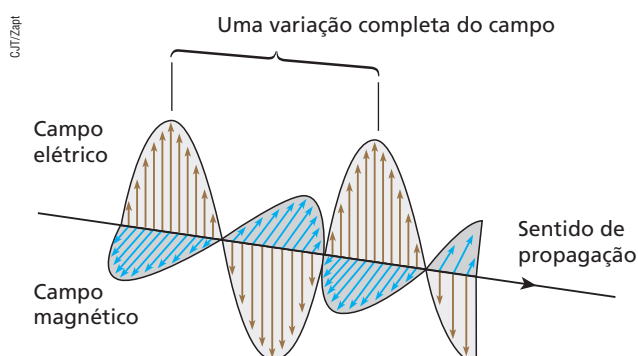
O assunto deste Tópico, além de possibilitar o entendimento de muitos fenômenos comuns no nosso dia a dia – como a aparente profundidade menor de uma piscina, as miragens nas rodovias em dias quentes e o arco-íris –, é a base para a fabricação de muitos instrumentos ópticos extremamente úteis, como lunetas, microscópios, câmeras fotográficas, óculos, binóculos e projetores de imagens.

Sérgio Dotta Jr./The Next

A profundidade desta piscina é maior do que parece. É a refração da luz que dá ideia de profundidade menor.

### 2. Conceitos iniciais

Veremos agora, para a luz, alguns conceitos básicos já estudados em Ondulatória.

CJT/Zapt

Sendo uma onda eletromagnética, a luz consiste na propagação de dois campos variáveis periodicamente: um elétrico (representado na figura por vetores verticais) e outro magnético (representado na figura por vetores horizontais). Esses campos serão estudados no Volume 3.

**Nota:**

- Como veremos no Volume 3, há fenômenos em que o comportamento da luz é corpuscular em vez de ondulatório.

O número de variações completas dos campos por unidade de tempo é a **frequência** (**f**) da luz considerada. No SI, a unidade de medida de frequência é o **hertz** (Hz): 1 Hz significa uma variação completa por segundo. Assim, se a frequência de determinada luz é de $5 \cdot 10^{14}$ Hz, entendemos que seus campos executam $5 \cdot 10^{14}$ variações completas por segundo.

O intervalo de tempo para que ocorra uma única variação completa dos campos é o **período** (**T**) da luz. Vale a relação:

$$f = \frac{1}{T}$$

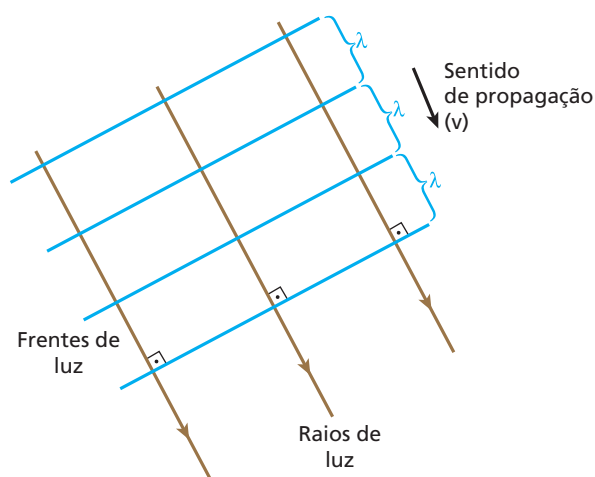
A distância percorrida pela luz durante 1 período chama-se **comprimento de onda da luz** (**λ**). Assim, se o comprimento de onda de determinada luz é de $6 \cdot 10^{-7}$ m, por exemplo, entendemos que ela avança $6 \cdot 10^{-7}$ m enquanto seus campos executam uma variação completa.

A **velocidade** de propagação da luz (**v**) é dada por:

$$v = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{intervalo de tempo}}$$

Se o intervalo de tempo for de 1 período (**T**), a distância percorrida será igual a 1 comprimento de onda (**λ**). Assim, temos:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow v = \lambda f$$

Costumamos representar a propagação da luz por frentes de luz separadas de um comprimento de onda. A figura abaixo mostra frentes planas de determinada luz, que avança no sentido indicado pela seta, com velocidade **v**. Observe que os raios de luz são perpendiculares às frentes de luz.

## 3. Cor e frequência

No intervalo do espectro eletromagnético correspondente à luz visível, cada frequência determina a sensação de uma cor. Assim, quando nossos órgãos visuais são excitados por ondas eletromagnéticas de frequência igual a $4 \cdot 10^{14}$ Hz, por exemplo, percebemos a cor vermelha. Frequências cada vez maiores que esse valor nos fazem perceber o alaranjado, o amarelo, o verde, o azul, o anil e o violeta, além de tonalidades intermediárias.

A luz vermelha corresponde à luz visível de mais baixa frequência (cerca de $4 \cdot 10^{14}$ Hz), enquanto a luz violeta corresponde à luz visível de mais elevada frequência (cerca de $8 \cdot 10^{14}$ Hz).

Quando recebemos mais de uma dessas frequências simultaneamente, temos sensações de cores diferentes de cada uma delas. Se recebermos simultaneamente as luzes verde, vermelha e azul, podemos ter a sensação da cor branca. A "luz branca" solar, por exemplo, contém todas as cores, desde a vermelha até a violeta.

Não existe **uma** onda eletromagnética cuja frequência cause a sensação do branco. Essa sensação resulta de várias sensações simultâneas de cores diferentes. O preto, por sua vez, corresponde à ausência (total ou quase total) de ondas eletromagnéticas visíveis.

## 4. Luz monocromática e luz policromática

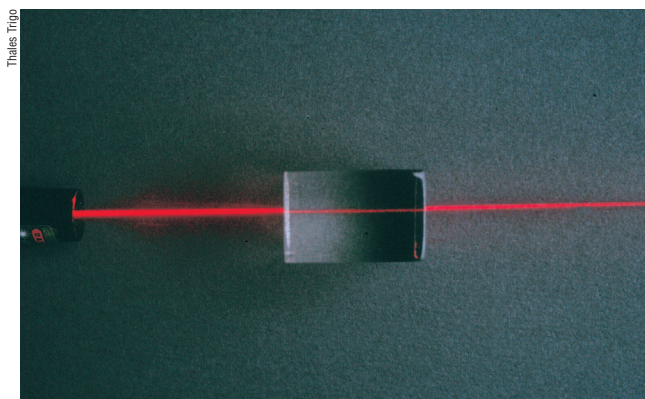
Uma luz é denominada **monocromática** quando é constituída de ondas eletromagnéticas de uma única frequência, ou seja, de uma única cor. Assim, podemos ter luz monocromática vermelha, azul e violeta, dentre outras.

As fontes de luz em geral não emitem luz monocromática. Podemos, no entanto, obter luz sensivelmente monocromática se fizermos com que a luz das fontes comuns atravesse filtros que só permitam a passagem de luz de uma determinada cor. Podemos pensar, por exemplo, em uma lâmina vermelha transparente de vidro que só permite a passagem da luz vermelha. As fontes de raio *laser* são exemplos de fontes de luz aproximadamente monocromática.

### Três cores que valem por muitas

SPL/Latinstock

Um exemplo interessante de composição de cores é o televisor em cores. Na tela desse aparelho, operando no antigo sistema de tubo de imagem, existem substâncias que, quando excitadas por bombardeamento de elétrons, emitem luz vermelha, azul ou verde. Dependendo da intensidade de cada uma dessas três luzes, podemos ter a sensação das mais diversas cores, inclusive a branca. A fotografia mostra a ampliação de uma pequena região da tela de um televisor ligado.

Thales Trigo

A luz emitida por uma fonte de raio *laser* é aproximadamente monocromática.

Ao contrário do que se observa com a luz monocromática, uma luz é denominada **policromática** quando é constituída de ondas eletromagnéticas de várias frequências distintas, ou seja, de várias cores. É o caso da luz emitida pelos faróis de um automóvel, pelas lâmpadas que iluminam nossas casas ou pelo Sol. A "luz branca" solar costuma ser descrita por meio de sete cores componentes:

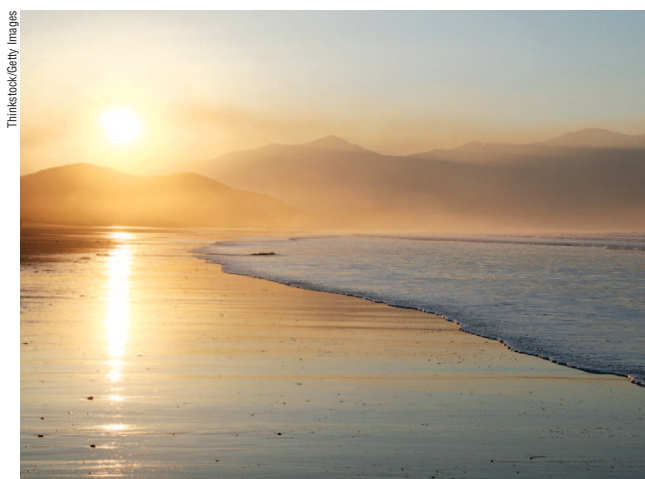
"Luz branca" solar:
- vermelho → menor frequência
- alaranjado
- amarelo
- verde
- azul
- anil
- violeta → maior frequência

Vale ressaltar, no entanto, que há uma infinidade de cores intermediárias entre elas.

O arco-íris e a coloração observada nas bolhas de água e sabão e nas manchas de óleo derramado nas estradas são algumas evidências de que a luz solar é policromática.

Thinkstock/Getty Images

A luz solar é policromática.

Thinkstock/Getty Images

Fotografia de CD observado à luz do dia.
A irisação, isto é, o aparecimento de várias cores, acontece porque a luz solar é policromática.

## 5. Cor e velocidade da luz

Para simplificar nosso estudo, sempre que nos referirmos ao módulo da velocidade da luz diremos simplesmente **velocidade da luz**.

Quando a luz se propaga no **vácuo**, a velocidade de propagação é exatamente a mesma, qualquer que seja a cor, isto é, qualquer que seja a sua frequência. Assim, a luz amarela, a luz vermelha, a luz violeta, dentre outras, propagam-se no vácuo com a mesma velocidade, cujo valor simbolizamos por **c**:

$$c = 3{,}00 \cdot 10^5 \text{ km/s} \quad \text{(valor arredondado usual)}$$

O que afirmamos estende-se, evidentemente, a todas as outras ondas eletromagnéticas não visíveis, como o infravermelho, o ultravioleta, os raios X, os raios $\gamma$ etc., que também se propagam no vácuo com velocidade **c**.

Sendo **f** a frequência de determinada luz e $\boldsymbol{\lambda}$ o seu comprimento de onda, temos, no vácuo:

$$c = \lambda f$$

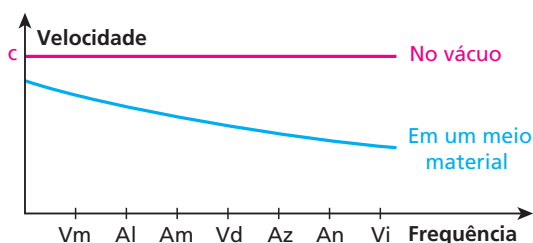
Assim, quanto maior é a frequência, menor é o comprimento de onda, uma vez que **c** é constante.

Concluímos, então, que, na luz visível, à luz vermelha corresponde o maior comprimento de onda (menor frequência), enquanto à luz violeta corresponde o menor comprimento de onda (maior frequência).

Quando a propagação da luz se dá num **meio material**, os resultados são bem diferentes, em virtude da interação da luz com a matéria. Em primeiro lugar, a velocidade de propagação **v** de qualquer luz na matéria é menor que **c**. Em segundo lugar, essa

velocidade **v** é tanto menor quanto maior a frequência. Assim, quando a luz branca solar se propaga na água, por exemplo, todas as cores componentes têm velocidade menor que **c**. Além disso, a vermelha é a mais veloz e a violeta é a mais lenta. Evidentemente, o comprimento de onda da luz violeta é, agora, com mais razão ainda, o menor de todos, uma vez que continua válida a expressão $v = \lambda f$.

A seguir, esboçamos graficamente a velocidade de propagação da luz em função da frequência, no vácuo e nos meios materiais, sem escala e segundo o código abaixo:

Vm: vermelho
Al: alaranjado
Am: amarelo
Vd: verde
Az: azul
An: anil
Vi: violeta

## 6. Índice de refração

### Índice de refração absoluto

Uma grandeza de destaque no estudo da luz, relacionada à sua velocidade de propagação, é o índice de refração.

Considere uma dada radiação monocromática, que se propaga no vácuo com velocidade **c** e num determinado meio com velocidade **v**. Por definição, o **índice de refração absoluto** (densidade óptica ou, simplesmente, índice de refração) desse meio para a radiação monocromática considerada é a grandeza adimensional **n**, definida por:

$$n = \frac{c}{v}$$

Observe que, se o meio considerado for o próprio vácuo, teremos $v = c$ e $n = \frac{c}{c} = 1$. Assim, o índice de refração absoluto do vácuo é igual a 1. Num meio material, porém, temos sempre $v < c$. Consequentemente, o índice de refração de um meio material é sempre maior que 1.

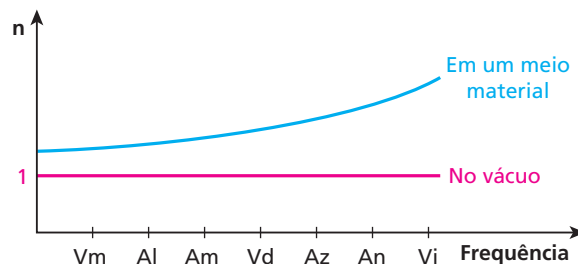
É importante notar que o índice de refração absoluto de um meio é inversamente proporcional à velocidade de propagação da luz no meio e nunca é inferior a 1:

**No vácuo:** $n = 1$
**Nos meios materiais:** $n > 1$

**Notas:**

- Quanto maior é a densidade de uma **mesma** substância, maior é o seu índice de refração.
  A pressão e a temperatura influem no índice de refração dos materiais porque influem em suas densidades.
- Embora o índice de refração do ar seja ligeiramente maior que 1 e dependa da frequência da luz, nós o admitiremos sempre igual a 1 nos exercícios, a menos que o fenômeno estudado exija uma consideração mais real. Isso equivale a adotar para a velocidade da luz no ar o mesmo valor **c** da velocidade da luz no vácuo.

### Influência da frequência da luz no índice de refração

O índice de refração do vácuo é igual a 1, qualquer que seja a luz considerada. O índice de refração de um meio material, por sua vez, mantidas as condições físicas, depende da frequência da luz considerada. Como a velocidade da luz num meio material diminui com o aumento da frequência (ver representação gráfica no item anterior), concluímos que o índice de refração aumenta quando a frequência aumenta:

A tabela a seguir mostra os valores do índice de refração do vidro "*crown* leve" para algumas cores:

| Cor | n |
|---|---|
| Vermelha | 1,513 |
| Alaranjada | 1,514 |
| Amarela | 1,517 |
| Verde | 1,519 |
| Azul | 1,528 |
| Violeta | 1,532 |

O quadro a seguir mostra os índices de refração absolutos de diversos materiais para a luz amarela emitida pelo sódio, quando, por exemplo, queimamos cloreto de sódio numa chama.

| Material | n |
|---|---|
| Ar seco (0 °C; 760 mm Hg) | 1,000292 |
| Gás carbônico (0 °C; 760 mm Hg) | 1,00045 |
| Gelo (−8 °C) | 1,310 |
| Água (20 °C) | 1,333 |
| Etanol (20 °C) | 1,362 |
| Tetracloreto de carbono | 1,466 |
| Glicerina | 1,470 |
| Monoclorobenzeno | 1,527 |
| Vidros | de 1,4 a 1,7 |
| Diamante | 2,417 |
| Sulfeto de antimônio | 2,7 |

## Índice de refração relativo

Considere dois meios transparentes, 1 e 2, cujos índices de refração absolutos para uma mesma luz monocromática valem, respectivamente, $n_1$ e $n_2$. O **índice de refração relativo** do meio 2 em relação ao meio 1, simbolizado por $n_{2,1}$, é definido por:

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como $n_2 = \frac{c}{v_2}$ e $n_1 = \frac{c}{v_1}$, temos:

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2}$$

Resumindo:

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

**Notas:**

- O índice de refração do meio 1 em relação ao meio 2 é dado por:

$$n_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

- Os índices de refração absolutos de dois meios e as velocidades de propagação da luz nesses meios são **inversamente proporcionais**.
- O índice de refração relativo pode ser maior que 1, menor que 1 ou igual a 1.

## Leitura

### Luz lenta

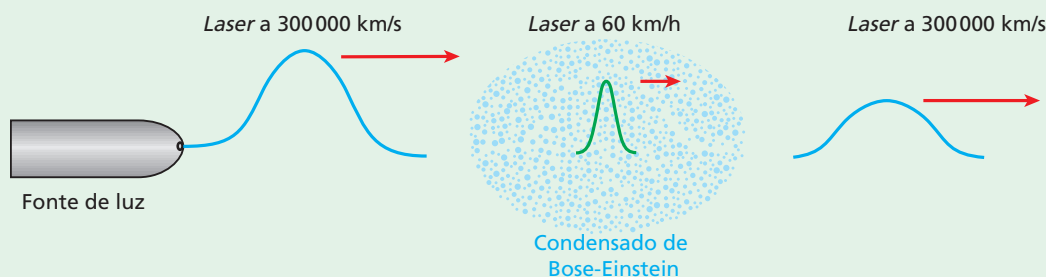
Como você sabe, a luz se propaga no vácuo e no ar com velocidade de aproximadamente 300 000 km/s. Você sabe também que, nos demais meios materiais, essa velocidade se reduz, mas ainda continua elevadíssima. No diamante, por exemplo, a luz se propaga a cerca de 125 000 km/s.

Entretanto, a revista *Nature* publicou em 1999 um resultado experimental fantástico.

Físicos do Rowland Institute for Science (Massachusetts) e da Universidade de Stanford (Califórnia) conseguiram que a luz, em determinado meio e em condições especiais, se propagasse a uma velocidade incrivelmente menor, de aproximadamente 60 km/h! (O entendimento desse experimento é impossível apenas com os conhecimentos adquiridos no Ensino Médio, já que requer conceitos sutis de Física Quântica.)

O meio material em que a luz se tornou tão lenta foi um "condensado de Bose-Einstein" – uma nuvem de átomos de sódio resfriados a temperaturas muito próximas do zero absoluto.

Uma fonte de luz emitia pulsos de *laser* de determinado comprimento de onda, que atravessavam esse condensado, propagando-se nele com velocidades da ordem de 60 km/h.

A figura a seguir é um esquema muito simplificado do experimento realizado:

## 7. Refringência e dioptro

### Refringência

O conceito de refringência é importante, sobretudo, para o estudo da refração da luz.

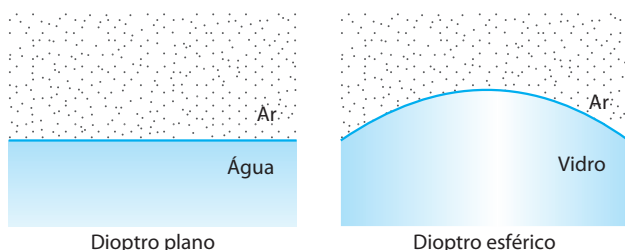
Dizemos que um meio é **mais refringente** que outro quando seu **índice de refração é maior** que o do outro. Assim, a água ($n \cong 1{,}3$) é mais refringente que o ar ($n \cong 1$) e menos refringente que o diamante ($n \cong 2{,}4$).

Em outras palavras, podemos dizer que um meio é mais refringente que outro quando a luz se propaga através dele com velocidade menor do que no outro.

### Dioptro

**Dioptro** é um sistema constituído por dois meios transparentes de diferentes refringências, que fazem entre si fronteira regular. Se a fronteira (superfície dióptrica) for plana, teremos o dioptro plano; se for esférica, teremos o dioptro esférico, e assim por diante.

Os sistemas ar/água e ar/vidro, por exemplo, são dioptros, desde que as fronteiras entre esses meios sejam regulares.

Dioptro plano    Dioptro esférico

## 8. Refração

### Definição e propriedades

**Refração da luz** é o fenômeno que consiste no fato de a luz ser transmitida de um meio para outro opticamente diferente.

Nessa passagem de um meio para outro, a velocidade (**v**) de propagação da luz necessariamente se altera.

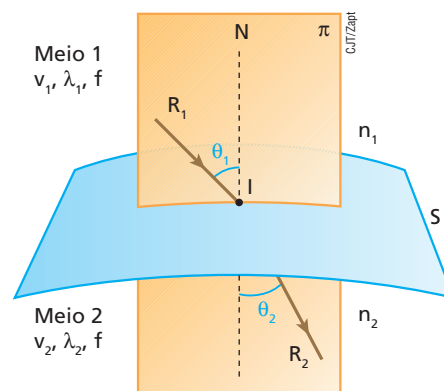
A frequência (**f**) não se altera na refração, fato que é observado não só com ondas luminosas, mas com qualquer tipo de onda.

O comprimento de onda se altera proporcionalmente à velocidade, pois $v = \lambda f$.

Como você verá, a alteração da velocidade de propagação provoca, em geral, um desvio da luz.

### Elementos geométricos

Observe, na figura a seguir, um raio de luz monocromática de frequência **f** passando do meio 1 para o meio 2. A superfície **S** é a fronteira entre os dois meios. No meio 1, a luz apresenta velocidade $v_1$ e comprimento de onda $\lambda_1$, enquanto no meio 2 a velocidade é $v_2$ e o comprimento de onda é $\lambda_2$. Os índices de refração absolutos dos meios 1 e 2 são $n_1$ e $n_2$ respectivamente.

A figura também representa todos os elementos geométricos envolvidos no estudo da refração.

Nessa figura:

- o raio $R_1$ é o raio incidente;
- o ponto **I** é o ponto de incidência;
- a reta **N**, perpendicular à superfície **S** passando por **I**, é a reta normal;
- o raio $R_2$ é o raio refratado;
- o ângulo $\theta_1$, determinado pelo raio incidente e pela reta normal, é o ângulo de incidência;
- o ângulo $\theta_2$, determinado pelo raio refratado e pela reta normal, é o ângulo de refração.

### Leis da refração

O fenômeno da refração é regido pelas duas leis seguintes:

**1ª Lei da Refração**

O raio incidente, o raio refratado e a reta normal traçada pelo ponto de incidência estão contidos no mesmo plano.

Essa lei está ilustrada na figura anterior, na qual $R_1$, $R_2$ e **N** estão contidos no mesmo plano $\boldsymbol{\pi}$.

**2ª Lei da Refração (Lei de Snell)**

Essa lei já foi apresentada e demonstrada na Ondulatória:

> A razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é constante para cada dioptro e para cada luz monocromática.

A Lei de Snell é expressa por:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{(I)}$$

Mas:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1 f}{\lambda_2 f} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \text{(II)}$$

E, como vimos: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$ (III)

Agrupando as expressões (I), (II) e (III), obtemos uma expressão completa da **Lei de Snell**:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

## 9. Análise do desvio do raio incidente

Da expressão completa da Lei de Snell, podemos extrair a seguinte igualdade:

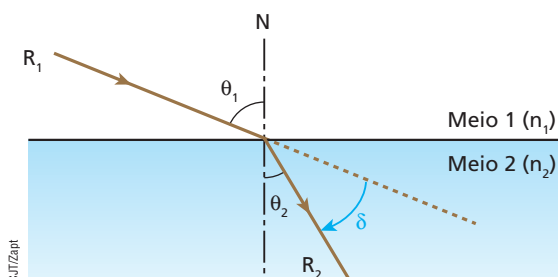
$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

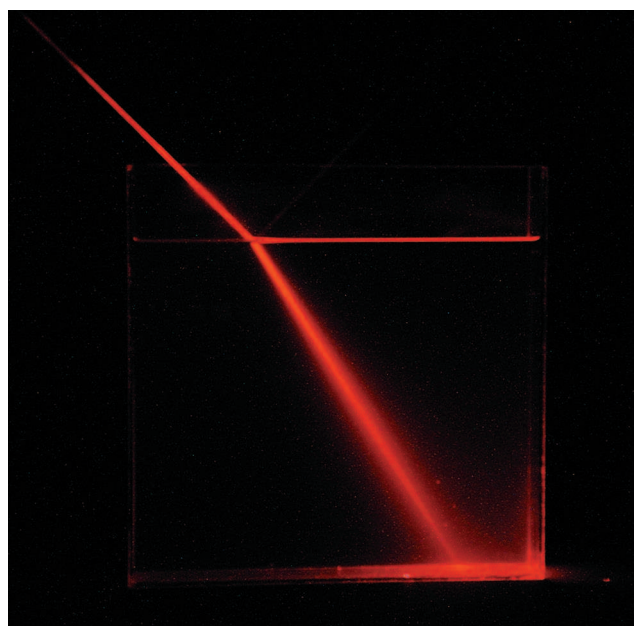
Vamos aplicar essa última expressão em alguns casos, sempre considerando a luz monocromática.

### Incidência oblíqua: luz propagando-se do meio menos refringente para o meio mais refringente ($n_2 > n_1$)

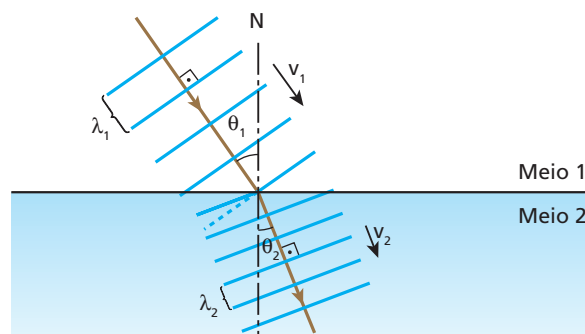
Considerando $n_2 > n_1$ na expressão $n_1$ sen $\theta_1$ = $n_2$ sen $\theta_2$, concluímos que sen $\theta_2$ < sen $\theta_1$. Então, como $\theta_1$ e $\theta_2$ são ângulos agudos, temos:

$$\theta_2 < \theta_1$$

A figura a seguir ilustra essa refração:

Podemos, então, concluir que:

> Quando um raio de luz incide obliquamente na fronteira de um dioptro, dirigindo-se do meio menos refringente para o mais refringente, ele **se aproxima da normal** ao refratar-se, experimentando um desvio $\delta$ ($\delta = \theta_1 - \theta_2$).

Na fotografia, um pincel cilíndrico de luz proveniente do ar incide obliquamente na fronteira entre o ar e a água. Ao se refratar, ele se aproxima da normal.

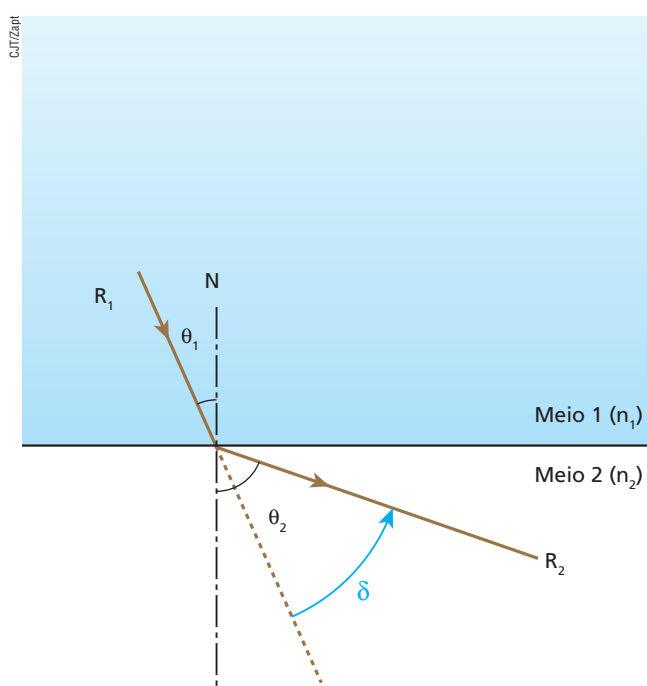
Isso pode ser entendido facilmente se lidarmos com as frentes de luz, que são perpendiculares aos raios de luz.

Uma frente de luz plana, por exemplo, quando passa do meio menos refringente para o mais refringente ($n_2 > n_1$), sofre uma redução de velocidade ($v_2 < v_1$). Quando uma parte da frente de luz penetra no meio 2, ela se atrasa em relação à parte que ainda se propaga no meio 1. Por causa disso, ocorre o desvio, como representa a figura:

Observe que $v_2 < v_1$ acarreta $\lambda_2 < \lambda_1$.

## Incidência oblíqua: luz propagando-se do meio mais refringente para o meio menos refringente ($n_2 < n_1$)

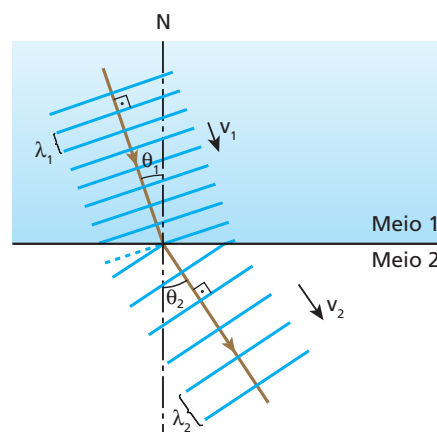
Considerando $n_2 < n_1$ na expressão $n_1$ sen $\theta_1$ = = $n_2$ sen $\theta_2$, concluímos que sen $\theta_2 >$ sen $\theta_1$. Então, como $\theta_1$ e $\theta_2$ são ângulos agudos, temos:

$$\theta_2 > \theta_1$$

A figura ilustra essa refração (que nem sempre ocorre, como veremos no item 10).

Concluímos que:

> Quando um raio de luz incide obliquamente na fronteira de um dioptro e passa do meio mais refringente para o menos refringente, ele **se afasta da normal** ao refratar-se, experimentando um desvio **$\delta$** ($\delta = \theta_2 - \theta_1$).

Quando uma frente de luz plana, por exemplo, passa do meio mais refringente para o meio menos refringente ($n_2 < n_1$), sua velocidade de propagação aumenta ($v_2 > v_1$). Por causa disso, quando uma parte da frente de luz penetra no meio 2, ela se adianta em relação à parte que ainda se propaga no meio 1.

Observe, na figura a seguir, como isso ocorre:

Observe que $v_2 > v_1$ acarreta $\lambda_2 > \lambda_1$.

## Incidência normal

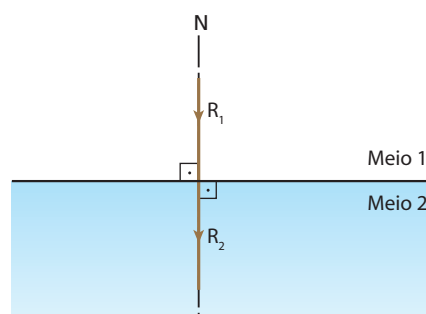
A incidência normal é a situação em que o raio de luz incide perpendicularmente à fronteira do dioptro, isto é, o raio incidente sobrepõe-se à reta normal. Assim, temos $\theta_1 = 0°$ e sen $\theta_1 = 0$.

Lembrando que $n_1$ sen $\theta_1 = n_2$ sen $\theta_2$, temos:

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{n_1 \text{ sen } \theta_1}{n_2} = \frac{n_1 \cdot 0}{n_2} = 0$$

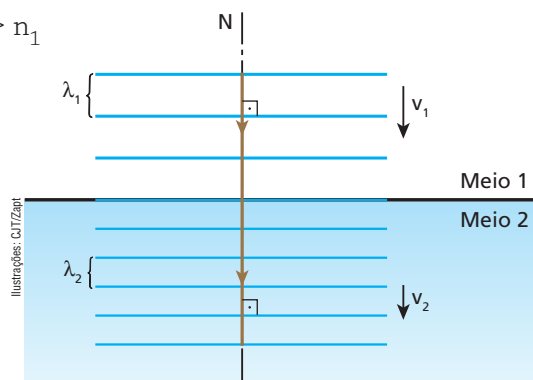
Então:

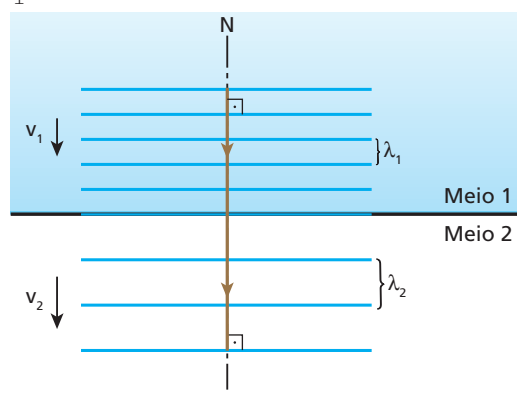
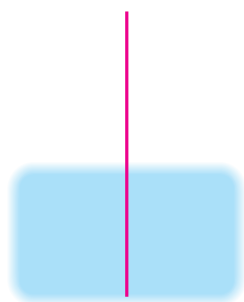
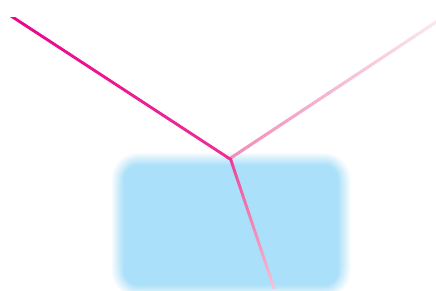
$$\theta_2 = 0$$

Consequentemente, o raio refratado continua perpendicular à fronteira do dioptro, ou seja, continua sobreposto à reta normal:

Concluímos que:

> Quando um raio de luz incide normalmente à fronteira do dioptro, a refração ocorre **sem desvio**.

As figuras seguintes ilustram o fenômeno por meio das frentes de luz. Observe que não ocorre mudança na direção de propagação da luz, porque as velocidades de todos os pontos da frente de luz alteram-se simultaneamente.

• $n_2 > n_1$

Observe que $n_2 > n_1$ acarreta $v_2 < v_1$ e $\lambda_2 < \lambda_1$.

• $n_2 < n_1$

Observe que $n_2 < n_1$ acarreta $v_2 > v_1$ e $\lambda_2 > \lambda_1$.

Representação da luz passando do ar para o vidro, numa refração sem desvio.

Representação da luz propagando-se no ar e incidindo em um bloco de vidro. Note que, além de refração, ocorre reflexão.

**Nota:**

- Em todo o estudo da refração feito até aqui, omitimos a ocorrência do fenômeno da reflexão. Agimos assim porque nossa intenção era dar ênfase a um novo fenômeno, a refração. Não devemos, contudo, esquecer que o fenômeno da refração nunca ocorre sozinho, uma vez que pelo menos uma parte da luz incidente na fronteira do dioptro certamente sofre reflexão.

## Leitura

### O homem invisível

Quando um bastão de vidro é mergulhado em água, a parte imersa continua bastante visível, quase tão visível quanto a parte que está fora da água. Entretanto, quando esse mesmo bastão é mergulhado em um líquido incolor denominado tetracloroetileno (ou em um outro chamado monoclorobenzeno), a parte imersa torna-se quase invisível.

Isso ocorre porque os índices de refração do vidro usado e do tetracloroetileno são aproximadamente iguais. Assim, há praticamente uma **continuidade óptica** na interface líquido-vidro. Ou seja, a luz praticamente não "percebe" mudança no meio de propagação quando passa do líquido para o vidro ou do vidro para o líquido.

Com isso, praticamente não ocorrem reflexões na fronteira líquido-vidro, nem desvios de raios de luz que atravessam o vidro. Consequentemente, fica difícil perceber a presença do vidro no interior do líquido.

O fato descrito lembra a ficção do homem invisível. Para que um ser humano pudesse tornar-se invisível, seu índice de refração deveria ficar igual ou aproximadamente igual ao do ar. Se isso acontecesse, porém, ele não poderia enxergar, pois é necessário que exista em seus olhos um material de índice de refração maior que o do ar, operando como uma lente para projetar em suas retinas as imagens do ambiente que o cerca. Além disso, para enxergar é preciso que os olhos absorvam luz. Consequentemente, haveria duas regiões escuras (sorvedouros de luz) que seria impossível não serem percebidas. Talvez você já tenha visto uns peixinhos que são quase transparentes, mas possuem duas regiões bem escuras: os olhos.

Cristina Xavier

# Faça você mesmo

## Determinação do índice de refração da água

Veja como determinar o índice de refração da água. Pegue uma tábua e um recipiente cilíndrico, como uma panela ou um canecão. A largura $\ell$ da tábua (ver figura) deve ser mais ou menos igual ao diâmetro interno do recipiente. Trace na tábua uma circunferência de 15 cm de diâmetro. Trace também dois diâmetros perpendiculares, AB e CD, como indicado na figura.

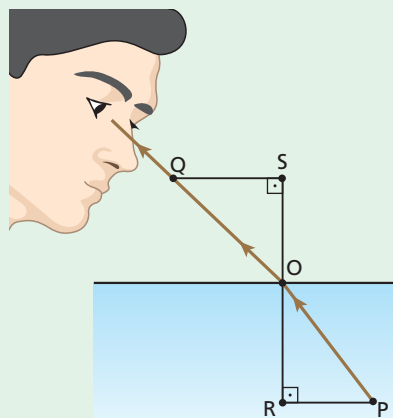
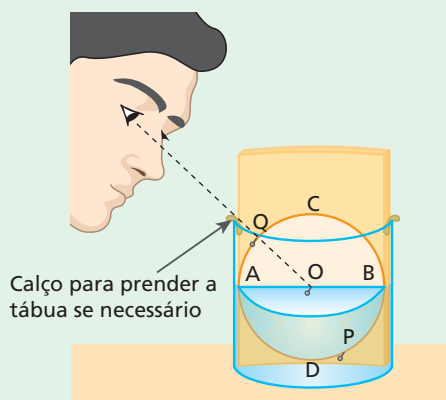
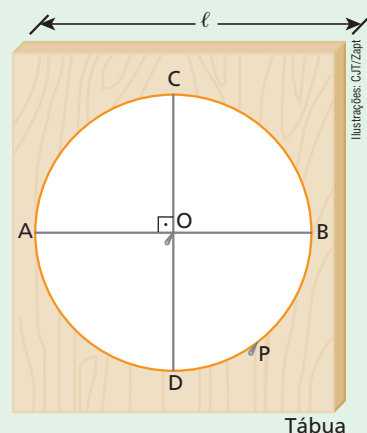
Tábua

Fixe um alfinete no centro **O**, procurando deixá-lo perpendicular à tábua. Repita essa operação no ponto **P** da circunferência (o ponto **P** não deve estar muito perto de **B** nem muito perto de **D**; procure seguir a figura).

Introduza a tábua no recipiente, dispondo-a verticalmente, com o diâmetro AB na horizontal (figura a seguir, à esquerda). Se necessário, use calços (como borracha, palito de fósforo etc.) para fixá-la nessa posição.

Em seguida, despeje água no recipiente até que o seu nível coincida com o diâmetro AB.

Agora, faça uma visada rente à tábua (figura abaixo, à direita), de modo a ver os dois alfinetes alinhados, e procure o ponto **Q** da circunferência, onde um terceiro alfinete fica no mesmo alinhamento. Você verá, então, os três alfinetes "alinhados".

Retire a tábua da água e observe que os alfinetes, na realidade, não estão alinhados. Eles pareciam alinhados porque o que você via era a imagem do alfinete colocado em **P**, e não propriamente o alfinete: a luz proveniente de **P** havia se desviado ao passar da água para o ar.

Para determinar o índice de refração da água, trace os segmentos QS e PR, como mostra a figura à direita, e meça seus comprimentos.

O índice de refração da água (**n**) será dado, então, por: $n = \frac{QS}{PR}$. (Demonstre essa expressão.)

Evidentemente, esse experimento permite a determinação dos índices de refração de outros líquidos. Entretanto, é também evidente que esse método, embora correto teoricamente, é bastante impreciso. Assim, os resultados obtidos podem desviar significativamente dos valores de índices de refração listados nos livros.

## Exercícios

nível 1

**1.** Numa folha de papel branco, está escrito "terra" com tinta vermelha e "prometida" com tinta verde. Tomam-se duas lâminas transparentes de vidro, uma vermelha e outra verde. Através de que lâmina deve-se olhar para o papel de modo que a palavra "terra" seja enxergada com bastante contraste?

**2.** Para a luz amarela emitida pelo sódio, os índices de refração de certo vidro e do diamante são iguais a 1,5 e 2,4, respectivamente. Sendo a velocidade da luz no ar de 300 000 km/s, calcule, para a luz amarela citada:
a) sua velocidade no vidro.
b) sua velocidade no diamante.
c) o índice de refração do diamante em relação ao vidro.

**3.** Determinada luz monocromática percorre um segmento de reta de comprimento 30 cm no interior de um bloco maciço de um cristal durante $2{,}0 \cdot 10^{-9}$ s. Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é igual a $3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s, calcule o índice de refração desse cristal.

**4. E.R.** Um raio de luz monocromática propaga-se no ar (meio 1) e atinge a superfície plana da água (meio 2) sob ângulo de incidência $\theta_1$ igual a 45°. Admitindo que o índice de refração da água vale $\sqrt{2}$ para aquela luz, determine:
a) o ângulo de refração.
b) o desvio experimentado pelo raio ao se refratar.
c) uma figura em que estejam representados o raio incidente, o raio refletido e o raio refratado.

**Resolução:**

a) Pela Lei de Snell, temos:

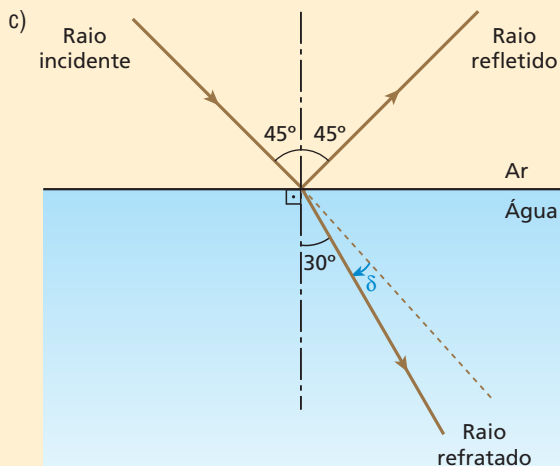
$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

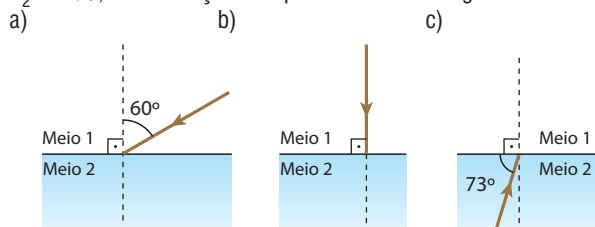
Sendo $n_1 = 1$, $n_2 = \sqrt{2}$, $\text{sen } \theta_1 = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \text{sen } \theta_2 \Rightarrow \text{sen } \theta_2 = \frac{1}{2}$$

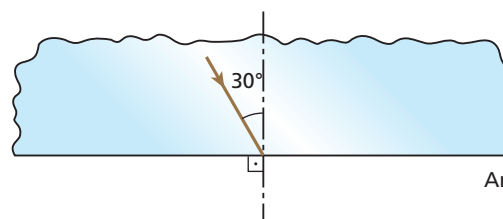
Então: $\boxed{\theta_2 = 30°}$

b) O desvio experimentado pelo raio ao se refratar é:

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 \Rightarrow \delta = 45° - 30° \Rightarrow \boxed{\delta = 15°}$$

c)

**5.** Um raio de luz monocromática incide na fronteira entre dois meios transparentes 1 e 2, de índices de refração $n_1 = 1$ e $n_2 = \sqrt{3}$, nas situações esquematizadas a seguir:

Em cada situação, calcule o ângulo de refração.

**Dado:** $\text{sen } 17° \cong \frac{\sqrt{3}}{6}$

**6.** Na figura a seguir, um pincel cilíndrico de luz monocromática propaga-se em um bloco sólido transparente e incide na fronteira plana entre o bloco e o ar, sob ângulo de incidência igual a 30°. Sabendo que o índice de refração do bloco para a radiação considerada vale $\sqrt{3}$, determine:
a) o ângulo de refração.
b) o desvio experimentado pela luz ao se refratar.
c) a representação esquemática dos raios incidente, refletido e refratado.

**7.** Julgue falsa ou verdadeira cada uma das afirmações a seguir.
(01) Numa noite enluarada, os animais que habitam o interior de um lago de águas calmas podem enxergar a Lua. Uma pessoa, à beira do lago, quando olha para a superfície da água, também pode ver a Lua. Podemos então concluir que a luz proveniente da Lua, ao incidir na água, não somente se refrata, mas também se reflete parcialmente.
(02) Refração da luz é o desvio da luz ao atravessar a fronteira entre dois meios transparentes.
(04) Refração da luz é a passagem da luz de um meio transparente para outro, ocorrendo sempre uma alteração de sua velocidade de propagação.
(08) Na refração da luz, o raio refratado pode não apresentar desvio em relação ao raio incidente.
(16) A cor da luz (frequência) não se altera na refração.
(32) Quando um raio incidente oblíquo passa do meio menos refringente para o mais refringente, ele se aproxima da normal.
(64) Quando um raio incidente oblíquo passa do meio mais refringente para o menos refringente, ele se afasta da normal.
Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações verdadeiras.

**8.** Um feixe cilíndrico de luz incide perpendicularmente na superfície plana de separação de dois meios ordinários opticamente diferentes. Pode-se afirmar que:
a) o feixe refrata-se, desviando-se fortemente.
b) o feixe não sofre refração.
c) o feixe não sofre reflexão.
d) ocorre reflexão, com a consequente alteração do módulo da velocidade de propagação.
e) ocorre refração, com a consequente alteração do módulo da velocidade de propagação.

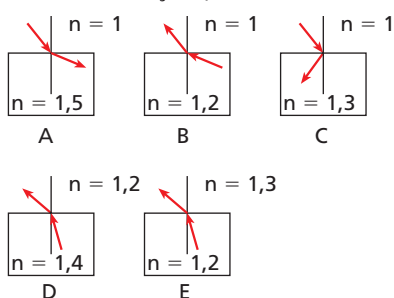
**9.** Quando um raio de luz passa de um meio mais refringente para outro menos refringente:
a) afasta-se da normal.
b) aproxima-se da normal.
c) a frequência da luz aumenta.
d) não ocorre desvio.
e) a velocidade de propagação da luz aumenta.

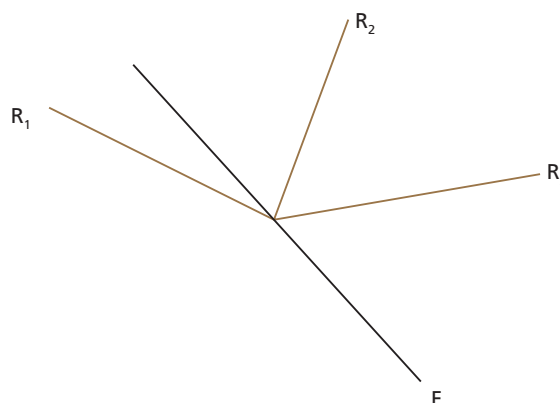
**10.** (Vunesp-SP) Analise a tabela e responda.

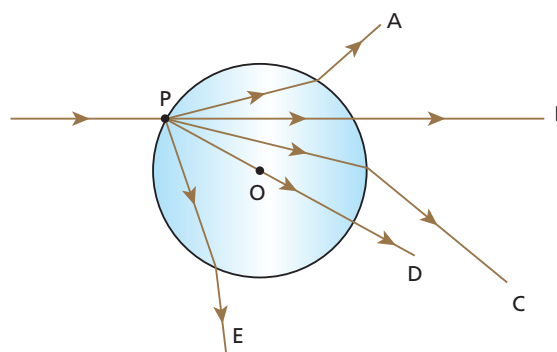
| Substância | Índice de refração em relação ao ar |
|---|---|
| Água | 1,33 |
| Álcool etílico | 1,63 |
| Glicerina | 1,47 |
| Quartzo cristalino | 1,54 |
| Vidro comum | 1,50 |

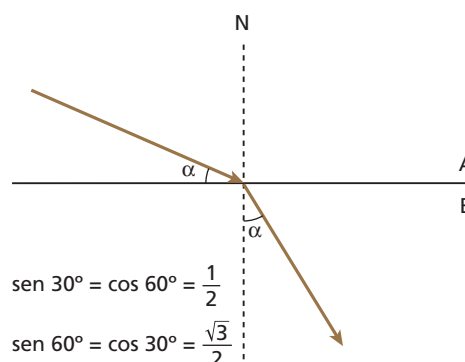
Para um mesmo ângulo de incidência diferente de zero, o maior desvio na direção de um raio de luz que se propaga no ar ocorrerá quando penetrar:
a) na água.
b) no álcool etílico.
c) na glicerina.
d) no quartzo cristalino.
e) no vidro comum.

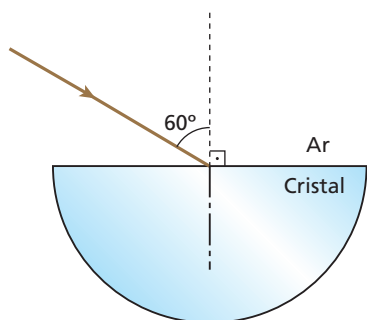
**11.** (Unifor-CE) Um raio de luz monocromática, propagando-se num meio **A** com velocidade $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s, incide na supefície de separação com outro meio transparente **B**, formando 53° com a normal à superfície. O raio refratado forma ângulo de 37° com a normal no meio **B**, onde a velocidade $V_B$ vale, em m/s:
**Dados:** sen 37° = cos 53° = 0,600;
cos 37° = sen 53° = 0,800.
a) $1{,}20 \cdot 10^8$.
b) $1{,}60 \cdot 10^8$.
c) $2{,}10 \cdot 10^8$.
d) $2{,}25 \cdot 10^8$.
e) $2{,}40 \cdot 10^8$.

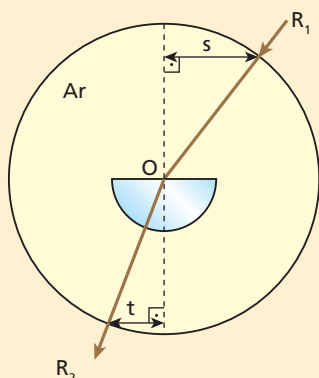
**12.** (UFPE) As figuras ilustram trajetórias de raios de luz que penetram ou saem de blocos de materiais transparentes. Quais figuras mostram situações fisicamente possíveis quando consideramos os índices de refração que estão indicados?

a) Somente a situação **A**.
b) As situações **A** e **E**.
c) As situações **B** e **C**.
d) Somente a situação **D**.
e) As situações **A** e **D**.

**13.** Um raio de luz monocromática incide na fronteira **F** entre dois meios transparentes, dando origem a um raio refletido e a um raio refratado, como representa a figura:

Dos raios de luz $R_1$, $R_2$ e $R_3$, identifique o incidente, o refletido e o refratado.

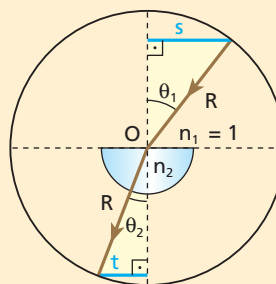
**14.** Um raio de luz monocromática proveniente do ar incide no ponto **P** de uma esfera de vidro de centro **O**, como representa a figura:

Dos trajetos indicados (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**), qual é possível?

**15.** (UFPel-RS) A figura abaixo representa um raio luminoso propagando-se do meio **A** para o meio **B**. Sabendo-se que a velocidade da luz, no meio **A**, é 240 000 km/s e que o ângulo **α** vale 30°, calcule:

a) o índice de refração relativo do meio **A** em relação ao meio **B**.
b) a velocidade de propagação da luz no meio **B**.

**16.** Um raio de luz monocromática incide no centro da face circular de uma peça hemisférica de cristal transparente. A figura representa a seção da peça determinada pelo plano de incidência do raio:

Sendo $\sqrt{3}$ o índice de refração do cristal para a referida radiação, determine a trajetória do raio refratado até emergir para o ar, indicando os ângulos envolvidos.

**17. E.R.** Para determinar o índice de refração de um material, uma peça semicilíndrica polida desse material foi colocada sobre um disco de centro **O**, como sugere a figura.

Um raio de luz monocromática $R_1$, emitido rente ao disco, incide na peça, obtendo-se o raio refratado $R_2$. As distâncias **s** e **t** foram medidas, encontrando-se s = 8,0 cm e t = 5,0 cm. Calcule o índice de refração do material da peça.

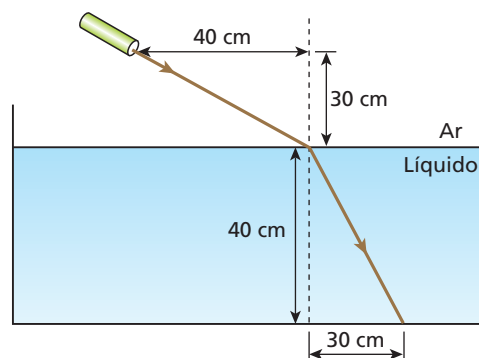
**Resolução:**

Sendo **R** o raio do disco, temos:

Usando a Lei de Snell:

$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$

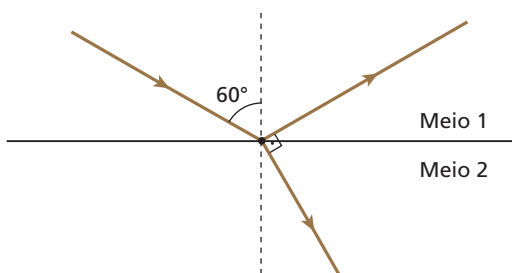
$$1 \cdot \frac{s}{R} = n_2 \cdot \frac{t}{R} \Rightarrow n_2 \cdot \frac{s}{t} = \frac{8,0}{5,0}$$

Então: $\boxed{n_2 = 1,6}$

**18.** (UFSE) O raio de luz monocromática representado no esquema abaixo se propaga do ar para um líquido:

Pode-se afirmar que o índice de refração do líquido em relação ao ar é:

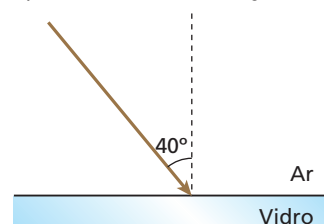
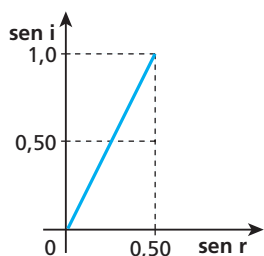
a) 1,25.
b) 1,33.
c) 1,50.
d) 1,67.
e) 1,80.

## Exercícios nível 2

**19.** A figura seguinte representa um pincel cilíndrico de luz monocromática que, propagando-se num meio 1, incide na fronteira separadora deste com um meio 2. Uma parcela da luz incidente é refletida, retornando ao meio 1, enquanto a outra é refratada, passando para o meio 2.

Sabendo que os pincéis refletido e refratado são perpendiculares entre si, obtenha:

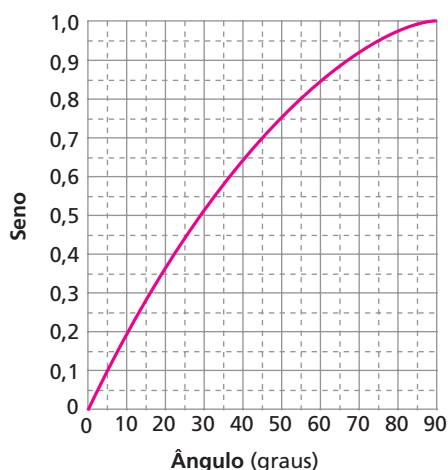
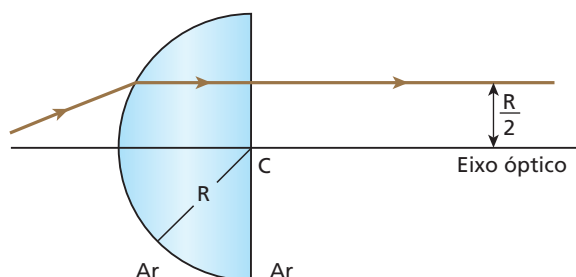
a) os ângulos de reflexão e de refração.
b) o índice de refração do meio 2 em relação ao meio 1.

**20.** (UFPI) Um raio de luz, inicialmente propagando-se no ar, incide sobre uma superfície plana de vidro, conforme a figura abaixo. Parte da luz é refletida e parte é refratada. O ângulo entre o raio refletido e o raio refratado é:

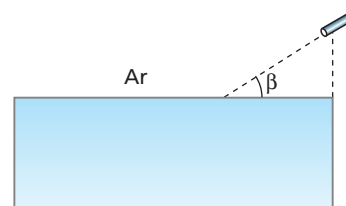
a) menor do que 40°.
b) entre 40° e 50°.
c) entre 50° e 100°.
d) entre 100° e 140°.
e) maior do que 140°.

**21.** Uma mesma luz monocromática passa do vácuo para o interior de uma substância, com diversos ângulos de incidência. Os senos do ângulo de incidência (**i**) e do ângulo de refração (**r**) são dados no gráfico seguinte:

Calcule o índice de refração absoluto dessa substância.

**22.** (Unicamp-SP) Um mergulhador, dentro do mar, vê a imagem do Sol nascendo numa direção que forma um ângulo agudo (ou seja, menor que 90°) com a vertical.

a) Em uma folha de papel, faça um desenho esquemático mostrando um raio de luz vindo do Sol ao nascer e o raio refratado. Represente também a posição aparente do Sol para o mergulhador.

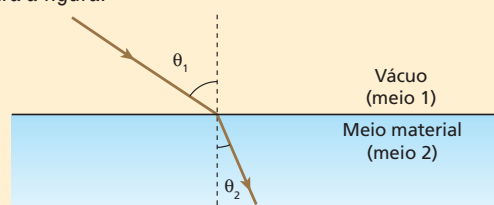
b) Sendo $n = 1,33 \cong \frac{4}{3}$ o índice de refração da água do mar, use o gráfico a seguir para calcular aproximadamente o ângulo entre o raio refratado e a vertical:

**23.** (UFRJ) Um raio de luz monocromática, propagando-se no ar, incide sobre a face esférica de um hemisfério maciço de raio **R** e emerge perpendicularmente à face plana, a uma distância $\frac{R}{2}$ do eixo óptico, como mostra a figura:

O índice de refração do material do hemisfério, para esse raio de luz, é $n = \sqrt{2}$.

Calcule o desvio angular sofrido pelo raio ao atravessar o hemisfério.

**24.** (Unicamp-SP) Um tanque de 40 cm de profundidade está completamente cheio de um líquido transparente, de índice de refração n = 1,64. Um raio *laser* incide na superfície do líquido, formando com ela um ângulo β = 35°.

| θ | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sen θ** | 0,50 | 0,57 | 0,64 | 0,71 | 0,77 | 0,82 | 0,87 | 0,91 |
| **tg θ** | 0,58 | 0,70 | 0,84 | 1,0 | 1,19 | 1,43 | 1,73 | 2,14 |

a) Que ângulo o raio refletido forma com a normal à superfície?

b) Se a fonte do *laser* situa-se 14 cm acima da superfície do líquido, localize o ponto iluminado pelo *laser* no fundo do tanque.

**25. E.R.** Um raio de luz de frequência igual a $6,0 \cdot 10^{14}$ Hz passa do vácuo para um meio material transparente, como ilustra a figura:

Sabendo que sen $\theta_1 = 0,8$, sen $\theta_2 = 0,6$ e que a velocidade da luz no vácuo é $v_1 = 300\,000$ km/s, determine:

a) a velocidade da luz no meio material ($v_2$).

b) o índice de refração absoluto do meio material.

c) o comprimento de onda dessa luz no vácuo ($\lambda_1$) e no meio material ($\lambda_2$).

**Resolução:**

a) Pela Lei de Snell, temos:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{0,8}{0,6} = \frac{300\,000}{v_2}$$

$$\boxed{v_2 = 225\,000 \text{ km/s}}$$

b) Temos:

$$n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{300\,000}{225\,000} \Rightarrow \boxed{n_2 = 1,33}$$

c) Como $v = \lambda f$, temos, no vácuo (meio 1):

$$v_1 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow 300\,000 = \lambda_1 \cdot 6,0 \cdot 10^{14}$$

$$\lambda_1 = 5,0 \cdot 10^{-10} \text{ km}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

Lembrando que a frequência não se altera na refração, temos, no meio material (meio 2):

$$v_2 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow 225\,000 = \lambda_2 \cdot 6,0 \cdot 10^{14}$$

$$\lambda_2 = 3,8 \cdot 10^{-10} \text{ km}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

**26.** Qual o comprimento de onda de uma luz de frequência igual a $4 \cdot 10^{14}$ Hz propagando-se em um meio de índice de refração igual a 1,5?

**Dado:** $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

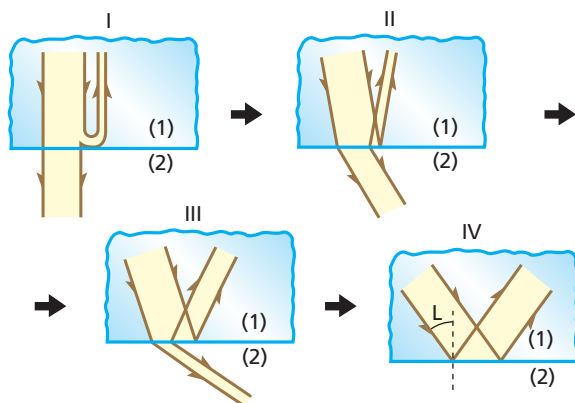
## Bloco 2

# 10. Ângulo limite e reflexão total

## Apresentação

Quando a luz incide na fronteira de um dioptro, ocorrem em geral tanto a refração quanto a reflexão. Para dado dioptro e determinado pincel de luz incidente, a quantidade de luz refletida é tanto maior quanto maior o ângulo de incidência.

Considere determinado pincel cilíndrico de luz monocromática dirigindo-se de um meio mais refringente para outro menos refringente, do vidro (meio 1) para o ar (meio 2), por exemplo, como mostram as figuras abaixo. Observe que, conforme aumenta o ângulo de incidência, aumenta a quantidade de luz refletida e diminui a quantidade de luz refratada.

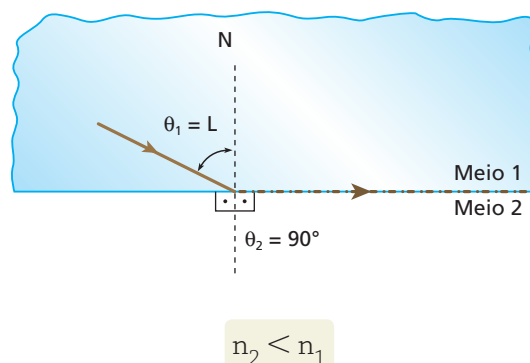
Na figura I, o ângulo de incidência é igual a zero. Nesse caso, a quantidade de luz refratada é bem maior que a refletida (a reflexão é parcial).

Na figura II, o ângulo de incidência aumentou, o que provocou aumento da quantidade de luz refletida e redução da refratada (a reflexão continua parcial).

Na figura III, o ângulo de incidência aumentou mais ainda, o que acarretou um novo aumento da quantidade de luz refletida em detrimento da refratada (a reflexão ainda é parcial).

Observe que, enquanto o ângulo de incidência aumenta, o ângulo de refração aumenta, mas a quantidade de luz refratada é cada vez menor.

Quando o ângulo de incidência tende a um valor **L**, denominado **ângulo limite**, o ângulo de refração tende a 90°, mas a quantidade de luz refratada tende a zero. Atingido esse ângulo limite, não mais ocorre refração e a luz incidente é totalmente refletida. Esse fenômeno é denominado **reflexão total** e está ilustrado na figura IV. Para ângulos de incidência maiores que o ângulo limite, continua ocorrendo, evidentemente, a reflexão total.

## Cálculo do ângulo limite

O ângulo limite (**L**) é calculado pela Lei de Snell, admitindo-se o ângulo de refração igual a 90° (emergência rasante).

$$n_2 < n_1$$

Temos, então:

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

Fazendo $\theta_1 = L$ e $\theta_2 = 90°$, vem:

$$n_1 \text{ sen } L = n_2 \text{ sen } 90°$$

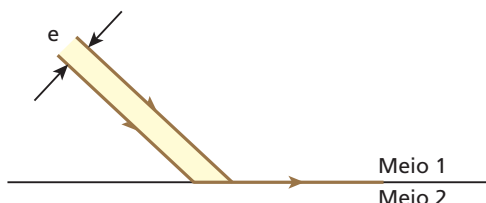
$$\text{sen } L = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{menor}}{n_{maior}}$$

Observe que o seno do ângulo limite na fronteira de um dioptro é obtido dividindo-se o menor índice de refração pelo maior. Nesse cálculo, o engano é inconcebível, pois se dividirmos o índice maior pelo menor obteremos sen L maior que 1, o que é absurdo.

**Notas:**

- É muito importante observar que a consideração desse raio emergente rasante só é válida para efeito de cálculo do ângulo limite **L**. Na verdade, esse raio rasante não existe. Das várias razões para a sua inexistência, podemos citar:
  — Se o raio emergente rasante existisse, ele deveria obedecer à reversibilidade da propagação da luz, isto é, "incidindo" rasante à fronteira (ver figura

anterior), passaria "misteriosamente" para o meio 1, adentrando esse meio por um ponto privilegiado, que evidentemente não existe. "Incidir rasante" é, na realidade, "não incidir"!

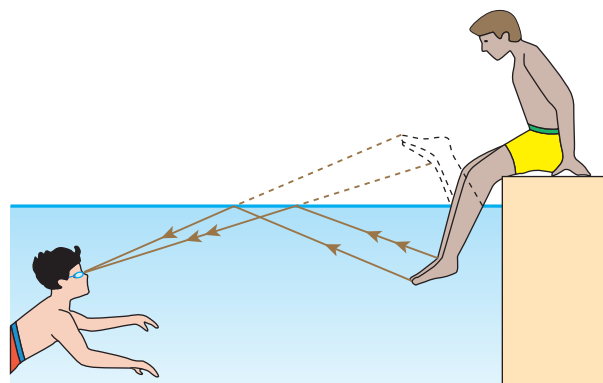
— A emergência rasante de luz causaria o colapso do pincel de luz.

Qualquer pincel incidente tem, evidentemente, uma espessura **e**, diferente de zero. Se houvesse pincel refratado rasante, sua espessura seria nula (colapso do pincel).

Essas e outras razões permitem afirmar, mais uma vez, que ocorre reflexão total e nenhuma refração quando o ângulo de incidência iguala-se ao valor-limite **L**. É correto dizer, porém, que, quando o ângulo de incidência **tende** ao valor-limite **L**, o ângulo de refração **tende** a 90°.

- Embora o raio rasante, incidente ou emergente, não exista, frequentemente ele aparece em questões propostas em livros didáticos, em vestibulares e até mesmo em olimpíadas de Física. Nessas situações, se tivermos que resolver tais questões, não nos restará outra alternativa senão fazer de conta que o raio rasante existe.

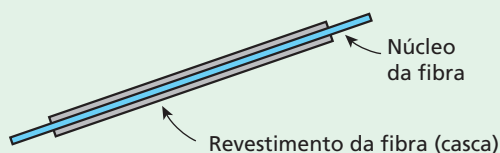
## Condições para ocorrer a reflexão total

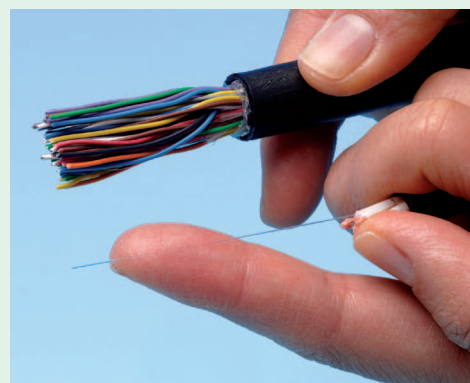
A reflexão total só pode ocorrer se forem satisfeitas as seguintes condições:

- A luz deve dirigir-se do meio **mais refringente** para o meio **menos refringente**.
- O ângulo de incidência deve ser **igual ou superior** ao ângulo limite do dioptro

Um nadador, imerso em água e adequadamente posicionado, olha para uma pessoa sentada à beira da piscina. Devido à reflexão total, a visão do tronco da pessoa fica prejudicada. O nadador, por visão direta, vê as pernas da pessoa submersas e, por reflexão total, vê a imagem dessas pernas como se a superfície da água fosse um espelho plano.

## Leitura

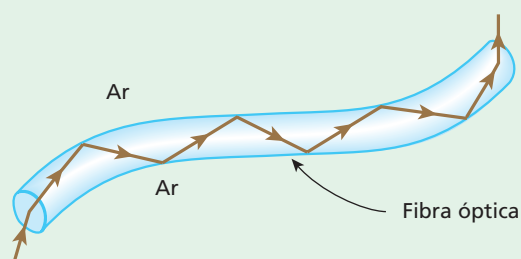
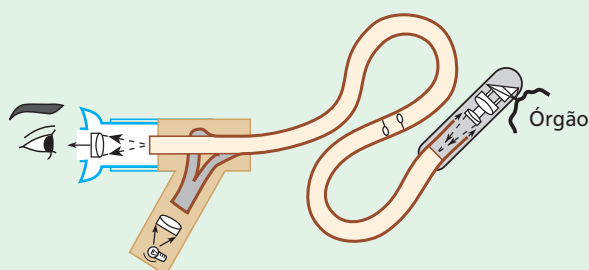
### Fibras ópticas

Uma importantíssima aplicação da reflexão total dá-se nas fibras ópticas, largamente usadas na tecnologia moderna. Nas comunicações, sua importância destaca-se pela grande capacidade de transporte simultâneo de uma enorme quantidade de informações, por cabos muito finos (cada fibra tem diâmetro entre 0,1 mm e 0,2 mm). Essa é uma das vantagens das fibras sobre os fios metálicos.

Representação de uma fibra óptica para comunicação: o núcleo apresenta índice de refração maior que o do revestimento (casca).

Além disso, a atenuação (redução da intensidade) dos sinais eletromagnéticos que se propagam em uma fibra óptica é baixa em comparação com o que acontece com os sinais elétricos transmitidos por fios metálicos. Assim, as fibras levam outra grande vantagem sobre os fios, principalmente nas transmissões a longas distâncias.

Nas comunicações, uma única fibra óptica pode transportar tanta informação quanto um grosso feixe de fios elétricos.

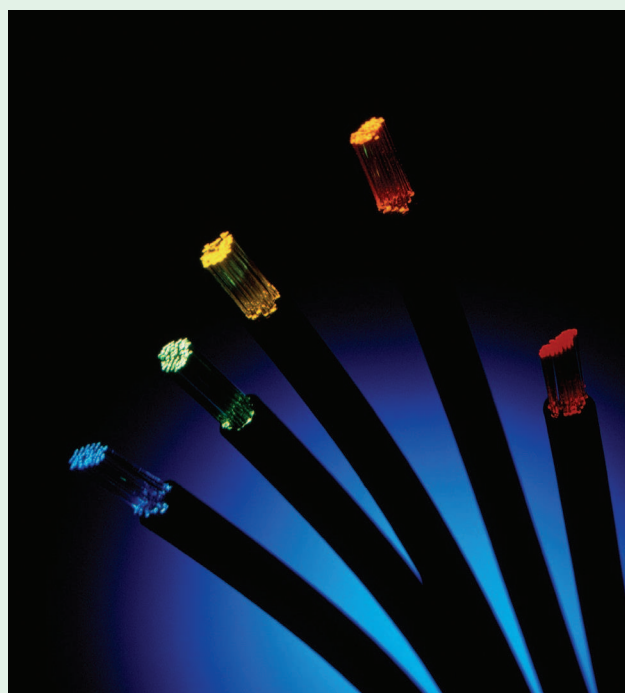
Outra vantagem das fibras é a imunidade às interferências eletromagnéticas, por serem feitas de materiais dielétricos, como vidros de óxido de silício e óxido de germânio, plásticos e outros materiais.

Na Medicina, são bastante usadas em equipamentos para observação de órgãos internos.

A figura abaixo ilustra o princípio de funcionamento das fibras ópticas.

Um raio de luz penetra por uma das extremidades de uma fibra óptica e emerge pela outra extremidade, após sofrer diversas **reflexões totais**.

Feixes de fibras ópticas podem ser usados na observação de órgãos internos, sem necessidade de cirurgia.

Steve Cole/Photodisc/Getty Images

Fotografia de luz sendo conduzida por um feixe de fibras ópticas.

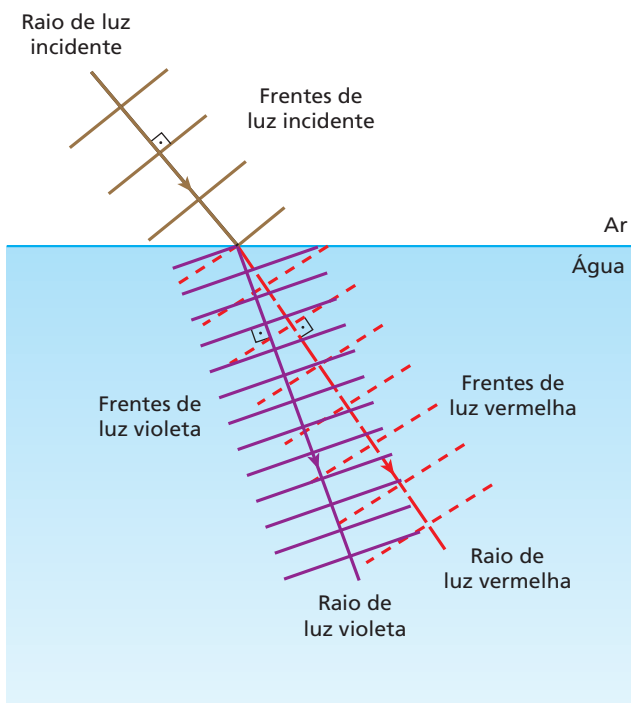
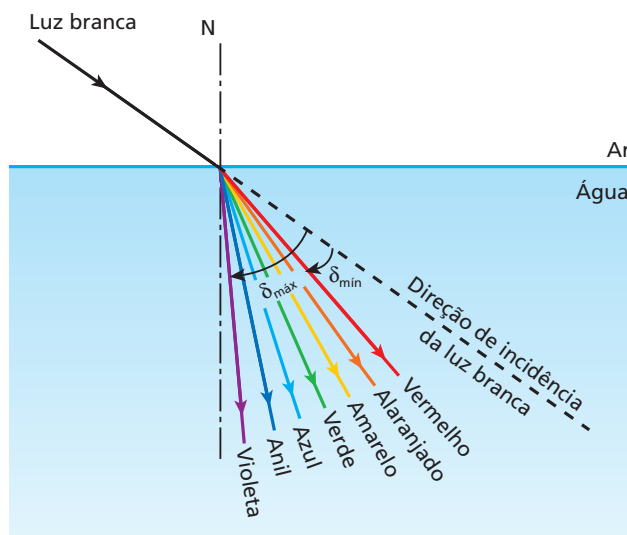
Masterfile/Other Images-Brasil

Na fotografia, cabos contendo um grande número de fibras ópticas.

## 11. Dispersão da luz

### Apresentação

Estudaremos agora um fenômeno facilmente observável com uma luz policromática: a dispersão.

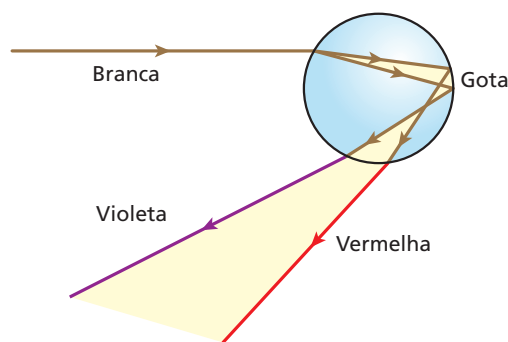
**Dispersão** de uma luz policromática é a sua decomposição nas diversas luzes monocromáticas que a constituem.

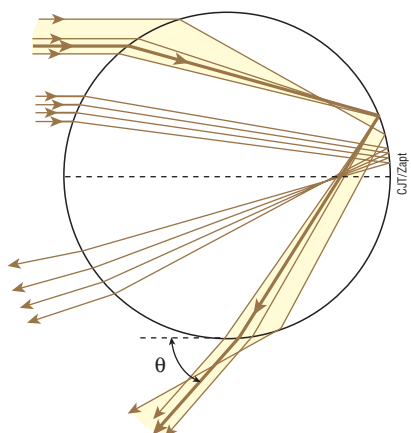
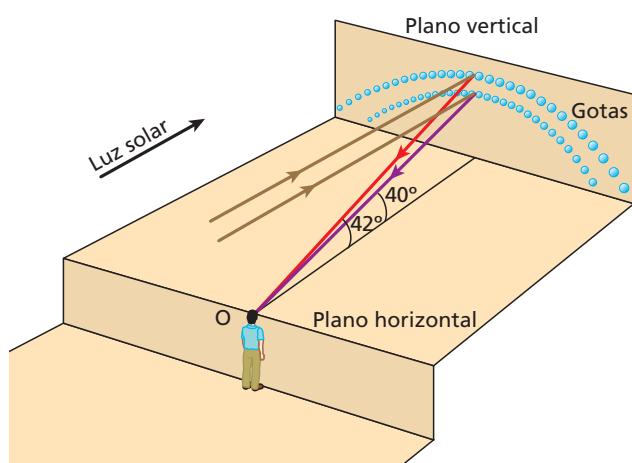
A dispersão é possível porque diferentes luzes monocromáticas, isto é, luzes de diferentes frequências, propagam-se na matéria com diferentes velocidades, ou seja, percebem na matéria diferentes índices de refração. Veja, na figura abaixo, a representação esquemática de frentes planas de luz branca solar propagando-se no ar e incidindo obliquamente na fronteira entre o ar e a água. Todas as luzes monocromáticas componentes perdem velocidade quando passam do ar para a água. Essa perda de velocidade é mais acentuada, porém, para a luz violeta e menos acentuada para a vermelha. Por isso, as diversas cores separam-se.

Quando a frente de luz passa do ar para a água, a parte que já se encontra na água está atrasada em relação à parte que ainda se encontra no ar. Esse atraso, porém, é maior para a luz violeta e menor para a luz vermelha. Por causa disso, a luz vermelha, a luz violeta e as demais (não representadas) seguem rumos diferentes dentro da água, o que caracteriza o fenômeno da dispersão.

A figura representa os raios de luz branca e de sete cores que se separaram na dispersão. Observe que a luz vermelha experimenta o menor desvio ($\delta_{mín}$) em relação à direção de incidência da luz branca, enquanto a luz violeta experimenta o maior desvio ($\delta_{máx}$).

É importante notar que:

Na dispersão da luz, a luz monocromática de maior frequência **sempre** sofre o maior desvio.

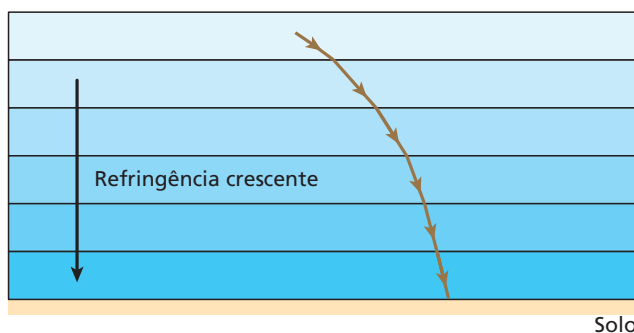
### Arco-íris (primário)

O **arco-íris** é um exuberante fenômeno natural decorrente da dispersão da luz solar em gotas de chuva. Basicamente, o que ocorre é o seguinte: a luz branca penetra na gota, decompondo-se em diversas cores, que em seguida sofrem reflexão (parcial) nas paredes da gota, como mostra a figura:

Pode-se demonstrar que, se um raio de determinada cor fizer o trajeto indicado na figura acima, de modo que seu desvio total seja máximo, todos os raios de mesma cor, vizinhos dele, emergirão da gota muito juntos, reforçando o feixe emergente em determinada direção. A figura a seguir mostra dois feixes de luz monocromática atingindo uma gota.

Observe que os raios do feixe superior emergem da gota muito juntos. Nesse feixe, o raio em traço mais grosso é o que sofre desvio máximo para a cor considerada.

Para a luz vermelha, esse reforço da luz refletida ocorre quando o ângulo **θ** indicado na figura vale aproximadamente 42°; e para a luz violeta, ocorre quando **θ** é próximo de 40°.

Na figura, um observador **O** contempla um arco-íris. Note que o observador está de costas para o Sol quando se coloca de frente para o arco-íris. As gotas que são vistas por **O** sob ângulo de 42° enviam para **O** luz vermelha reforçada; já aquelas que são vistas por **O** sob ângulo de 40° enviam para **O** luz violeta reforçada.

Fotografia de arco-íris.

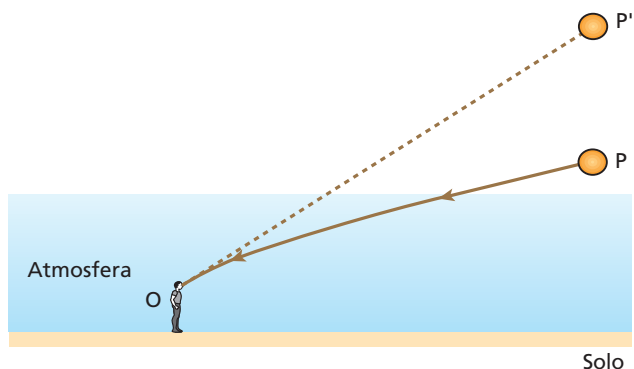
## 12. Refração na atmosfera

Segundo o Princípio da Propagação Retilínea da Luz, a luz propaga-se em linha reta nos meios transparentes e homogêneos. A atmosfera, porém, não é um meio homogêneo, pois apresenta uma densidade tanto menor quanto maior a altitude. Além disso, as predominâncias gasosas variam com a altitude. Consequentemente, quanto maior a altitude, menor é o índice de refração do ar. Então, a trajetória de um raio de luz na atmosfera é, em geral, curvilínea.

A atmosfera pode ser representada por meio de um modelo constituído de várias camadas gasosas de refringência tanto maior quanto menor a altitude. Um raio de luz originário do vácuo segue trajetória semelhante à da figura acima quando incide obliquamente na atmosfera.

Vamos analisar agora algumas consequências interessantes da refração da luz na atmosfera.

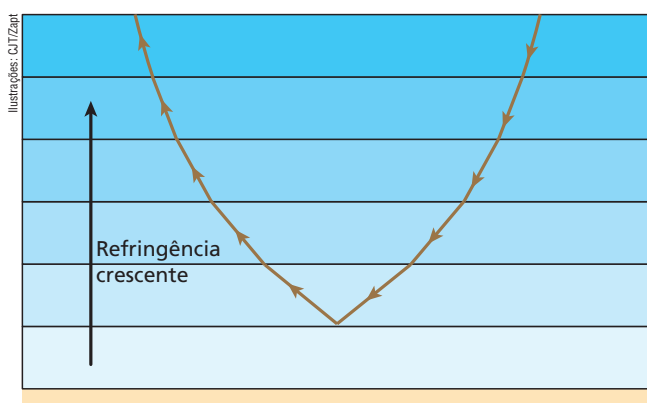
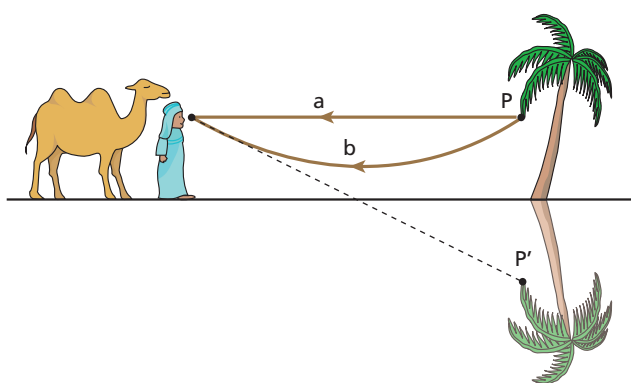
### Posição aparente dos astros

Veja, na figura seguinte, um astro representado na posição **P**, sendo contemplado por um observador **O**, situado na Terra.

A luz proveniente do astro situado em **P** desvia-se ao atravessar a atmosfera. Por isso, quando essa luz atinge o observador, ele tem a impressão de que o astro está na posição **P'**, que é uma posição **aparente**. Concluímos, então, que, em geral, vemos os astros com uma aparente elevação em relação à sua posição real.

## Miragens

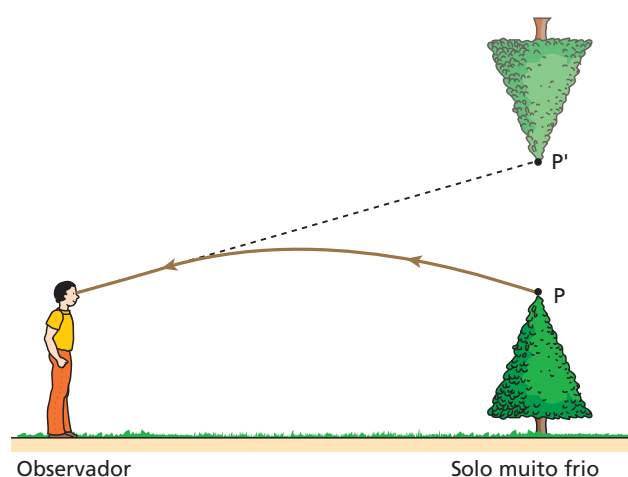
A temperatura junto ao solo pode determinar a ocorrência do curioso fenômeno da miragem.

Quando a temperatura do solo se torna muito elevada, o ar aquecido junto ao solo fica menos denso e, consequentemente, menos refringente que o ar que se encontra um pouco mais acima. Por causa disso, um raio de luz que desce obliquamente de encontro ao solo pode sofrer reflexão total antes de atingi-lo, como se vê no modelo a seguir.

Ilustrações: CJT/Zapt

Esse fenômeno pode ocorrer tanto em temperaturas altas, como em desertos ou no solo em dias quentes, quanto em temperaturas baixas, especialmente nas regiões polares. A miragem que ocorre sob temperaturas altas é chamada de inferior, devido ao fato de formar a imagem sob o objeto, como é representado na ilustração abaixo.

O observador recebe do objeto **P** tanto luz direta (**a**) como luz que o atinge após a reflexão total (**b**). Consequentemente, o observador enxerga tanto o objeto (**P**) como a sua imagem especular (**P'**), que ele tem a impressão de estar sendo produzida por um lago.

Pelo mesmo motivo, temos a impressão de que as estradas asfaltadas estão molhadas em dias quentes e ensolarados, quando observadas de posições convenientes, como mostra a fotografia a seguir.

Charles O'Rear/Corbis/Latinstock

Também pode ocorrer que a temperatura do solo fique tão baixa que o ar junto dele se torne mais frio e, portanto, mais denso e mais refringente que o ar situado um pouco acima. Nesse caso, os raios de luz que partem do objeto e sobem obliquamente passam de camadas de ar mais refringentes para camadas menos refringentes, até a ocorrência da reflexão total. O observador vê a imagem do objeto "pairando" no ar. É a chamada miragem superior.

**Nota:**

- A rigor, não é necessário que ocorra a reflexão **total** da luz para que se observe uma miragem. Basta que o ângulo de incidência aumente o suficiente para que a reflexão seja bastante acentuada.

## Leitura

### Por que quando vemos a luz de longe ela chega a nossos olhos piscando?

Quando observamos fontes de luz a partir de longas distâncias, como estrelas, por exemplo, elas parecem de fato “piscar” ou “tremeluzir”. Esse fenômeno, conhecido pelos astrônomos como *atmospheric seeing*, é causado essencialmente por manifestações da turbulência na atmosfera terrestre, como flutuações de temperatura e deslocamentos de correntes de ar.

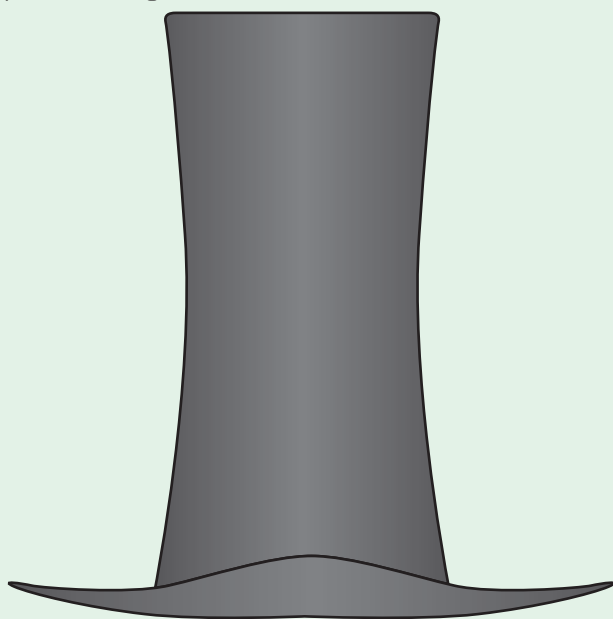
O primeiro passo para a compreensão do *atmospheric seeing* foi dado em 1665 pelo físico inglês Robert Hooke (1635-1703), que sugeriu a existência de “pequenas e móveis regiões da atmosfera que, dotadas de diferentes poderes de refração, agem como lentes”. De fato, diferentes regiões da atmosfera têm índices de refração ligeiramente distintos, devido às pequenas variações de temperatura e densidade causadas por correntes de ar turbulentas e pelas massas de ar aquecidas provenientes do solo. Dessa forma, a luz que se propaga através da atmosfera sofre deflexões aleatórias nessas regiões de turbulência, sendo desviada ao longo de seu caminho. Portanto, a luz que chega aos olhos de um observador situado a longas distâncias sofre pequenos desvios aleatórios, resultando em uma imagem que parece “piscar” ou mover-se.

O fenômeno de *seeing* se manifesta de forma mais evidente nas regiões mais próximas da superfície terrestre, até aproximadamente 100 m acima do solo, exatamente onde a atmosfera é mais turbulenta e as correntes de ar, mais intensas. Outros fatores também podem contribuir para o *seeing*, como a concentração de partículas de poeira e a poluição da atmosfera. O *seeing* atmosférico é um problema para os astrônomos, que são obrigados a utilizar vários recursos para minimizar seus efeitos na observação do céu. Uma das provas disso é o fato de a Agência Espacial Norte-americana (Nasa) estimar já ter gasto cerca de US$ 2 bilhões na luta contra os efeitos nocivos do *seeing*, ou seja, quase a mesma quantia necessária para colocar o telescópio espacial Hubble em órbita!

Felipe A. Pinheiro

Laboratório de Magnetismo, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.
PINHEIRO, Felipe A. “Por que quando vemos a luz de longe ela chega a nossos olhos piscando?”
Fonte: *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro: SBPC, vol. 36, n. 212, jan.-fev. 2005. p. 5.

### É ou não é?

Ao simplesmente olhar para a cartola representada na figura a seguir, ficamos com a certeza de que sua altura é maior que sua largura. Entretanto, medindo esses dois comprimentos com uma régua, constatamos que eles são iguais!

Como se explica isso?

Pelo que se sabe, não existe explicação. Se surgir alguma, não será dada pela Física, mas sim pela Neurofisiologia, já que se trata de um equívoco de nosso cérebro na decodificação dos sinais captados por seus sensores visuais. A isso se dá o nome de ilusão, no caso ilusão de óptica.

O Sol, a Lua e constelações, quando observados no horizonte, também nos dão a certeza de que estão maiores do que quando são vistos mais elevados no céu, mas também se trata de uma ilusão não explicada até hoje: as medições comprovam que isso não é real.

Já se tentou explicar esse problema como sendo consequência da **refração** da luz ao adentrar a atmosfera terrestre. Foi uma tentativa frustrada, já que não se trata de um fato, e sim de uma ilusão.

## Por que em algumas noites a Lua aparece no céu grande e colorida e depois fica pequena e branca?

Essa pergunta pode ser dividida em duas. Os motivos de a Lua estar “colorida” ou branca no céu e de parecer maior ou menor são diferentes. Mas, realmente, a Lua, logo após nascer ou um pouco antes de se pôr, aparece no céu grande e avermelhada e quando está mais alta, menor e esbranquiçada.

Vamos responder primeiro o porquê de ela ter uma coloração avermelhada. Quando observamos um astro no horizonte — não apenas a Lua —, a luz que nos chega dele atravessa uma massa de ar da atmosfera bem maior do que quando ele está alto no céu, sendo, por isso, mais absorvida. Essa absorção é menos intensa para a cor vermelha, deixando a Lua ou qualquer outro astro com essa coloração. Esse efeito é acentuado pela poluição, pois mais partículas de poeira e gás estão no ar, aumentando a absorção. Conforme a Lua se eleva, a absorção é menor, e, com isso, a vemos mais branca.

Agora vamos para a segunda parte desta pergunta. A ideia de que a Lua é maior quando está próxima do horizonte é bastante antiga. Chineses e gregos já mencionavam esse fato mais de três séculos antes de Cristo. E não é só a Lua: qualquer objeto extenso no céu e perto do horizonte, como uma constelação, também parece maior. Apesar de muitos perceberem esse efeito, a Lua não fica maior no horizonte! O que acontece é uma ilusão de óptica! Qualquer um pode comprovar isso fotografando a Lua quando ela está no horizonte e quando ela está alta, e comparando os tamanhos. Na verdade, no horizonte ela fica menor, pois está mais afastada, porém nada que conseguíssemos perceber a olho nu. O que é mais incrível é que, no meio científico, ainda não há um consenso sobre o que causa essa ilusão.

Uma explicação bem aceita fala da questão da referência. Ao observarmos a Lua no horizonte, geralmente a comparamos com objetos familiares, como casas, árvores, montanhas, o que dá a impressão de ela ser maior do que quando a observamos bem alta e sozinha no céu. O problema dessa explicação é que a ilusão permanece mesmo quando vemos a Lua no horizonte, sem nenhuma referência, como no oceano, o que prova que ela não está completa. Outras hipóteses consideram a ilusão uma questão fisiológica e tentam explicar por que nosso cérebro se comporta desse jeito. Quais os motivos dessa percepção enganosa? O mistério persistirá até compreendermos melhor como o nosso cérebro funciona e como se desenvolve a nossa percepção óptica.

Wailã de Souza Cruz

Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro.
Fonte: *Ciência Hoje*, vol. 38, n. 225, abr. 2006.

# Faça você mesmo

## 1. Um espelho de fuligem

Na chama de uma vela, enegreça uma das faces da lâmina de uma faca. Em seguida, introduza a faca em um copo com água, de modo que a face enegrecida fique de frente para você.

Desse modo, você a verá escura — o que não é nenhuma novidade!

Mantendo a faca na vertical, comece a girá-la lentamente, até observar um belíssimo espelhamento na região da fuligem.

Isso acontece porque a fuligem, a partir do momento em que foi depositada na faca, retém uma película gasosa, fenômeno denominado **adsorção**. Assim, conseguimos provocar a reflexão total da luz, que, propagando-se na água, incide obliquamente nessa película menos refringente que ela.

Imagens: Cristina Xavier

CUIDADO!
Este experimento envolve fogo.
Cuidado também ao manusear a faca.

## 2. Arco-íris, mesmo sem chuva

Você pode produzir um arco-íris usando uma mangueira de jardim, num dia ensolarado. Para isso, num horário em que o Sol não está a pino, como no meio da manhã ou no meio da tarde, fique de costas para ele, segurando a mangueira. Com os dedos, faça com que a água saia espraiada, em leque (ou acople na ponta da mangueira um registro que faça isso). Você verá, então, um arco-íris à sua frente.

Thinkstock/Getty Images

## Exercícios

nível 1

**27.** (PUC-SP) É dada a tabela:

| Material | Índice de refração absoluto |
|---|---|
| Gelo | 1,309 |
| Quartzo | 1,544 |
| Diamante | 2,417 |
| Rutilo | 2,903 |

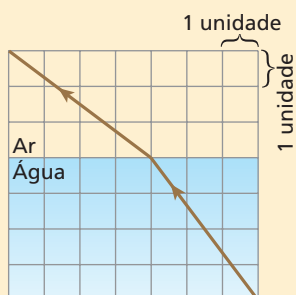
É possível observar reflexão total com luz incidindo do:

a) gelo para o quartzo.
b) gelo para o diamante.
c) quartzo para o rutilo.
d) rutilo para o quartzo.
e) gelo para o rutilo.

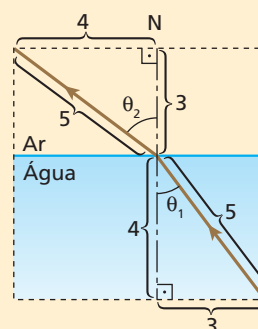
**28.** Quando um feixe de luz, propagando-se no vidro, atinge a fronteira do vidro com o ar, podemos assegurar que ocorre refração? E reflexão?

**29.** Quando um raio de luz dirige-se de um meio **A** (índice de refração $n_A$) para um meio **B** (índice de refração $n_B$).

a) se $n_A > n_B$, o raio certamente sofre reflexão total.
b) se $n_A < n_B$, o raio pode sofrer reflexão total.
c) se $n_A < n_B$, o raio certamente sofre refração e reflexão parcial.
d) se $n_A > n_B$, o raio certamente sofre refração e reflexão parcial.
e) se $n_A = n_B$, o raio aproxima-se da normal.

**30. E.R.** O esquema a seguir representa a refração da luz da água para o ar:

Com base nas informações contidas no esquema, determine o seno do ângulo limite do dioptro água-ar para a luz em questão.

**Resolução:**

Contando as divisões do quadriculado, obtemos:

Usando a Lei de Snell:

$$n_{água} \text{ sen } \theta_1 = n_{ar} \text{ sen } \theta_2$$

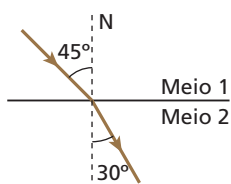
$$n_{água} \cdot \frac{3}{5} = n_{ar} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{n_{ar}}{n_{água}} = \frac{3}{4}$$

O seno do ângulo limite é dado por:

$$\text{sen } L = \frac{n_{menor}}{n_{maior}}$$

Então, como $n_{ar}$ é menor que $n_{água}$:

$$\text{sen } L = \frac{n_{ar}}{n_{água}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\text{sen } L = 0{,}75}$$

**31.** (UEL-PR) Um raio de luz se propaga do meio 1, cujo índice de refração vale $\sqrt{2}$, para o meio 2, seguindo a trajetória indicada na figura abaixo:

**Dados:** sen 30° $= \frac{1}{2}$; sen 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; sen 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

O ângulo limite para esse par de meios vale:

a) 90°.
b) 60°.
c) 45°.
d) 30°.
e) zero.

**32. E.R.** Um raio de luz monocromática propaga-se em um vidro de índice de refração igual a $\sqrt{2}$ e incide na fronteira plana entre o vidro e o ar sob ângulo de incidência igual a 60°. Descreva o fenômeno que ocorre com o raio nessa fronteira.

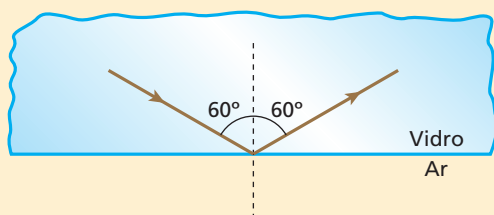
**Resolução:**

Observe que o raio incidente dirige-se do meio mais refringente (vidro) para o menos refringente (ar). Por isso, é possível que ocorra reflexão total.

Calculando o ângulo limite na fronteira:

$$\text{sen } L = \frac{n_{menor}}{n_{maior}} = \frac{n_{ar}}{n_{água}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow L = 45°$$

Como o ângulo de incidência (60°) é maior que o ângulo limite (45°), concluímos que:

O raio de luz sofre reflexão total na fronteira.

**Nota:**

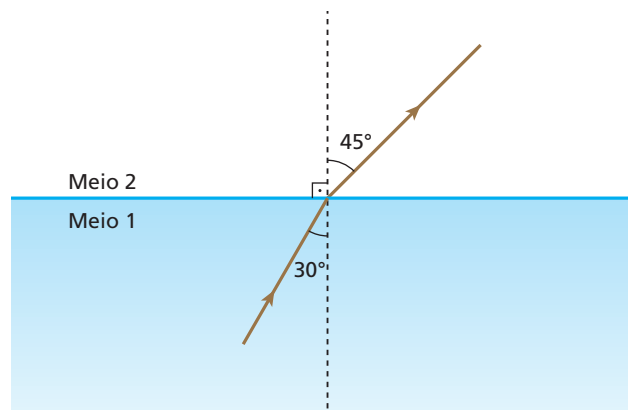
- A ocorrência da reflexão total pode também ser constatada pela Lei de Snell, uma vez que sua aplicação nos leva a um absurdo. Aplicando essa lei, temos:

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

$$\sqrt{2} \text{ sen } 60° = 1 \text{ sen } \theta_2$$

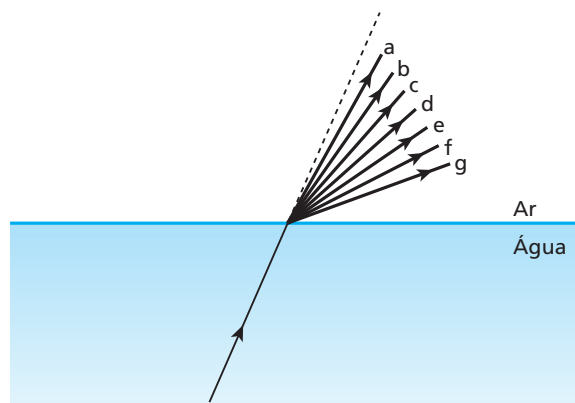
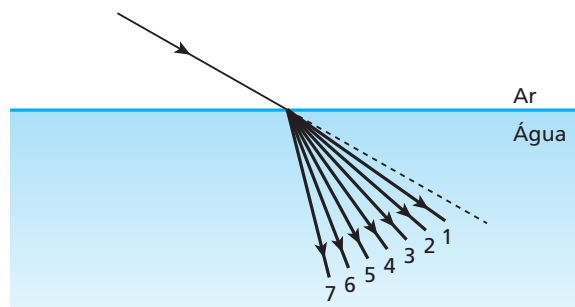
$$\text{sen } \theta_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1, \text{ o que é um absurdo.}$$

A aplicação da Lei de Snell pressupõe a ocorrência do fenômeno da refração. Quando ela nos leva a um absurdo, devemos entender que o fenômeno que se supõe ocorrer (refração) na realidade não ocorre. A luz sofre, portanto, reflexão total.

**33.** Um raio de luz monocromática atravessa a fronteira entre os meios 1 e 2, como representa a figura a seguir:

Determine o que ocorreria se o ângulo de incidência, em vez de 30°, fosse igual a 45°.

**34.** Considere dois blocos, um de vidro e outro de diamante, de mesmo formato e igualmente lapidados, imersos no ar. Sabe-se que o índice de refração do diamante é maior que o do vidro. Sendo igualmente iluminados:

a) o diamante brilha mais, porque o ângulo limite na fronteira diamante-ar é menor que na fronteira vidro-ar, o que favorece a reflexão da luz internamente no diamante.
b) o diamante brilha mais, porque o ângulo limite na fronteira diamante-ar é maior que na fronteira vidro-ar.
c) o diamante brilha mais, porque a luz se propaga em seu interior com velocidade maior que no interior do vidro.
d) o vidro brilha mais, porque ele é mais refringente que o diamante.
e) o vidro e o diamante brilham igualmente.

**35.** As figuras seguintes mostram um pincel cilíndrico de luz branca solar passando do ar para a água e da água para o ar, decompondo-se nas sete cores básicas:

Identifique:
a) os raios de luz vermelha.
b) os raios de luz violeta.
c) os raios de luz verde.

**36.** (UFRGS-RS) A tabela apresenta os valores do índice de refração do vidro *flint*, em relação ao ar, para diversas cores da luz visível:

| Violeta | Azul | Verde | Amarelo | Vermelho |
|---|---|---|---|---|
| 1,607 | 1,594 | 1,581 | 1,575 | 1,569 |

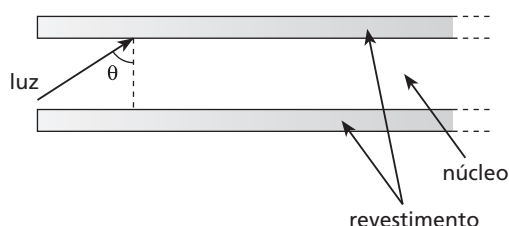
Um feixe de luz branca, proveniente do ar, atinge obliquamente uma lâmina desse vidro, com um ângulo de incidência bem determinado. O feixe sofre dispersão ao ser refratado nessa lâmina, separando-se nas diversas cores que o compõem. Qual das alternativas estabelece uma relação correta para os correspondentes ângulos de refração das cores vermelha, verde e azul, respectivamente?

a) $\theta_{vermelho} > \theta_{verde} > \theta_{azul}$
b) $\theta_{vermelho} > \theta_{verde} = \theta_{azul}$
c) $\theta_{vermelho} = \theta_{verde} < \theta_{azul}$
d) $\theta_{vermelho} < \theta_{verde} < \theta_{azul}$
e) $\theta_{vermelho} < \theta_{verde} > \theta_{azul}$

**37.** Quais os fenômenos ópticos que determinam a ocorrência do arco-íris?

## Exercícios — nível 2

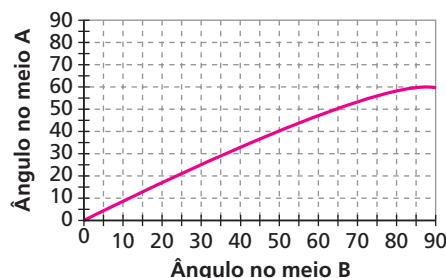
**38.** As estrelas cintilam porque:
a) acendem e apagam alternadamente.
b) o índice de refração da atmosfera cresce com a altitude.
c) o índice de refração da atmosfera diminui com a altitude.
d) ocorrem reflexões em seu interior, enquanto elas se movem.
e) os valores dos índices de refração nos diversos pontos da atmosfera não são estáveis e a intensidade da luz que recebemos delas é muito pequena.

**39.** (Fuvest-SP)

Uma fibra ótica é um guia de luz, flexível e transparente, cilíndrico, feito de sílica ou polímero, de diâmetro não muito maior que o de um fio de cabelo, usado para transmitir sinais luminosos a grandes distâncias, com baixas perdas de intensidade. A fibra ótica é constituída de um núcleo, por onde a luz se propaga, e de um revestimento, como esquematizado na figura acima (corte longitudinal). Sendo o índice de refração do núcleo 1,60 e o do revestimento 1,45, o menor valor do ângulo de incidência θ do feixe luminoso, para que toda a luz incidente permaneça no núcleo, é, aproximadamente,

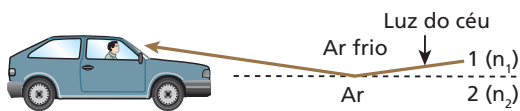
a) 45°. b) 50°. c) 55°. d) 60°. e) 65°.

| NOTE E ADOTE | | |
|---|---|---|
| θ (graus) | sen θ | cos θ |
| 25 | 0,42 | 0,91 |
| 30 | 0,50 | 0,87 |
| 45 | 0,71 | 0,71 |
| 50 | 0,77 | 0,64 |
| 55 | 0,82 | 0,57 |
| 60 | 0,87 | 0,50 |
| 65 | 0,91 | 0,42 |

**40.** Determinada luz monocromática apresenta velocidade de $2,3 \cdot 10^8$ m/s na água e $2,0 \cdot 10^8$ m/s em certo tipo de vidro. O que ocorre quando um raio dessa luz, propagando-se no vidro, incide na fronteira do vidro com a água sob ângulo de incidência de 70°?

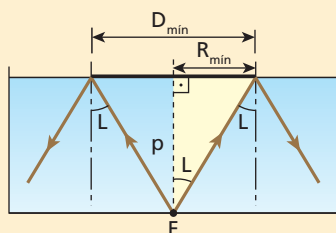
**41.** (Unifesp-SP) O gráfico mostra a relação entre os ângulos de incidência e de refração entre dois materiais transparentes e homogêneos, quando um raio de luz incide sobre a superfície de separação entre esses meios, qualquer que seja o sentido do percurso.
Se esses materiais fossem utilizados para produzir a casca e o núcleo de fibras ópticas, deveria compor o núcleo da fibra o meio:

a) **A**, por ser o mais refringente.
b) **B**, por ser o menos refringente.
c) **A**, por permitir ângulos de incidência maiores.
d) **B**, porque nele a luz sofre maior desvio.
e) **A** ou **B**, indiferentemente, porque nas fibras ópticas não ocorre refração.

**42.** O índice de refração constitui um eficiente critério para a identificação de uma pedra preciosa e, consequentemente, para a apuração de sua autenticidade. O índice de refração pode ser determinado por aparelhos denominados refratômetros, mas também é possível determiná-lo pelo método de imersão, que consiste em mergulhar a pedra em um líquido de índice de refração conhecido e observá-la. Para isso são fabricados líquidos de índices de refração que variam de 1,5 até valores superiores a 2,0.
As turmalinas, principalmente a variedade denominada rubelita, em geral possuem muitas fraturas internas, que são preenchidas de gás e provocam notáveis reflexões com a incidência da luz.
a) Para determinar o índice de refração por imersão, procura-se o líquido no qual a pedra "desaparece". O que se pode concluir sobre o índice de refração da pedra?
b) Qual é a principal causa das intensas reflexões nas fraturas das turmalinas?

**43.** (Unicamp-SP – mod.) Um tipo de miragem muito comum nos leva a pensar que há água no chão de uma estrada. O que vemos é, na verdade, a reflexão da luz do céu por uma camada de ar quente próxima ao solo. Isso pode ser explicado por um modelo simplificado como o da figura abaixo, em que **n** representa o índice de refração. Numa camada próxima ao solo, o ar é aquecido, e assim seu índice de refração $n_2$ se reduz.
Considere a situação na qual o ângulo de incidência é de 84°. Adote $n_1 = 1{,}010$ e use a aproximação sen 84° = 0,995.

a) Qual deve ser o máximo valor de $n_2$ para que a miragem seja vista? Dê a resposta com três casas decimais.
b) Em qual das camadas (1 ou 2) a velocidade da luz é maior?

**44.** Um raio de luz monocromática atravessa a fronteira plana entre dois meios **A** e **B**, de **A** para **B**, com ângulo de incidência igual a 30° e ângulo de refração igual a 60°. Determine:
a) o comportamento de um raio de luz de mesma frequência, que se dirige de **A** para **B** com ângulo de incidência de 60°.
b) o comportamento de um raio de luz de mesma frequência, que forma no meio **B** um ângulo de 30° com a normal e dirige-se de **B** para **A**.

**45. E.R.** No fundo de um tanque de profundidade **p** igual a 2,0 m há uma fonte de luz **F**, considerada pontual. O tanque é, então, preenchido com um líquido de índice de refração absoluto $\sqrt{2}$, em cuja superfície é posto a flutuar um disco opaco, circular e de centro pertencente à vertical que passa por **F**. Calcule o mínimo diâmetro que o disco deve ter para que observadores situados no ar não consigam ver a fonte **F**. As paredes do tanque são opacas.

**Resolução:**
Os raios emitidos por **F**, e que incidem na fronteira líquido-ar sob ângulos de incidência maiores que o ângulo limite **L** ou iguais a ele sofrem reflexão total e, portanto, não emergem para o ar. Assim, apenas um cone de luz proveniente de **F** é capaz de emergir para o ar. Entretanto, esse cone não emergirá se a superfície do líquido for coberta por um material opaco. A figura mostra o disco de diâmetro mínimo ($D_{mín}$) capaz de fazer isso:

Calculando o ângulo limite **L**:

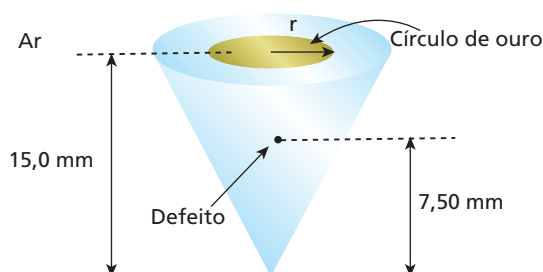
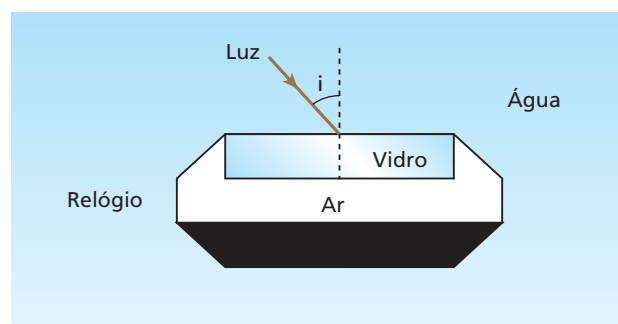
$$\text{sen } L = \frac{n_{menor}}{n_{maior}} = \frac{n_{ar}}{n_{líquido}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow L = 45°$$

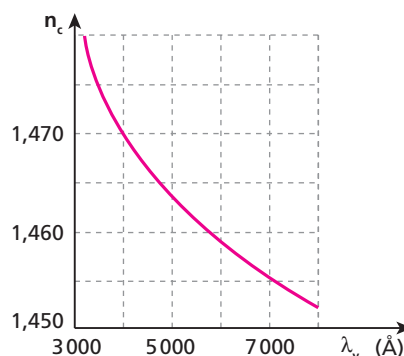
No triângulo retângulo destacado, temos:

$$\text{tg } L = \frac{R_{mín}}{p} \Rightarrow \text{tg } 45° = \frac{R_{mín}}{2{,}0} \Rightarrow 1 = \frac{R_{mín}}{2{,}0} \Rightarrow$$

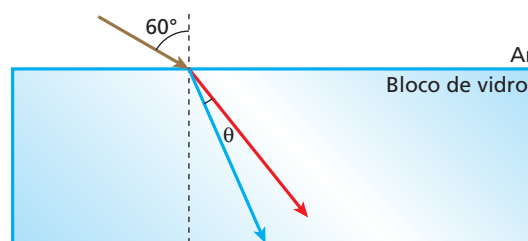
$$\Rightarrow R_{mín} = 2{,}0 \text{ m}$$

Portanto: $\boxed{D_{mín} = 4{,}0 \text{ m}}$

**46.** (UFPE) Uma pedra preciosa cônica, de 15,0 mm de altura e índice de refração igual a 1,25, possui um pequeno ponto defeituoso sobre o eixo do cone a 7,50 mm de sua base. Para esconder esse ponto de quem olha de cima, um ourives deposita um pequeno círculo de ouro na superfície. A pedra preciosa está incrustada em uma joia de forma que sua área lateral não está visível. Qual deve ser o menor raio **r**, em mm, do círculo de ouro depositado pelo ourives?

**47.** Alguns alunos contaram a um professor de Física que os mostradores de seus relógios pareciam belos espelhos quando observados de certas posições, durante um mergulho. Aberta a discussão para a análise do fenômeno, um aluno lembrou que sob o vidro do mostrador existe ar e que o fenômeno era devido à reflexão total na interface vidro-ar.

Determine para que valores do ângulo de incidência **i** ocorre o fenômeno descrito.
**Dados:** índice de refração do ar = 1,0;
índice de refração da água = 1,3;
índice de refração do vidro = 1,4;
sen 45° = 0,71; sen 48° = 0,74;
sen 46° = 0,72; sen 49° = 0,75;
sen 47° = 0,73; sen 50° = 0,77.

**48.** O gráfico abaixo fornece o índice de refração $n_c$ de um cristal em função do comprimento de onda da luz, $\lambda_V$, medido no vácuo. Considere $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s a velocidade de propagação da luz no vácuo.

a) Com que velocidade $v_c$ a luz de comprimento de onda $\lambda_v = 4\,000$ Å se propaga no cristal?
b) Determine o comprimento de onda $\lambda_c$ da luz de comprimento de onda $\lambda_v = 4\,000$ Å, quando se propaga no cristal.
c) Um estreito feixe cilíndrico de luz de comprimento de onda $\lambda_v = 4\,000$ Å, propagando-se no vácuo, incide na face plana de um bloco desse cristal, com ângulo de incidência $\theta_v = 30°$. Determine o ângulo de refração correspondente ($\theta_c$).

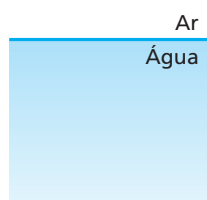
**49.** (UFPE) Um feixe de luz, ao incidir sobre uma superfície plana de um bloco de vidro, se abre num leque multicor de luz cujo ângulo de abertura **θ** é limitado pelas componentes azul e vermelha do feixe. Utilizando a tabela que dá os índices de refração do vidro em relação ao ar, para várias cores, calcule o valor de **θ**, em graus (sen 60° ≅ 0,866 e sen 45° ≅ 0,707).

| Cor | Índice de refração |
|---|---|
| Azul | 1,732 |
| Verde | 1,643 |
| Amarela | 1,350 |
| Vermelha | 1,225 |

# Bloco 3

## 13. Dioptro plano

Como você já viu:

**Dioptro plano** é um sistema constituído de dois meios transparentes de diferentes refringências, que fazem fronteira plana.

As figuras seguintes exemplificam dioptros planos:

Esquema de dioptro plano ar-água.

Esquema de dioptro plano ar-vidro.

Vamos, agora, estudar a refração no dioptro plano, considerando sempre objetos reais.

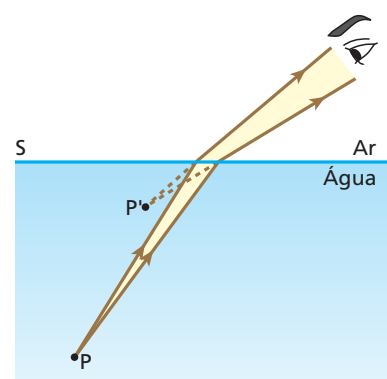
### Refração em dioptro plano

Com relação a um dioptro plano, imagine a seguinte situação: um objeto situado em um dos meios do dioptro e um observador situado no outro meio, contemplando o objeto. O observador sempre "vê o objeto" numa posição diferente da real. Na verdade, o observador não vê o objeto, mas sim uma **imagem** dele conjugada pelo dioptro. É por causa disso que, quando olhamos para uma piscina cheia de água, estando do lado de fora, temos a impressão de que ela é mais rasa e, quando olhamos para um lápis parcialmente mergulhado em água, como na fotografia a seguir, temos a impressão de que ele está dobrado.

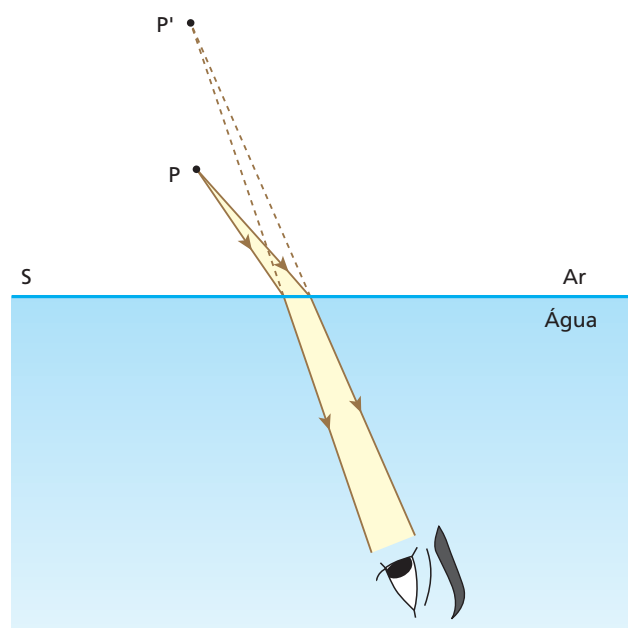
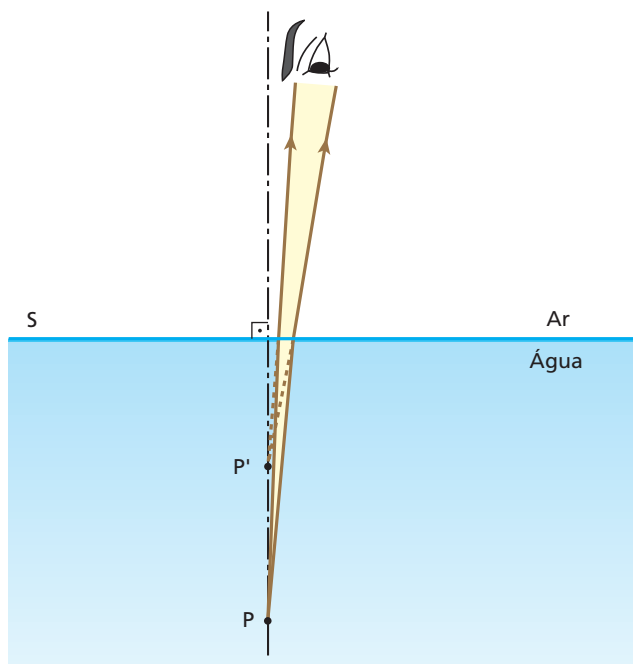
### Objeto no meio mais refringente e observador no meio menos refringente

Considere um observador no ar (meio menos refringente) contemplando um objeto **P** imerso na água (meio mais refringente). Obviamente, para o observador ver o objeto, é necessário que a luz proveniente do objeto atinja os seus olhos.

Alamy/Diomedia

O lápis parece ter uma dobra na superfície da água.

Em relação à superfície dióptrica **S**, o ponto **P** é um ponto objeto real e o ponto **P'** é um ponto imagem virtual. O observador enxerga **P'**, que se comporta como um ponto objeto real em relação a ele.

Note que o observador "enxerga o ponto objeto **P**" aparentemente elevado em relação à sua verdadeira posição. Assim, quando estamos no ar e "vemos um peixe" dentro da água, o peixe está, na realidade, abaixo da posição em que "é visto".

No caso particular em que o observador está sobre a reta perpendicular à superfície dióptrica passando pelo objeto **P**, ou nas vizinhanças dessa reta, isto é, se os ângulos de incidência e refração são pequenos, a imagem **P'** é vista aproximadamente sobre essa mesma reta:

Em relação à superfície dióptrica **S**, o ponto **P** é um ponto objeto real e o ponto **P'** é um ponto imagem virtual. O observador enxerga **P'**, que se comporta como um ponto objeto real em relação a ele.

Cristina Xavier

Uma moeda no fundo de um copo cheio de água parece estar mais próxima do observador que uma moeda igual no fundo de um copo sem água.

**Notas:**

- Para um objeto real, o dioptro plano sempre conjuga uma imagem virtual.
- Para diferentes pincéis de luz provenientes de **P**, o dioptro plano conjuga imagens **P'** em diferentes posições, tratando-se, portanto, de um sistema astigmático. Por isso, a posição em que um observador vê **P'** depende da posição desse observador.
- Nos dois casos analisados, observa-se uma elevação aparente do objeto.

### Objeto no meio menos refringente e observador no meio mais refringente

Considere um observador na água (meio mais refringente) contemplando um objeto **P** situado no ar (meio menos refringente).

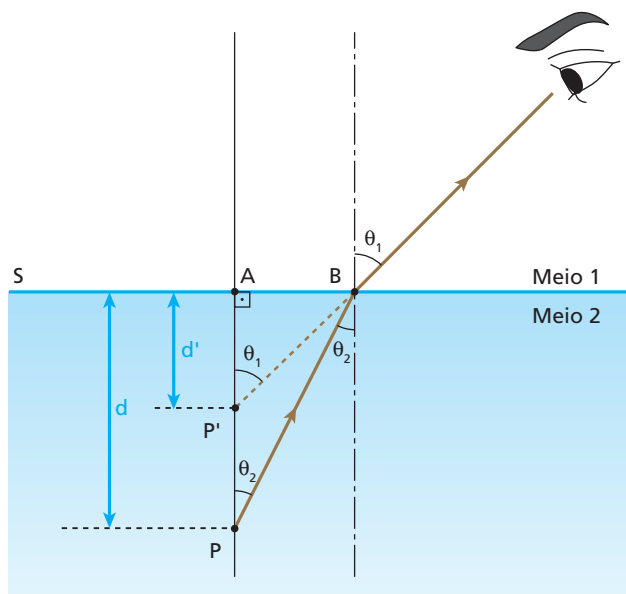
Note que, também aqui, o observador "enxerga o objeto **P**" aparentemente elevado em relação à sua verdadeira posição. Assim, quando estamos dentro da água e "vemos um avião", ele está, na realidade, abaixo da posição em que "é visto".

Também nesse caso, **P** e **P'** situam-se aproximadamente em uma mesma reta vertical quando o observador está nas vizinhanças dessa reta.

## Equação do dioptro plano para pequenos ângulos de incidência

Você vai conhecer agora uma relação quantitativa entre a posição real de um objeto e sua posição aparente, num caso particular.

Para isso, considere um dioptro plano constituído pelos meios 1 e 2 e suponha que o meio 2 seja o mais refringente ($n_2 > n_1$). Admita que as observações sejam feitas sobre a reta perpendicular à superfície dióptrica passando pelo objeto ou nas suas vizinhanças, ou seja, considere pequenos ângulos de incidência e refração. Apesar disso, faremos a figura básica para a obtenção da equação do dioptro usando ângulos grandes para que os detalhes geométricos possam ser mais facilmente percebidos.

Na figura abaixo, um objeto **P** situado no meio 2 é observado do meio 1.

Nessa figura, os triângulos retângulos PAB e P'AB permitem escrever:

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{AB}{PA} \text{ e tg } \theta_1 = \frac{AB}{P'A}$$

Dividindo tg $\theta_2$ por tg $\theta_1$, obtemos:

$$\frac{\text{tg } \theta_2}{\text{tg } \theta_1} = \frac{P'A}{PA}$$

Como P'A é a distância **d'** da imagem **P'** à superfície dióptrica **S** e PA é a distância **d** do objeto **P** a essa superfície, temos:

$$\frac{\text{tg } \theta_2}{\text{tg } \theta_1} = \frac{d'}{d} \text{ (I)}$$

Pela Lei de Snell, temos:

$$\frac{\text{sen } \theta_2}{\text{sen } \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \text{ (II)}$$

Para pequenos valores de $\theta_1$ e $\theta_2$, valem as seguintes aproximações:

$$\text{tg } \theta_1 \cong \text{sen } \theta_1$$

$$\text{tg } \theta_2 \cong \text{sen } \theta_2$$

Assim, as expressões (I) e (II) conduzem a:

$$\frac{d'}{d} = \frac{n_1}{n_2}$$

Observando que $n_2$ é o índice de refração do meio onde o raio de luz se origina e que $n_1$ é o índice de refração do meio para o qual o raio se destina, podemos escrever a Equação do Dioptro Plano:

$$\frac{d'}{d} = \frac{n_{destino}}{n_{origem}}$$

Essa equação, dentro da condição em que foi deduzida, vale tanto para objeto no meio mais refringente e observador no meio menos refringente como para o caso contrário.

**Nota:**

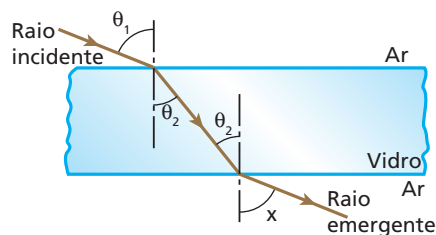
- A tabela abaixo justifica a aproximação que fizemos para pequenos ângulos:

| Ângulo | Seno | Tangente |
|---|---|---|
| 0° | 0 | 0 |
| 2° | 0,03490 | 0,03492 |
| 4° | 0,06976 | 0,06993 |
| 6° | 0,10453 | 0,10510 |
| 8° | 0,13917 | 0,14054 |
| 10° | 0,17365 | 0,17633 |
| 60° | 0,86603 | 1,73205 |

## 14. Lâmina de faces paralelas

### Trajeto da luz ao atravessar a lâmina

Considere uma lâmina transparente, de vidro, por exemplo, limitada por duas faces planas e paralelas. A situação de maior interesse é aquela em que a lâmina é envolvida por um único meio transparente, como, por exemplo, o ar.

A figura abaixo representa uma lâmina de vidro de faces paralelas e a trajetória de um raio de luz monocromática que a atravessa.

Sendo $\theta_1$ o ângulo de incidência na lâmina, vamos determinar o ângulo de emergência **x**.

Na primeira refração, isto é, na passagem da luz do ar para o vidro, temos, pela Lei de Snell:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{n_{vidro}}{n_{ar}} \qquad \text{(I)}$$

Na segunda refração, isto é, na passagem da luz do vidro para o ar, a Lei de Snell nos permite escrever:

$$\frac{\text{sen } \theta_2}{\text{sen x}} = \frac{n_{ar}}{n_{vidro}} \Rightarrow \frac{\text{sen x}}{\text{sen } \theta_2} = \frac{n_{vidro}}{n_{ar}} \qquad \text{(II)}$$

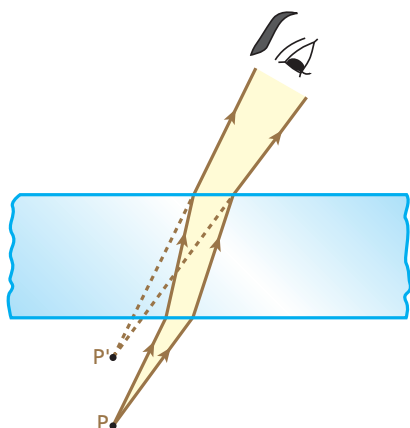
Comparando as expressões (I) e (II), obtemos:

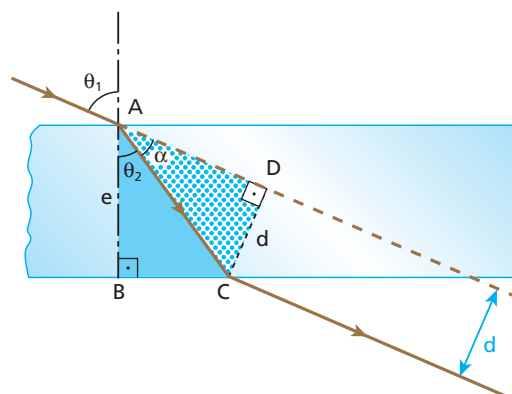
$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{\text{sen x}}{\text{sen } \theta_2} \Rightarrow \boxed{x = \theta_1}$$

Portanto, o ângulo de incidência na lâmina é igual ao ângulo de emergência, o que também pode ser concluído a partir da reversibilidade da luz. Isso traz uma importante consequência:

Numa lâmina de faces paralelas envolvida por um único meio, o raio emergente é **paralelo** ao raio incidente. Assim, o raio emergente não apresenta desvio em relação ao raio incidente, mas apenas um deslocamento lateral.

**Notas:**

- Observe que a lâmina de faces paralelas é um sistema óptico que resulta da associação de dois dioptros planos de superfícies dióptricas paralelas.
- Se o raio incidente na lâmina for perpendicular às suas faces, ele a atravessará sem sofrer deslocamento lateral.
- A igualdade entre o ângulo de incidência e o ângulo de emergência também pode ser deduzida a partir da reversibilidade da luz.
- Quando observamos um objeto através de uma lâmina de faces paralelas, o que vemos, na realidade, é sua imagem virtual conjugada pela lâmina. Essa imagem comporta-se como objeto real em relação aos nossos olhos. A figura abaixo ilustra esse fato, em que devemos notar, também, que a imagem **P'** está mais próxima da lâmina que o objeto **P**.

## Cálculo do deslocamento lateral

A figura a seguir representa uma lâmina de vidro de faces paralelas imersa no ar e a trajetória de um raio de luz monocromática que experimenta um deslocamento lateral **d** ao atravessá-la. A espessura da lâmina é igual a **e**.

No triângulo retângulo ABC, temos:

$$\cos \theta_2 = \frac{e}{AC} \Rightarrow AC = \frac{e}{\cos \theta_2} \qquad \text{(I)}$$

No triângulo retângulo ADC, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{d}{AC}$$

Sendo:

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2$$

vem:

$$\text{sen } (\theta_1 - \theta_2) = \frac{d}{AC}$$

$$d = AC \text{ sen } (\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

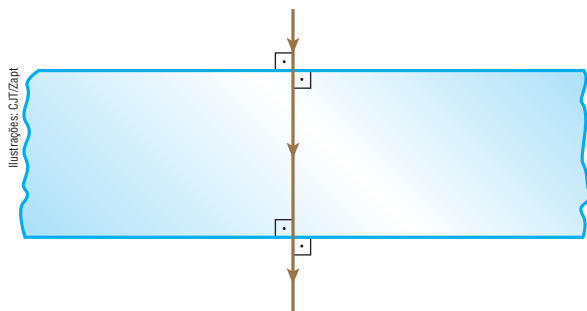
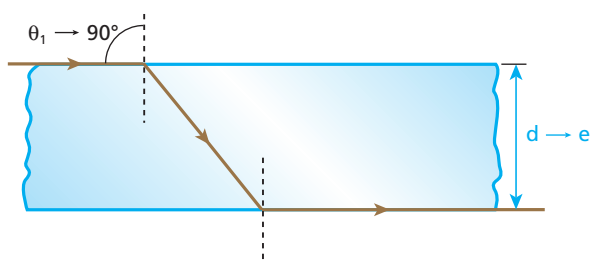
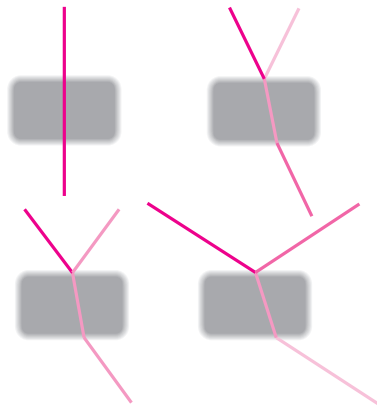
$$d = \frac{e}{\cos \theta_2} \cdot \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)$$

$$d = \frac{e \text{ sen } (\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2}$$

Observe que a dedução da fórmula do deslocamento lateral foi puramente geométrica. Dados **e** e $\theta_1$, a sua aplicação requer, antes, o cálculo do ângulo $\theta_2$, o que é feito pela Lei de Snell.

Observe também que, para valores determinados de $\theta_1$ e de $\theta_2$, o deslocamento lateral é proporcional à espessura da lâmina.

**Notas:**

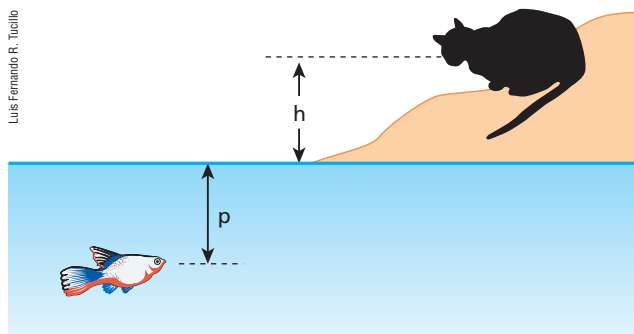
- Se $\theta_1 = 0$, então $\theta_2 = 0$ e $d = 0$.

- Se $\theta_1$ tende a 90°, então o deslocamento lateral **d** tende a **e**, situação em que o deslocamento lateral é máximo.

- Vamos observar as representações esquemáticas de luz monocromática incidindo na face superior de uma lâmina de faces paralelas.

Nessas figuras, podemos observar três fatos importantes:

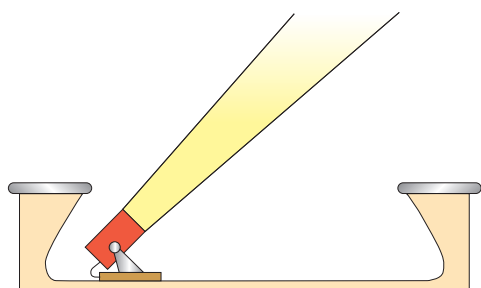
I) O filete de luz emergente por refração é paralelo ao filete incidente ou está alinhado com ele.

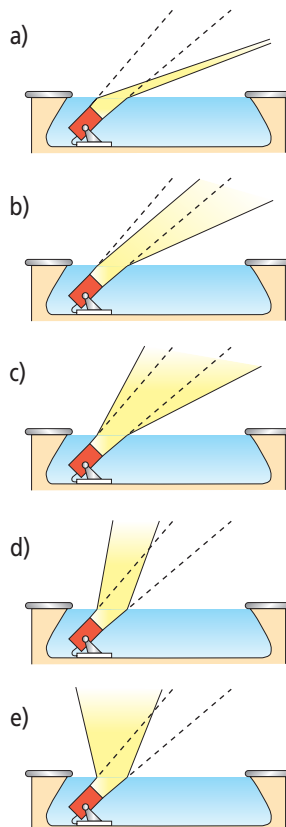
II) Quando o ângulo de incidência aumenta, o deslocamento lateral (**d**) também aumenta.

III) Quando o ângulo de incidência aumenta, aumenta também a quantidade de luz refletida, como já mencionamos.

## Exercícios nível 1

**50.** Na figura a seguir, em relação à superfície da água:

a) o peixe vê o gato a uma altura maior ou menor que **h**?
b) o gato vê o peixe a uma profundidade maior ou menor que **p**?

**51.** (UFSCar-SP) Um canhão de luz foi montado no fundo de um laguinho artificial. Quando o lago se encontra vazio, o feixe produzido corresponde ao representado na figura.

Quando cheio de água, uma vez que o índice de refração da luz na água é maior que no ar, o esquema que melhor representa o caminho a ser seguido pelo feixe de luz é:

a)
b)
c)
d)
e)

**52.** No fundo de uma piscina, há uma pedrinha a 2,0 m de profundidade. Considerando igual a $\frac{4}{3}$ o índice de refração da água, qual a profundidade aparente dessa pedra para uma pessoa que se encontra fora da água, nas vizinhanças da vertical que passa pela pedra?

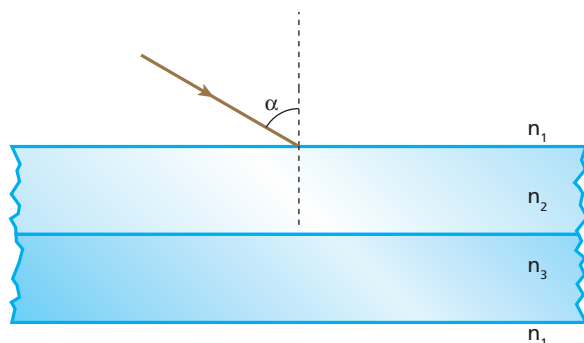
**53.** Um mergulhador imerso nas águas de um lago observa um avião no instante em que ambos estão aproximadamente na mesma vertical. O avião está 300 m acima da superfície da água, cujo índice de refração é igual a $\frac{4}{3}$. A que altura da superfície da água o avião aparenta estar em relação ao mergulhador?

**54.** (Fuvest-SP) Um pássaro sobrevoa em linha reta e a baixa altitude uma piscina em cujo fundo se encontra uma pedra. Podemos afirmar que:

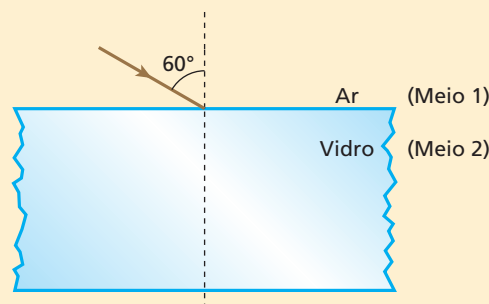
a) com a piscina cheia, o pássaro poderá ver a pedra durante um intervalo de tempo maior do que se a piscina estivesse vazia.
b) com a piscina cheia ou vazia, o pássaro poderá ver a pedra durante o mesmo intervalo de tempo.
c) o pássaro somente poderá ver a pedra enquanto estiver voando sobre a superfície da água.
d) o pássaro, ao passar sobre a piscina, verá a pedra numa posição mais profunda do que aquela em que ela realmente se encontra.
e) o pássaro nunca poderá ver a pedra.

**55.** Um raio de luz monocromática propaga-se no ar e incide numa lâmina de vidro de faces paralelas, totalmente envolvida pelo ar. Pode-se afirmar que:

a) o raio emergente tem direção diferente da direção do raio incidente.
b) pode ocorrer reflexão total da luz na segunda incidência.
c) o raio emergente sempre se apresenta lateralmente deslocado em relação ao raio incidente.
d) o deslocamento lateral da luz pode ser maior que a espessura da lâmina.
e) o deslocamento lateral da luz fica determinado pelo ângulo de incidência, pelo índice de refração e pela espessura da lâmina.

**56.** No arranjo representado na figura, temos duas lâminas de faces paralelas transparentes e sobrepostas. Os materiais de que são feitas as lâminas têm índices de refração $n_2$ e $n_3$, enquanto o meio que envolve o sistema tem índice de refração $n_1$, tal que $n_3 > n_2 > n_1$.

Um raio luminoso monocromático incide na lâmina superior com um ângulo $\alpha$. Determine:

a) o ângulo de emergência da luz na lâmina inferior ao abandonar o conjunto de lâminas.
b) se esse ângulo de emergência depende dos materiais das lâminas, respeitadas as condições do enunciado.

**57. E.R.** Sobre uma lâmina de vidro de 4,0 cm de espessura e índice de refração $\sqrt{3}$, mergulhada no ar, incide um raio de luz monocromática, como ilustra a figura:

Calcule o deslocamento lateral do raio emergente em relação ao raio incidente.

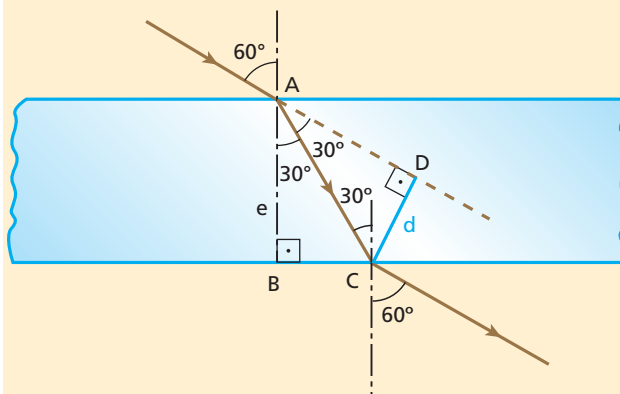
**Resolução:**

Pela Lei de Snell, calculamos o primeiro ângulo de refração:

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

Sendo $n_1 = 1$, $\text{sen } \theta_1 = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $n_2 = \sqrt{3}$, temos:

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \text{sen } \theta_2 \Rightarrow \text{sen } \theta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30°$$

Representemos, então, a trajetória do raio até que ele emerja da lâmina:

No triângulo ABC, temos e = 4,0 cm e podemos escrever:

$$\cos 30° = \frac{e}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4,0}{AC} \Rightarrow AC = \frac{8,0}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

No triângulo ADC, temos:

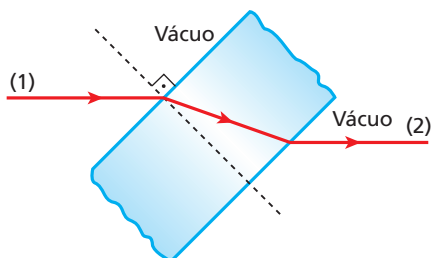
$$\text{sen } 30° = \frac{d}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{\frac{8,0}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{d = 2,3 \text{ cm}}$$

**Nota:**

- Uma vez calculado $\theta_2 = 30°$, poderíamos obter o deslocamento lateral pela aplicação direta da fórmula deduzida na teoria:

$$d = \frac{e \text{ sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} = \frac{4,0 \text{ sen } (60° - 30°)}{\cos 30°}$$

$$d = \frac{4,0 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{d = 2,3 \text{ cm}}$$

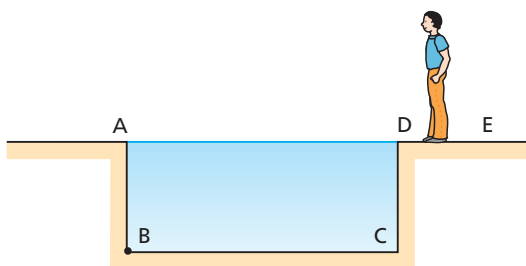
**58.** Na figura, temos uma lâmina de faces paralelas de quartzo fundido. O índice de refração do quartzo fundido é igual a 1,470 para a luz violeta e 1,455 para a luz vermelha. O raio 1, de luz monocromática vermelha proveniente do vácuo, incide na lâmina, emergindo dela segundo o raio 2:

Se o raio 1 fosse de luz monocromática violeta, o raio emergente da lâmina:

a) estaria acima do raio 2 e continuaria paralelo ao raio 1.
b) estaria abaixo do raio 2 e continuaria paralelo ao raio 1.
c) seria coincidente com o raio 2.
d) não seria paralelo ao raio 1.
e) talvez não existisse.

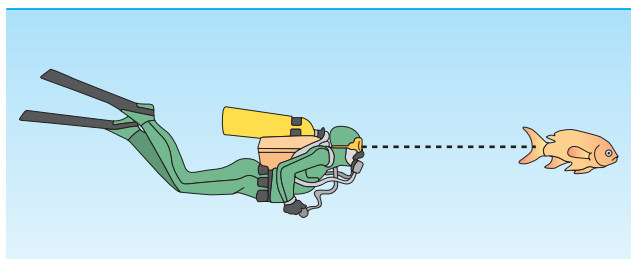
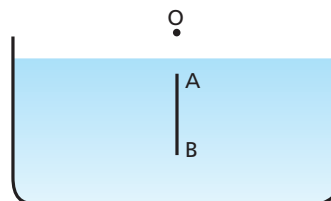
**59.** Quando observamos uma mosca através de uma vidraça comum (lâmina de faces paralelas), o que vemos, na realidade, é a imagem da mosca, conjugada pela lâmina.

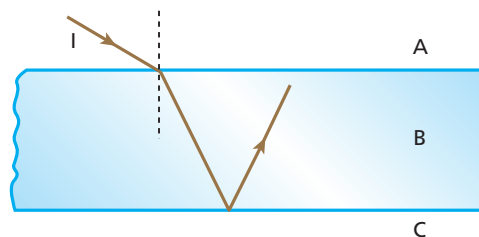
a) Essa imagem é real ou virtual?
b) A distância entre nós e a imagem é maior ou menor que a distância entre nós e a mosca?

## Exercícios nível 2

**60.** (PUC-SP) No esquema, ABCD representa uma secção transversal de um tanque de profundidade **h**, cheio de água. Um observador, inicialmente em **D**, começa a se afastar do tanque na direção DE.

Chamando de $h_1$ e de $h_2$, respectivamente, as profundidades aparentes do ponto **B**, para o observador em **D** e **E**, pode-se afirmar que:

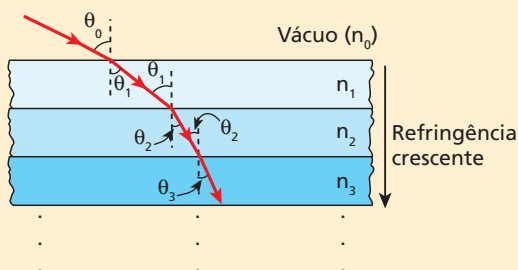
a) $h_1 = h_2 > h$.
b) $h_1 = h_2 < h$.
c) $h_1 \neq h_2$, com $h_1 > h$ e $h_2 > h$.
d) $h_1 < h_2 < h$.
e) $h_2 < h_1 < h$.

**61.** (UFRJ) Temos dificuldade em enxergar com nitidez debaixo da água porque os índices de refração da córnea e das demais estruturas do olho são muito próximos do índice de refração da água $\left(n_{\text{água}} = \frac{4}{3}\right)$. Por isso, usamos máscaras de mergulho, o que interpõe uma pequena camada de ar ($n_{ar} = 1$) entre a água e o olho. Um peixe está a uma distância de 2,0 m de um mergulhador. Suponha o vidro da máscara plano e de espessura desprezível. Calcule a que distância o mergulhador vê a imagem do peixe. Lembre-se de que para ângulos pequenos tg a $\cong$ sen a.

**62.** No esquema seguinte, um observador vê um bastão cilíndrico AB, de comprimento L = 20 cm, totalmente imerso na água $\left(\text{índice de refração igual a } \frac{4}{3}\right)$. O eixo longitudinal do bastão é perpendicular à superfície da água e o olho **O** do observador encontra-se nas vizinhanças desse eixo.

Admitindo que o meio externo ao recipiente seja o ar (índice de refração 1), calcule o comprimento aparente **L'** que o observador detecta para o comprimento do bastão. O comprimento aparente determinado para o bastão depende da distância entre sua extremidade superior e a superfície livre da água?

**63.** (Cesgranrio-RJ)

Dois meios **A** e **C** estão separados por uma lâmina de faces paralelas (**B**). Um raio luminoso **I**, propagando-se em **A**, penetra em **B** e sofre reflexão total na face que separa **B** de **C**, conforme indica a figura.

Sendo $n_A$, $n_B$ e $n_C$ os índices de refração dos meios **A**, **B** e **C**, teremos, respectivamente:

a) $n_A > n_B > n_C$.
b) $n_A > n_C > n_B$.
c) $n_B > n_A > n_C$.
d) $n_B > n_C > n_A$.
e) $n_C > n_B > n_A$.

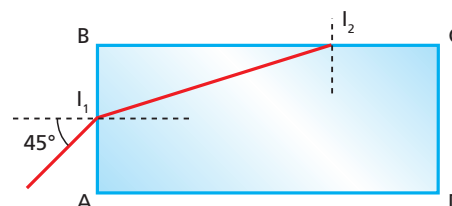
**64. E.R.** A figura representa um raio de luz monocromática incidindo **obliquamente** em uma justaposição de uma quantidade finita de lâminas de faces paralelas, cujos índices de refração crescem da primeira até a última:

Prove que é impossível o raio tornar-se perpendicular às lâminas após uma quantidade qualquer de refrações.

**Resolução:**

Consideremos a passagem do raio de uma lâmina de ordem **k** para a lâmina de ordem (k + 1). Aplicando a Lei de Snell, temos:

$$n_k \text{ sen } \theta_k = n_{k+1} \text{ sen } \theta_{k+1} \quad \text{(I)}$$

Admitindo que nessa refração o raio refratado torne-se perpendicular às lâminas, temos $\theta_{k+1} = 0$ e, consequentemente, sen $\theta_{k+1} = 0$. Substituindo esse valor na expressão (I), concluímos que $\theta_k$ também é igual a zero. Então, para que o raio refratado seja perpendicular às lâminas, o raio incidente também tem de ser. Continuando com esse raciocínio para as lâminas anteriores, até chegar à primeira, concluímos que $\theta_0$ é igual a zero, o que contraria a hipótese de que a incidência é oblíqua.

**65.** Tem-se um bloco de vidro transparente em forma de paralelepípedo reto imerso no ar. Sua seção transversal ABCD está representada na figura. Um raio de luz monocromática pertencente ao plano definido por ABCD incide em $I_1$, refratando-se para o interior do bloco e incidindo em $I_2$:

Sabendo que o índice de refração do vidro em relação ao ar vale $\sqrt{2}$:

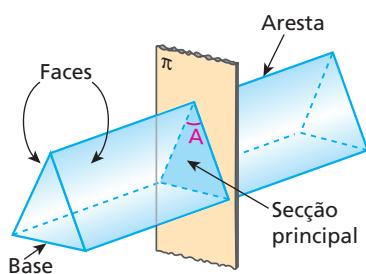
a) calcule o ângulo limite para o dioptro vidro-ar.
b) verifique o que ocorre com a luz logo após a incidência em $I_2$.

# Bloco 4

## 15. Prisma óptico

### Definição e elementos geométricos

Considere um bloco transparente, de vidro, por exemplo, limitado por duas faces planas e não paralelas. Esse bloco constitui um **prisma óptico**, que geralmente está imerso no ar.

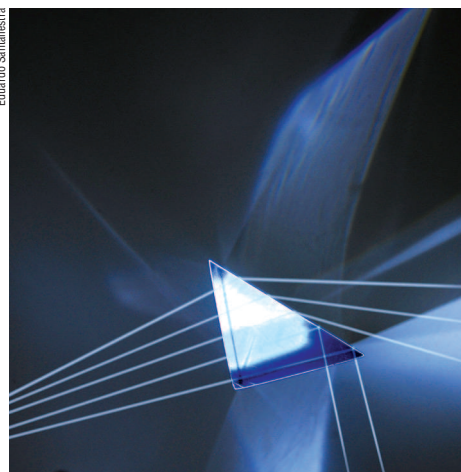
A figura abaixo ilustra um prisma óptico.

Nessa figura, destacam-se os elementos geométricos do prisma:

- **Aresta:** é a intersecção das faces planas que definem o prisma.
- **Ângulo de abertura** ou **ângulo de refringência:** é o ângulo **A** entre as faces do prisma.
- **Secção principal:** é uma secção transversal do prisma, determinada pelo plano **π** perpendicular à aresta.
- **Base:** é a terceira face do prisma, podendo ser plana ou não.

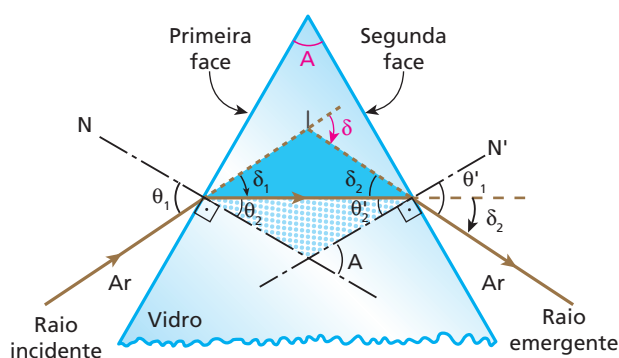
Daqui por diante, os prismas serão sempre representados por uma secção principal e sempre admitiremos que os raios de luz incidentes no prisma estejam contidos no plano de sua secção principal.

**Notas:**

- Observe que o prisma óptico é um sistema óptico que resulta da associação de dois dioptros planos de superfícies dióptricas não paralelas.
- No estudo do prisma óptico, consideramos o material do prisma sempre mais refringente que o meio que o envolve.

Eduardo Santaliestra

Pincéis cilíndricos de luz propagando-se da esquerda para a direita incidem num prisma óptico. Note que dois desses pincéis sofrem reflexão total na segunda face do prisma.

## Refração no prisma óptico

Veremos a seguir o comportamento de um raio de luz monocromática que incide em uma das faces (primeira face) de um prisma óptico imerso no ar, cuja seção principal está representada na figura e cujo índice de refração é conhecido. Suponha que ocorra emergência do raio pela segunda face. Vamos chamar de **emergência simples** esse tipo de emergência.

Nessa figura, observe que:

- na primeira refração, isto é, na passagem da luz do ar para o vidro, o ângulo de incidência é $\theta_1$ e o ângulo de refração é $\theta_2$. Nessa refração, o raio aproxima-se da reta normal **N**, sofrendo um desvio $\delta_1$. Sendo dado $\theta_1$, calculamos $\theta_2$ pela Lei de Snell. Então, obtemos $\delta_1$:

$$\delta_1 = \theta_1 - \theta_2 \qquad \text{(I)}$$

- o raio refratado na primeira refração é raio incidente na segunda face, isto é, na interface de separação dos meios, quando da passagem da luz do vidro para o ar. Nessa segunda refração, o ângulo de incidência é $\theta'_2$, o ângulo de refração é $\theta'_1$ e o raio afasta-se da reta normal **N'**, sofrendo um desvio $\delta_2$. O ângulo $\theta'_2$ é calculado com base na geometria da figura, como veremos adiante, enquanto $\theta'_1$ fica determinado pela Lei de Snell. Assim, obtemos $\delta_2$:

$$\delta_2 = \theta'_1 - \theta'_2 \qquad \text{(II)}$$

- as retas normais **N** e **N'** formam entre si o ângulo de refringência **A**, pois elas são perpendiculares às faces do prisma, que também formam um ângulo **A**;
- no triângulo pontilhado, o ângulo **A** é ângulo externo. Por isso, ele é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes (Teorema do Ângulo Externo):

$$A = \theta_2 + \theta'_2 \qquad \text{(III)}$$

Considerando que **A** é dado e que $\theta_2$ é obtido pela Lei de Snell, calculamos $\theta'_2$ por meio dessa expressão;

- o desvio total que o raio emergente apresenta em relação ao raio incidente é o ângulo $\boldsymbol{\delta}$, que é ângulo externo no outro triângulo destacado na figura. Assim, temos, pelo Teorema do Ângulo Externo, que:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \qquad \text{(IV)}$$

O desvio total, portanto, é a soma dos desvios ocorridos em cada refração.

Substituindo as expressões (I) e (II) na expressão (IV), obtemos:

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 + \theta'_1 - \theta'_2 = \theta_1 + \theta'_1 - (\theta_2 + \theta'_2)$$

De (III), vem:

$$\delta = \theta_1 + \theta'_1 - A$$

Concluímos, então, que o desvio total $\boldsymbol{\delta}$ é o resultado da seguinte expressão:

ângulo de incidência + ângulo de emergência −
− ângulo de abertura

**Notas:**

- Levando em consideração a reversibilidade da propagação da luz, note, na figura anterior, que, se o ângulo de incidência for $\theta'_1$, o ângulo de emergência será $\theta_1$ e o desvio $\boldsymbol{\delta}$ será o mesmo. Assim, o mesmo desvio $\boldsymbol{\delta}$ é obtido com dois ângulos de incidência diferentes, $\theta_1$ e $\theta'_1$.
- Nem sempre ocorre a emergência considerada na figura (emergência simples), pois pode ocorrer reflexão total do raio incidente na segunda face.

## Análise do desvio

Para um raio de luz que atravessa um prisma óptico, na situação de emergência simples, o desvio total $\boldsymbol{\delta}$ depende do ângulo de abertura, do índice de refração do prisma em relação ao meio que o circunda e do ângulo de incidência.

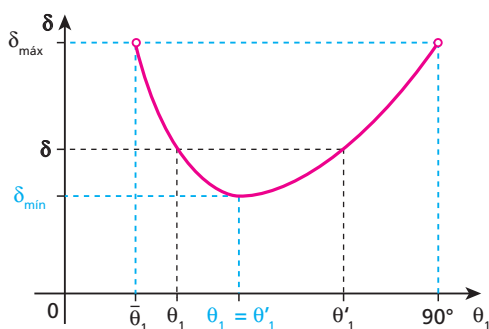
### Influência do ângulo de abertura

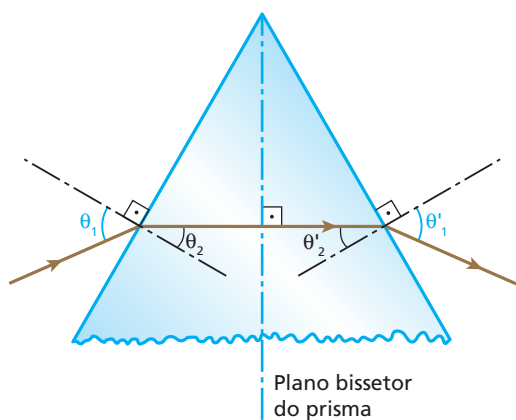
Fixando os valores do ângulo de incidência e do índice de refração, o desvio será tanto maior quanto menor for o ângulo de abertura.

### Influência do índice de refração

Fixando os valores do ângulo de incidência e do ângulo de abertura, o desvio será tanto maior quanto maior for o índice de refração do prisma em relação ao meio externo.

### Influência do ângulo de incidência

Fixando os valores do índice de refração e do ângulo de abertura, pode-se provar que o desvio (**δ**) depende do ângulo de incidência ($\theta_1$), segundo o gráfico a seguir.

Nesse gráfico, observe que:

- o mesmo desvio **δ** pode ocorrer tanto com o ângulo de incidência $\theta_1$ como com o ângulo de incidência $\theta'_1$, o que já foi justificado anteriormente com base na reversibilidade da propagação da luz;
- quando o ângulo de incidência $\theta_1$ tende a $\bar{\theta}_1$, o ângulo de emergência $\theta'_1$ tende a 90° e o desvio tende a $\delta_{máx}$;
- para valores de $\theta_1$ iguais ou inferiores a $\bar{\theta}_1$, não há emergência simples, isto é, o raio de luz sofre reflexão total na segunda face;
- o desvio mínimo $\delta_{mín}$ ocorre quando o ângulo de incidência $\theta_1$ é igual ao ângulo de emergência $\theta'_1$. Consequentemente, temos, nesse caso, que $\theta_2$ e $\theta'_2$ também são iguais. A ocorrência de desvio mínimo está ilustrada na figura a seguir:

Representação esquemática de raio de luz atravessando um prisma e experimentando o desvio mínimo. O primeiro raio refratado é perpendicular ao plano bissetor do prisma.

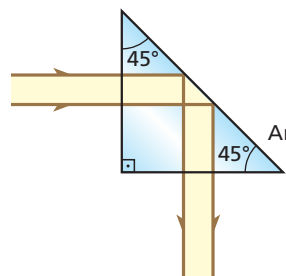
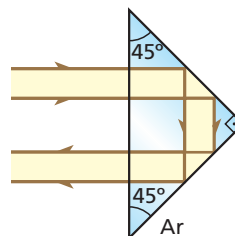
Na ocorrência do desvio mínimo:

$$\theta_1 = \theta'_1 \text{ e } \theta_2 = \theta'_2$$

**Notas:**

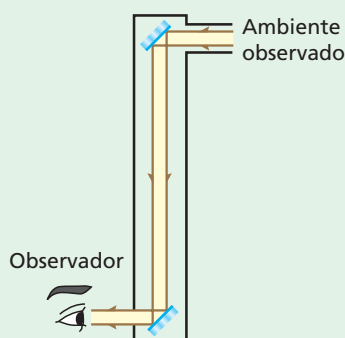
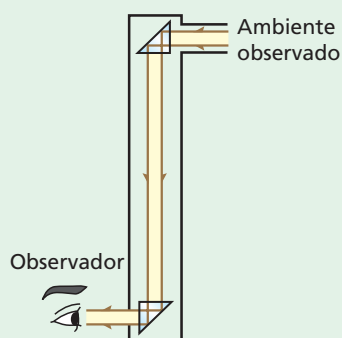
- O ângulo $\bar{\theta}_1$, que aparece no gráfico do desvio em função do ângulo de incidência, pode, dependendo do prisma, ser nulo e até mesmo negativo. Esse possível valor negativo deve ser interpretado como correspondendo a um raio incidente "do outro lado" da normal.
- Um dos importantes empregos de um prisma óptico é a determinação do índice de refração de materiais. Isso é feito construindo-se um prisma do material cujo índice de refração queremos conhecer. Seu valor é calculado com base no desvio sofrido por um filete de luz que atravessa o prisma.

## Prismas de reflexão total

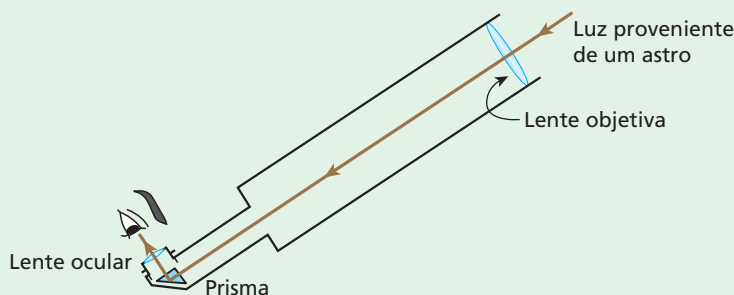
Uma das principais utilidades do prisma óptico é o seu emprego como sistema de reflexão total. Nessa operação, o prisma pode substituir com vantagens os espelhos planos, pois pode ter um poder refletor bem maior que o dos espelhos e, além disso, está livre da deterioração que ocorre na película de prata dos espelhos, por oxidação.

Representação de prisma causando desvio de 90° num pincel de luz, por reflexão total ($n_{prisma} \geq \sqrt{2}$ ).

Representação de prisma causando desvio de 180° num pincel de luz, por dupla reflexão total ($n_{prisma} \geq \sqrt{2}$ ).

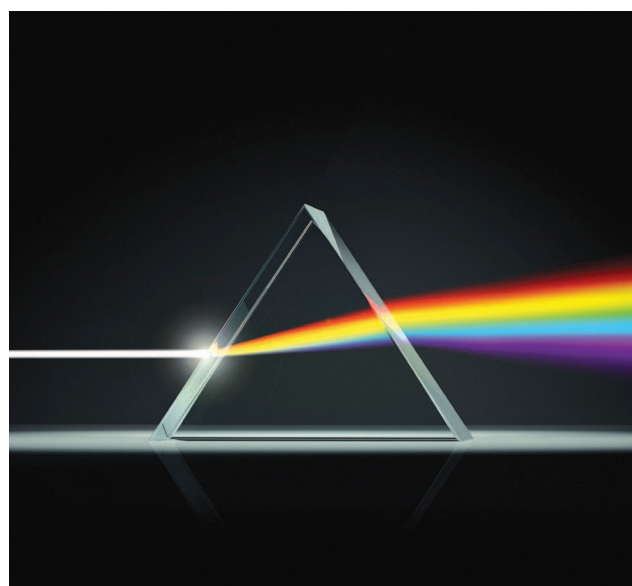
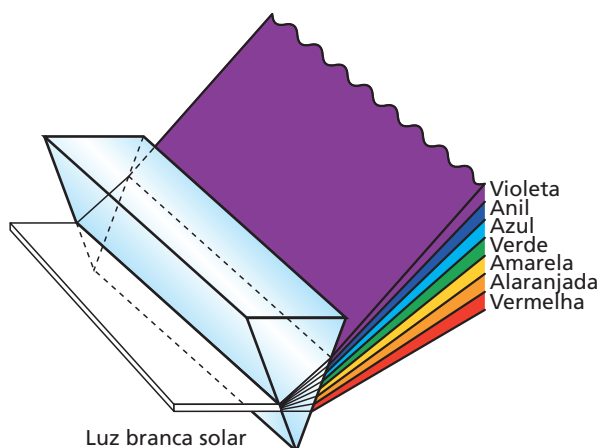
## Leitura

### Algumas aplicações dos prismas de reflexão total

O **periscópio** é um instrumento de uso mais comum em submarinos, que permite visões panorâmicas do ambiente externo ao veículo. Embora os periscópios dos submarinos sejam muito mais sofisticados, vamos esquematizar os periscópios simples, que podem ser montados com dois espelhos planos (como os periscópios usados nas trincheiras durante a Primeira Guerra Mundial) ou com dois prismas de reflexão total:

Representação de periscópio simples com espelhos planos fixados em um tubo.

Representação de periscópio simples com prismas de reflexão total fixados em um tubo.

Note que as imagens do ambiente observado não são enantiomorfas porque são produzidas por **duas** reflexões.

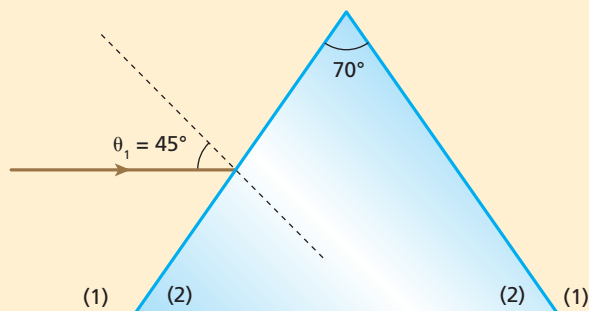
Nas **lunetas**, os prismas de reflexão total também são úteis, pois tornam mais cômodas as observações dos astros:

## Prisma e dispersão da luz

O prisma óptico é também bastante eficiente na decomposição da luz, o que está esquematizado na figura seguinte:

A imagem mostra a dispersão da luz branca num prisma óptico.

## Exercícios

nível 1

**66. E.R.** Um prisma de abertura A = 70° e índice de refração $\sqrt{2}$, imerso no ar, recebe um estreito pincel cilíndrico de luz monocromática sob ângulo de incidência $\theta_1$ igual a 45°, como representa a figura:

**Dados:** sen 40° = 0,64; sen 64° = 0,90.

Determine:

a) o desvio do pincel na primeira refração.

b) o desvio do pincel na segunda refração.

c) o desvio total.

**Resolução:**

a) Aplicando a Lei de Snell na primeira refração, temos:

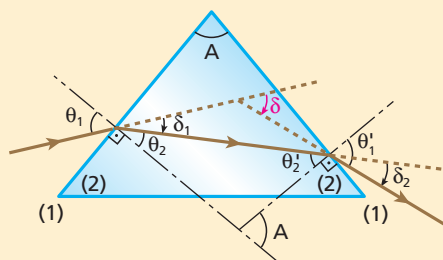
$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

Sendo $n_1 = 1$, sen $\theta_1$ = sen 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $n_2 = \sqrt{2}$, vamos calcular $\theta_2$:

$$1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \text{sen } \theta_2 \Rightarrow \text{sen } \theta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30°$$

O desvio na primeira refração é $\delta_1$, dado por:

$$\delta_1 = \theta_1 - \theta_2 = 45° - 30° \Rightarrow \boxed{\delta_1 = 15°}$$

b) Veja a trajetória de um raio do pincel até emergir do prisma:

Vamos calcular $\theta'_2$ lembrando que A = 70° e $\theta_2$ = 30°:

$$A = \theta_2 + \theta'_2 \Rightarrow 70° = 30° + \theta'_2 \Rightarrow \theta'_2 = 40°$$

Aplicando a Lei de Snell na segunda refração, temos:

$$n_2 \text{ sen } \theta'_2 = n_1 \text{ sen } \theta'_1 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot 0{,}64 = 1 \cdot \text{sen } \theta'_1$$

$$\text{sen } \theta'_1 = 0{,}90 \Rightarrow \theta'_1 = 64°$$

O desvio na segunda refração é $\delta_2$, dado por:

$$\delta_2 = \theta'_1 - \theta'_2 = 64° - 40° \Rightarrow \boxed{\delta_2 = 24°}$$

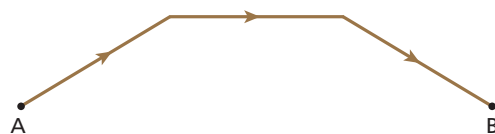
c) O desvio total é **δ**, dado por:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 15° + 24° \Rightarrow \boxed{\delta = 39°}$$

**Nota:**

- Só depois de calculado $\theta'_1$, o desvio total **δ** poderia ser obtido pela fórmula deduzida na teoria:

$$\delta = \theta_1 + \theta'_1 - A = 45° + 64° - 70° \Rightarrow \boxed{\delta = 39°}$$

**67.** Um raio de luz é emitido do ponto **A** e atravessa meios transparentes e homogêneos, atingindo o ponto **B** segundo a trajetória indicada na figura:

Qual é a quantidade mínima de meios diferentes entre **A** e **B**?

**68.** (Fuvest-SP) Um raio monocromático de luz incide no ponto **A** de uma das faces de um prisma feito de vidro e imerso no ar. A figura 1 representa apenas o raio incidente **I** e o raio refratado **R** num plano normal às faces do prisma, cujas arestas são representadas pelos pontos **P**, **S** e **T**, formando um triângulo equilátero. Os pontos **A**, **B** e **C** também formam um triângulo equilátero e são, respectivamente, equidistantes de **P** e **S**, **S** e **T**, e **T** e **P**. Considere os raios $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ e $E_5$, que se afastam do prisma, representados na figura 2:

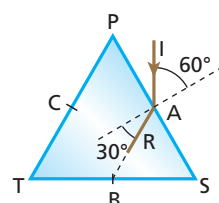



Figura 1

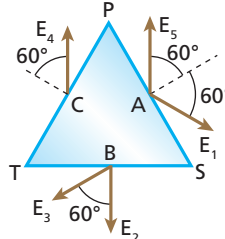



Figura 2

Podemos afirmar que os raios compatíveis com as reflexões e refrações sofridas pelo raio incidente **I**, no prisma, são:

a) somente $E_3$.

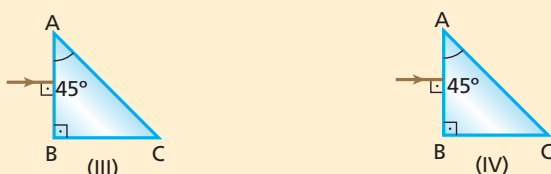
b) somente $E_1$ e $E_3$.

c) somente $E_2$ e $E_5$.

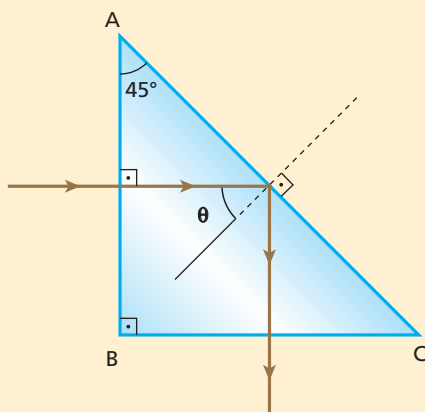
d) somente $E_1$, $E_3$ e $E_4$.

e) todos ($E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ e $E_5$).

**69. E.R.** A seguir, estão esquematizados quatro prismas de formas geométricas iguais, imersos no ar, sobre os quais incidem raios luminosos monocromáticos normais às faces AB. Os prismas são feitos de material óptico de índices de refração:

$$n_I = \frac{1{,}5}{\sqrt{2}};\ n_{II} = \frac{1{,}8}{\sqrt{2}};\ n_{III} = \frac{3}{\sqrt{2}}\ \text{e}\ n_{VI} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Em quais dos prismas não ocorre emergência de luz pela face AC?

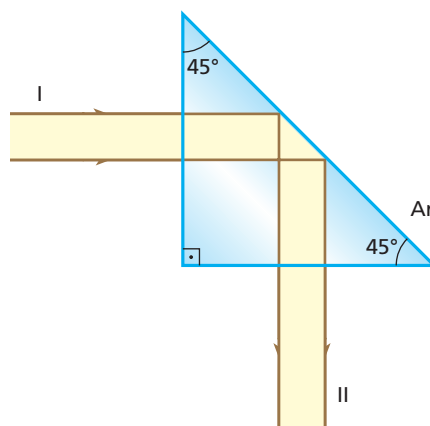
**Resolução:**

Para que não haja emergência de luz pela face AC, é preciso que a luz sofra reflexão total nessa face. Para isso, o ângulo de incidência na face AC (**θ**) deve ser maior que o ângulo limite (**L**) ou igual a ele:

Da geometria da figura, temos que **θ** é igual a 45° e devemos ter:

$$\theta \geqslant L \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \theta \geqslant \text{sen}\ L \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \theta \geqslant \frac{n_{ar}}{n_{prisma}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant \frac{1}{n_{prisma}} \Rightarrow n_{prima} \geqslant \frac{2}{\sqrt{2}}$$

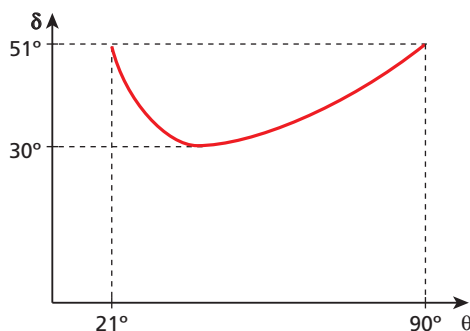
Essa condição é satisfeita pelos prismas III e IV.

**70.** A secção transversal de um prisma de vidro é um triângulo retângulo isósceles.

Para que o pincel luminoso incidente I sofra um desvio de 90° emergindo por reflexão total segundo o pincel II, qual deve ser o mínimo valor do índice de refração do vidro? Dê a resposta aproximada, com duas casas decimais.

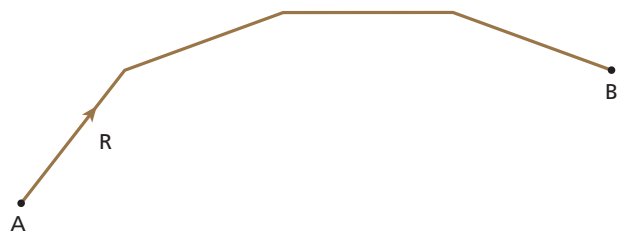
**71.** (UFMG) Um feixe de luz do Sol é decomposto ao passar por um prisma de vidro. O feixe de luz visível resultante é composto de ondas com:

a) apenas sete frequências, que correspondem às cores vermelha, alaranjada, amarela, verde, azul, anil e violeta.
b) apenas três frequências, que correspondem às cores vermelha, amarela e azul.
c) apenas três frequências, que correspondem às cores vermelha, verde e azul.
d) uma infinidade de frequências, que correspondem a cores desde a vermelha até a violeta.

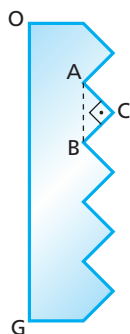
**72.** Um prisma de ângulo de refringência igual a 60° está imerso no ar. Determine o ângulo com que um raio de luz monocromática deve incidir nesse prisma para atravessá-lo sofrendo desvio mínimo. O índice de refração do prisma para essa luz é $\sqrt{2}$.

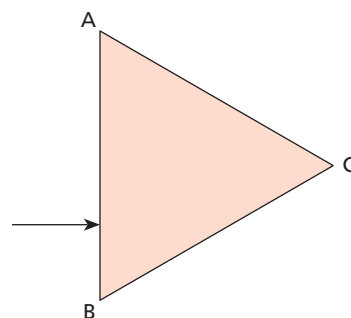
**73.** Variando-se o ângulo **θ** com que um raio de luz incide em um prisma imerso no ar, seu desvio **δ** varia conforme o gráfico a seguir:

Determine:

a) o ângulo de abertura do prisma.
b) o ângulo de incidência para que o desvio seja mínimo.
c) o índice de refração do prisma.

**74.** (UFBA) Na figura está representado um raio (**R**) de luz monocromática que se propaga de **A** até **B**.

Entre **A** e **B**, qual a mínima quantidade de meios transparentes diferentes?

**75.** (Unicamp-SP) Um tipo de sinalização utilizado em estradas e avenidas é o chamado olho-de-gato, o qual consiste na justaposição de vários prismas **retos**, feitos de plástico, que refletem a luz incidente dos faróis dos automóveis.

a) Reproduza em seu caderno o prisma **ABC** indicado na figura ao lado e desenhe a trajetória de um raio de luz que incide perpendicularmente sobre a face **OG** e sofre reflexões totais nas superfícies **AC** e **BC**.

b) Determine o mínimo valor do índice de refração do plástico, acima do qual o prisma funciona como um refletor perfeito (toda a luz que incide perpendicularmente à superfície **OG** é refletida). Considere o prisma no ar, onde o índice de refração vale 1,0.

**76.** (UFC-CE) Considere um raio de luz monocromático incidindo perpendicularmente em uma das faces (AB) de um prisma de seção reta triangular, cujos lados são do mesmo tamanho. Suponha que o prisma está mergulhado no ar e possui índice de refração absoluto **n**. Obtenha a condição sobre **n** para que haja emergência do raio de luz apenas pela face AC. Considere que o índice de refração absoluto do ar é igual a 1.

## Descubra mais

**1.** Por que, após atravessar o condensado de Bose-Einstein, onde sofreu uma enorme redução de velocidade, a velocidade da luz cresceu novamente, voltando ao enorme valor de 300 000 km/s?

**2.** É possível uma partícula mover-se em determinado meio com velocidade superior à da luz nesse meio?

**3.** Faça uma pesquisa para conhecer o Princípio de Fermat e verifique, sem necessidade de acompanhar os cálculos, que ele é outra alternativa para a demonstração da Lei de Snell.

**4.** Procure saber como foi que Isaac Newton, segundo a História, investigou, em sua casa, a decomposição da luz solar.

**5.** O arco-íris abordado neste tópico é o arco-íris **primário**. É possível, entretanto, observar outro arco-íris: o arco-íris **secundário**. Busque informações a respeito dele.

**6.** Com base na Lei Psicofísica de Weber-Fechner, citada em Acústica, procure explicar por que as baixas intensidades luminosas facilitam a percepção da cintilação.

## Exercícios nível 2

**77.** (UFC-CE) Um raio de luz monocromática passa do vácuo para um meio com índice de refração absoluto $n = \sqrt{3}$. Se o ângulo de incidência ($\theta_1$) é o dobro do ângulo de refração ($\theta_2$), determine:

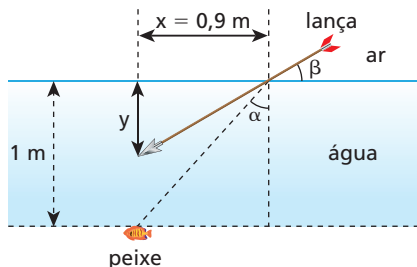
a) o valor de $\theta_1$.

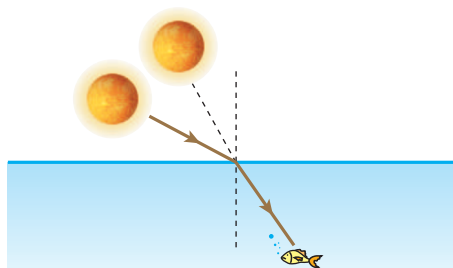
b) o intervalo de valores de **n** que possibilita essa situação, isto é, $\theta_1 = 2\theta_2$.

**78.** (Fuvest-SP) Um jovem pesca em uma lagoa de água transparente, utilizando, para isto, uma lança. Ao enxergar um peixe, ele atira sua lança na direção em que o observa. O jovem está fora da água e o peixe está 1 m abaixo da superfície. A lança atinge a água a uma distância x = 90 cm da direção vertical em que o peixe se encontra, como ilustra a figura a seguir. Para essas condições, determine:

a) O ângulo $\alpha$, de incidência na superfície da água, da luz refletida pelo peixe.

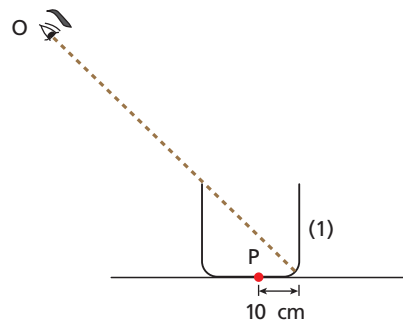
b) O ângulo $\beta$ que a lança faz com a superfície da água.

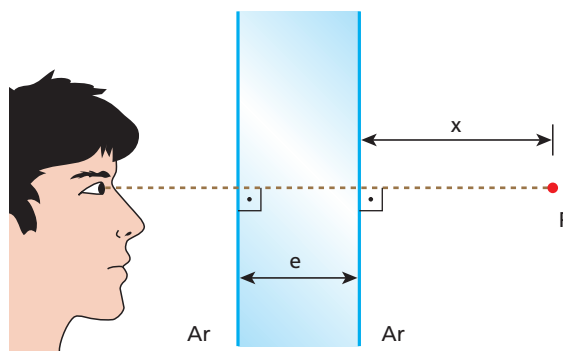
c) A distância **y**, da superfície da água, em que o jovem enxerga o peixe.

| NOTE E ADOTE<br>Índice de refração do ar = 1<br>Índice de refração da água = 1,3 | | |
|---|---|---|
| **Ângulo θ** | **sen θ** | **tg θ** |
| 30° | 0,50 | 0,58 |
| 40° | 0,64 | 0,84 |
| 42° | 0,67 | 0,90 |
| 53° | 0,80 | 1,33 |
| 60° | 0,87 | 1,73 |

**79.** Um peixe, no rio Amazonas, viu o Sol, em certo instante, 60° acima do horizonte. Sabendo que o índice de refração da água vale $\frac{4}{3}$ e que, no Amazonas, o Sol nasce às 6h e se põe às 18h, calcule que horas eram no instante em que o peixe viu o Sol:

a) considerando que o peixe estava dando o seu passeio matinal.

b) considerando que o peixe estava à procura de alimentos para a sua merenda vespertina.

**Dado:** sen 42° = 0,67

**80.** A figura representa um recipiente cúbico de paredes opacas, vazio, de 40 cm de aresta:

Na posição em que se encontra, o observador **O** não vê o fundo do recipiente, mas vê completamente a parede (1). Calcule a espessura mínima da lâmina de água que se deve despejar no recipiente para que o observador passe a ver a partícula **P**. Adote o índice de refração da água em relação ao ar igual a $\frac{4}{3}$.

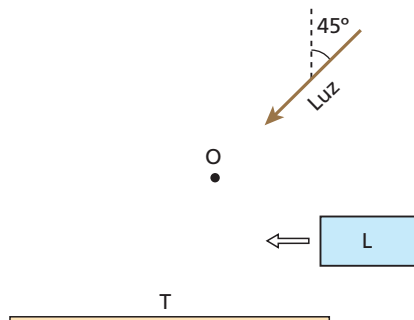
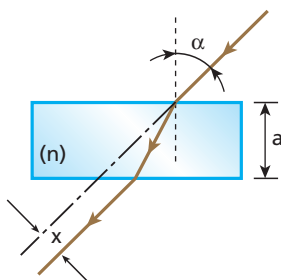
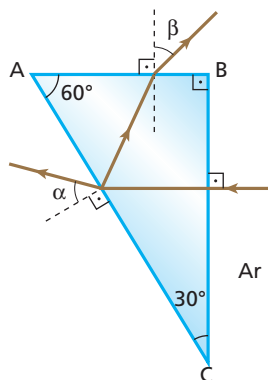
**81.** Um observador visa um ponto luminoso **P** através de uma lâmina de vidro de faces paralelas, que tem espessura **e** e índice absoluto de refração **n**. O ponto **P** está a uma distância **x** da lâmina, conforme representa a figura a seguir.

Supondo que o olho do observador esteja na mesma perpendicular às faces da lâmina que passa por **P**:

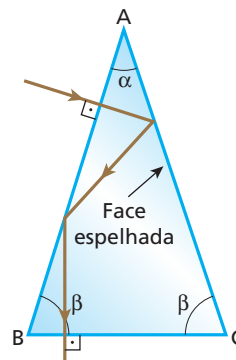
a) calcule o deslocamento **d** da imagem final percebida pelo observador em relação ao ponto **P**.

b) determine se **d** depende ou não de **x**.

**82.** Uma lâmina de faces paralelas tem 5 mm de espessura. Levada a um microscópio, verifica-se que, para passar da focalização de um ponto da superfície superior para um ponto da face inferior da lâmina, deve-se deslocar o canhão do microscópio 3 mm. Qual é o índice de refração do material de que é feita a lâmina?

**83.** (Unicamp-SP) A figura a seguir representa uma tela **T**, um pequeno objeto **O** e luz incidindo a 45° em relação à tela. Na situação da figura, o objeto **O** faz sombra sobre a tela. Colocando-se uma lâmina **L** de plástico plano, de 1,2 cm de espessura e índice de refração $n = 1,18 \cong \frac{5\sqrt{2}}{6}$, paralelamente entre a tela e o objeto, a sombra se desloca sobre a tela.

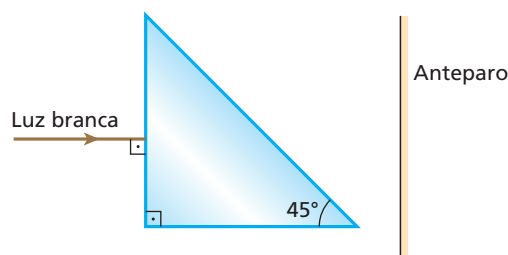
a) Em uma folha de papel, faça um esquema mostrando os raios de luz passando junto ao objeto e atingindo a tela, **com** e **sem** a lâmina de plástico.
b) Calcule o deslocamento da sombra na tela ao se introduzir a lâmina de plástico.

**84.** (ITA-SP) Um raio luminoso incide sobre uma lâmina transparente de faces paralelas, de espessura **a** e índice de refração **n**. Calcule o desvio sofrido pelo raio luminoso ao atravessar a lâmina, supondo que o ângulo de incidência, $\alpha$, seja pequeno. (Utilize as aproximações: sen $\alpha \cong \alpha$ e cos $\alpha \cong 1$.)

**85.** (UFPE) Um feixe de luz incide em um prisma imerso no ar, conforme indica a figura a seguir. Após sofrer reflexão parcial na fase AC, um feixe de menor intensidade emerge através da face AB. Determine o valor dos ângulos $\alpha$ e $\beta$, em **graus**, se o índice de refração do prisma é $n_p = \sqrt{2}$ para o comprimento de onda do feixe de luz incidente.

**86.** (Unama-PA) A figura a seguir representa a secção transversal de um prisma óptico imerso no ar, tendo dois lados iguais (AB e AC). Perpendicularmente à face AB, incide um raio luminoso monocromático que se propaga até a face espelhada AC, onde é refletido diretamente para a face AB. Ao atingir esta face, o raio luminoso sofre uma nova reflexão (reflexão total), de maneira que, ao se propagar, atinge perpendicularmente a face BC, de onde emerge para o ar. Com base nessas informações, podemos afirmar que o ângulo de refringência do prisma (ângulo $\alpha$, mostrado na figura) vale:

a) 18°.
b) 72°.
c) 45°.
d) 36°.
e) 60°.

**87.** Prove que, num prisma de pequena abertura e para pequenos ângulos de incidência (inferiores a 10°), o desvio $\delta$ sofrido pelo raio que o atravessa é dado aproximadamente por:

$$\delta = A\,(n_{2,\,1} - 1)$$

**A** é o ângulo de abertura e $n_{2,\,1}$ é o índice de refração do prisma em relação ao meio que o envolve.

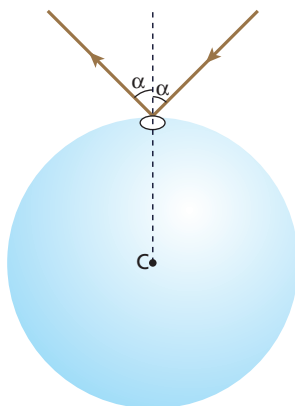
**Nota:**
- Para pequenos ângulos, os valores do seno e do ângulo, em radianos, são aproximadamente iguais.

**88.** Um pincel de luz branca incide perpendicularmente em uma das faces de um prisma, cuja secção principal está representada na figura:

O prisma está imerso no ar e seus índices de refração para sete cores componentes do pincel de luz branca são dados a seguir:

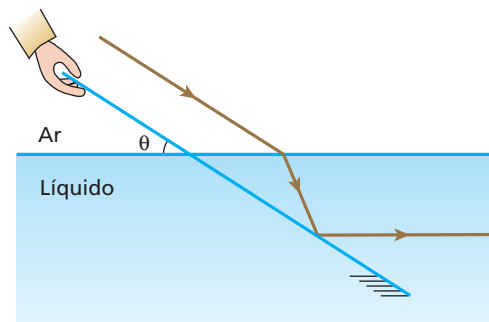
| | |
|---|---|
| Violeta | 1,48 |
| Anil | 1,46 |
| Azul | 1,44 |
| Verde | 1,42 |
| Amarela | 1,40 |
| Alaranjada | 1,39 |
| Vermelha | 1,38 |

Determine quais dessas cores emergem do prisma, atingindo o anteparo.

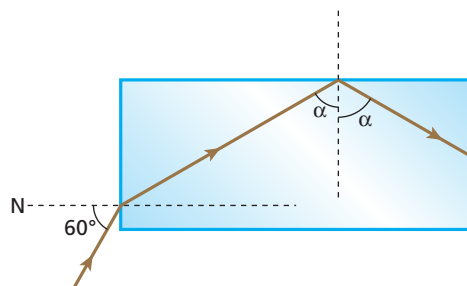
## Para raciocinar um pouco mais

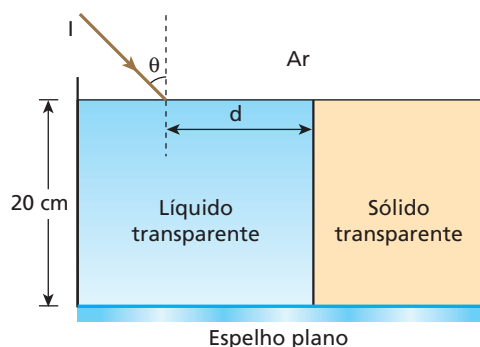
**89.** Na figura a seguir está representada uma esfera maciça de cristal, de centro **C**, raio $R = 10\sqrt{3}$ cm e índice de refração $n = \sqrt{2}$.

Mediante vaporização de alumínio, a superfície externa dessa esfera foi revestida com uma película desse metal. A face refletora especular da película ficou, então, voltada para o interior da esfera.
Apenas uma pequena região circular ficou sem revestimento. Fez-se incidir nessa região um estreito feixe cilíndrico de luz monocromática, que penetrou na esfera e, após sofrer duas reflexões em suas paredes, emergiu pelo mesmo local da penetração, simetricamente em relação ao feixe incidente (ver figura).
Sabendo-se que a esfera está no ar (índice de refração igual a 1,0) e que a velocidade de propagação da luz nesse meio é aproximadamente igual a $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s, pede-se:

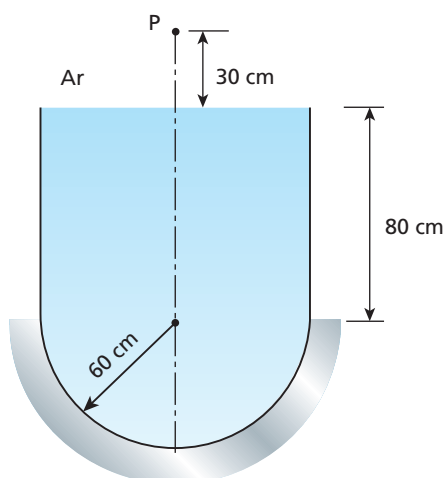
a) fazer um esboço da trajetória da luz no interior da esfera, indicando os valores dos ângulos relevantes à compreensão do esquema.
b) determinar o ângulo **α** que viabiliza a situação proposta.
c) calcular, nas condições apresentadas, quanto tempo um pulso luminoso permanece "confinado" no interior da esfera.

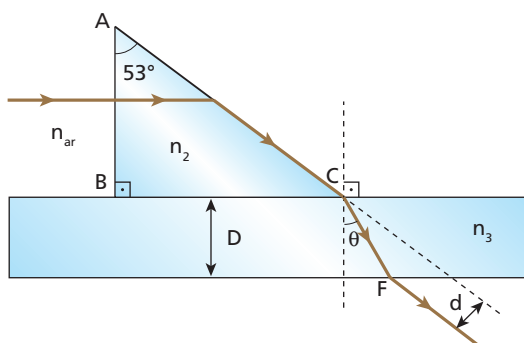
**90.** Considere um espelho plano parcialmente imerso em um líquido transparente de índice de refração absoluto igual a $n_L$. Um estreito feixe cilíndrico de luz monocromática, propagando-se no ar paralelamente à superfície refletora do espelho, refrata-se para o interior do líquido e sofre reflexão na superfície espelhada, conforme representa a figura a seguir. O índice de refração absoluto do ar vale 1.

Admitindo-se que seja conhecido o ângulo **θ** indicado e supondo-se que o feixe refletido pelo espelho seja paralelo à superfície líquida, é correto afirmar que:

a) $n_L = \text{sen}\,\theta$
b) $n_L = \text{tg}\,\theta$
c) $n_L = \text{cotg}\,\theta$
d) $n_L = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,2\theta}$
e) $n_L = \dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$

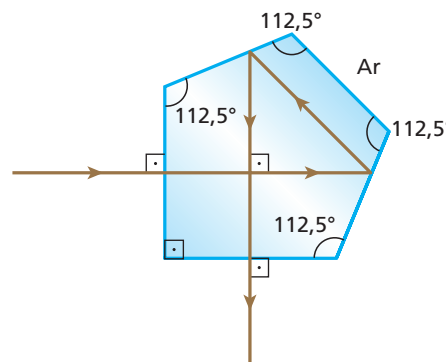
**91.** Um fator que tem sido decisivo na melhoria das telecomunicações no Brasil é a transmissão de dados digitais através de redes de fibras ópticas. Por meio desses **infodutos** de plástico ou resina transparentes, baratos e confiáveis, que hoje se acham instalados ao longo das principais rodovias do país, é possível a troca de imensos arquivos entre computadores (banda larga), integração de sistemas de telefonia, transmissão de TV etc.
Dentro de uma fibra óptica, um sinal eletromagnético propaga-se com velocidades menores que a da luz no ar, sofrendo sucessivas reflexões totais. Considere a fibra óptica esquematizada a seguir, imersa no ar, na qual é introduzido um estreito feixe cilíndrico de luz monocromática com ângulo de 60° em relação à reta normal **N** no ponto de incidência.

Para que valores do índice de refração absoluto **n** do material de que é feita a fibra as reflexões totais ocorrem?

**92.** O fundo do recipiente representado na figura é um espelho plano. O raio **I**, incidente na fronteira ar-líquido, é monocromático. Após sofrer refração nessa fronteira, o raio reflete-se no espelho e, em seguida, sofre reflexão total na interface líquido-sólido, com ângulo de incidência limite.
**Dados:** velocidade da luz no ar $= 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s; velocidade da luz no líquido $= 2{,}0 \cdot 10^8$ m/s; $\text{sen}\,\theta = 0{,}75$.

Determine:
a) o ângulo de refração θ' na interface ar-líquido.
b) a velocidade da luz no sólido.
c) o máximo valor da distância **d** indicada.

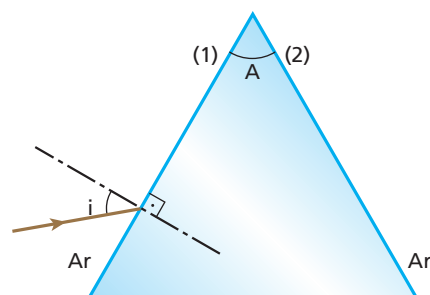
**93.** Considere um recipiente de base hemisférica polida, cheio de água. A base está externamente recoberta de prata e seu raio vale 60 cm.

Admita que apenas raios paraxiais emitidos pela fonte **P** atravessem a fronteira ar-água e incidam na superfície hemisférica, que produz a imagem **P'**. Supondo o índice de refração da água igual a $\frac{4}{3}$, determine a posição de **P'** em relação à superfície livre da água.

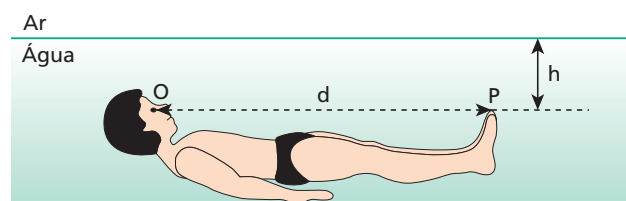
**94.** (Olimpíada Brasileira de Física) Um raio de luz monocromático, vindo do ar, incide na face AB do prisma representado na figura e emerge rasante, paralelo à face AC, até encontrar uma lâmina de faces paralelas, justaposta à face BC.

**Dados:** $n_{ar} = 1,0$ (índice de refração do ar);
$n_3 = 1,6$ (índice de refração do material da lâmina de faces paralelas);
$D = 2,0$ cm (espessura da lâmina de faces paralelas);
$c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s (velocidade da luz no ar);
sen 53° = 0,80; sen 37° = 0,60;
sen 23° = 0,40; cos 30° = 0,87.

Determine:
a) a velocidade da luz no interior do prisma.
b) o ângulo de refração **θ**.
c) o desvio lateral **d** sofrido pelo raio de luz.

**95.** A figura a seguir esquematiza a trajetória de um estreito feixe cilíndrico de luz monocromática que sofre um desvio de 90° ao atravessar um prisma pentagonal de Goulier, que é utilizado em alguns modelos de câmeras fotográficas. Nesse prisma, a luz incide normalmente em uma das faces, sofre duas reflexões totais e emerge também normalmente em outra face, perpendicular à face de entrada.

| **Ângulo** (graus) | **Seno** |
|---|---|
| 90,0 | 1,00 |
| 67,5 | 0,92 |
| 45,0 | 0,71 |
| 22,5 | 0,38 |

Sendo 1,00 o índice de refração do ar, determine o índice de refração do prisma ($n_p$) para que a luz siga a trajetória indicada.

**96.** Um raio de luz monocromática incide na face (1) de um prisma de ângulo de refringência **A** e índice de refração **n**, imerso no ar, como indica a figura:

Prove que, para ocorrer a emergência do raio pela face (2), devem ser satisfeitas as seguintes condições:
I. $A < 2\,L$, em que **L** é o ângulo limite na fronteira prisma-ar;
II. $\text{sen } i > \dfrac{\text{sen}(A - L)}{\text{sen } L}$.

**97.** Na situação esquematizada a seguir, um homem encontra-se mergulhado em uma piscina, de modo que seu olho, **O**, está alinhado com a extremidade superior de seu pé, **P**, segundo uma reta paralela à superfície da água, admitida plana e horizontal.

Sendo **n** o índice de refração da água em relação ao ar e **d** a distância entre **O** e **P**, determine o maior valor possível para a profundidade **h** de modo que o homem ainda possa visualizar a imagem especular de **P** com brilho de máxima intensidade.

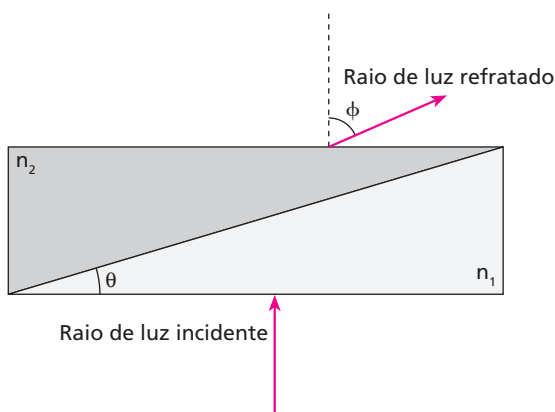
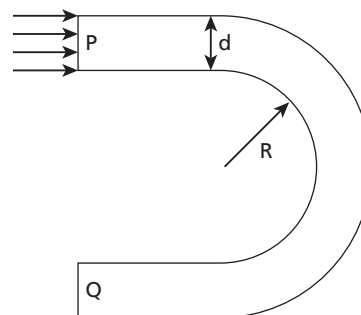
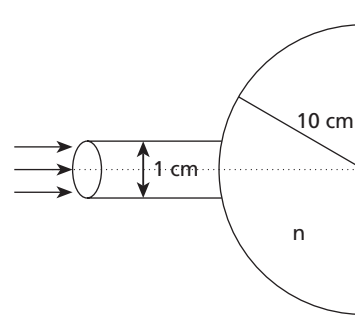
a) $h = d\sqrt{n^2 - 1}$

b) $h = \frac{d}{2}\sqrt{n^2 - 1}$

c) $h = \frac{d}{4}\sqrt{n^2 - 1}$

d) $h = \frac{d}{2}\sqrt{n^2 + 1}$

e) $h = \frac{d}{4}\sqrt{n^2 + 1}$

**98.** (Olimpíada Paulista de Física) Dois prismas de geometria idêntica, mas índices de refração ligeiramente diferentes ($n_1$ e $n_2$), são acoplados na forma da figura. Quando um raio de luz *laser* atinge a base de um dos prismas perpendicularmente a sua superfície, o raio de luz refratado é levemente desviado de um pequeno ângulo $\phi$, conforme a figura. Determine a diferença entre os índices de refração dos dois prismas como função de $\theta$ e $\phi$. Considere que estão medidos em radianos e que o meio externo é o vácuo. Considere os ângulos pequenos tal que sen ($\theta$) = $\theta$ e sen ($\phi$) = $\phi$.

**99.** (ITA-SP) Um tarugo de vidro de índice de refração $n = \frac{3}{2}$ e seção transversal retangular é moldado na forma de uma ferradura, como ilustra a figura. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre a superfície plana **P**. Determine o valor mínimo da razão $\frac{R}{d}$ para o qual toda a luz que penetra pela superfície **P** emerja do vidro pela superfície **Q**.

**100.** (ITA-SP) Um hemisfério de vidro maciço de raio de 10 cm e índice de refração $n = \frac{3}{2}$ tem sua face plana apoiada sobre uma parede, como ilustra a figura.

Um feixe colimado de luz de 1 cm de diâmetro incide sobre a face esférica, centrado na direção do eixo de simetria do hemisfério. Valendo-se das aproximações de ângulos pequenos, sen $\theta \cong \theta$ e tg $\theta \cong \theta$, o diâmetro do círculo de luz que se forma sobre a superfície da parede é de

a) 1 cm  b) $\frac{2}{3}$ cm  c) $\frac{1}{2}$ cm  d) $\frac{1}{3}$ cm  e) $\frac{1}{10}$ cm

# Tópico 4

# Lentes esféricas

## Bloco 1

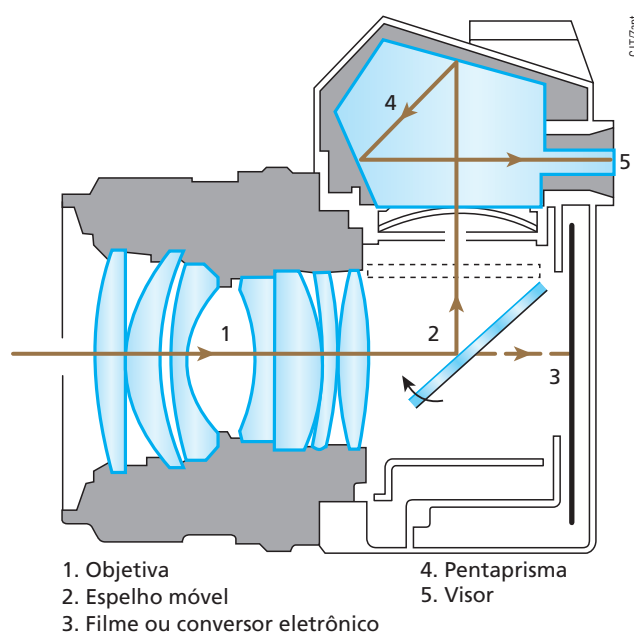
### 1. Um componente essencial

Não se sabe ao certo quando surgiram as primeiras lentes. Há relatos de que no século VIII a.C. utilizavam-se determinados cristais polidos capazes de produzir imagens ampliadas de objetos. A partir do século XIII, porém, iniciou-se na Itália a fabricação regular de lentes, destinadas principalmente à correção visual. Teria sido o florentino Salvino D'Armato, em 1285, o primeiro fornecedor do que hoje chamamos de óculos.

As lentes são um componente óptico de vital importância, participando individual ou coletivamente de quase todos os instrumentos ópticos. Fazendo-se uma comparação, poderíamos dizer que as lentes estão para a Óptica assim como os *chips* eletrônicos estão para os computadores. Em microscópios, lunetas, telescópios, câmeras fotográficas e outros utensílios, as lentes se fazem presentes, sempre exercendo funções essenciais. O que muda de um caso para o outro é o tipo da lente utilizada, o que é caracterizado pelo material de que ela é feita, suas dimensões e seu "grau" (vergência).

Image100/Diomedia

Nesta fotografia, você observa um amontoado de lentes de diversos materiais, formatos e "graus". Dependendo da maneira como elas forem arranjadas, podem ser construídos instrumentos ópticos de grande importância, como microscópios, lunetas, telescópios e câmeras em geral.

CJT/Zapt

Esquema ilustrativo de uma câmera fotográfica. Durante o enquadramento, a luz é desviada pelo espelho (2) em direção ao pentaprisma (4). No ato do disparo, o espelho (2) é deslocado e a luz incide diretamente sobre o filme fotográfico ou conversor eletrônico (3).

As câmeras fotográficas constituem-se de diversos sistemas ópticos associados convenientemente. Nelas, podemos encontrar lentes, espelhos, prismas etc. em número que varia com o grau de sofisticação. Entretanto as lentes exercem papel primordial, pois compõem a objetiva, que é o "olho" da câmera, responsável pela projeção da imagem sobre o filme fotográfico ou o conversor eletrônico.

### 2. Classificação e elementos das lentes esféricas

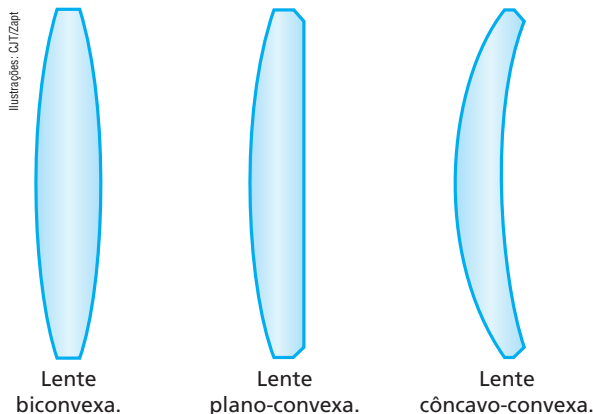
Chama-se **lente esférica** a associação de dois dioptros: um necessariamente esférico e o outro plano ou esférico.

As lentes são corpos transparentes, geralmente fabricados em vidro, cristal ou acrílico. Ao serem atravessadas pela luz, fazem com que ela sofra duas refrações.

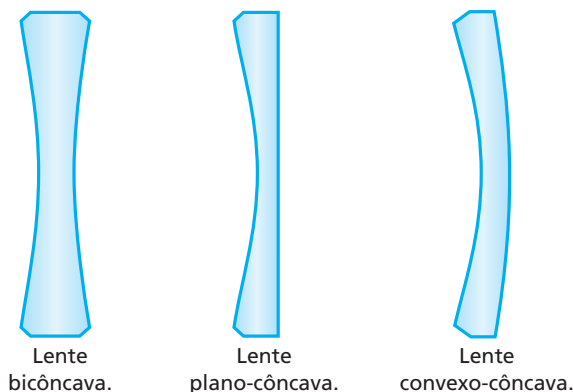
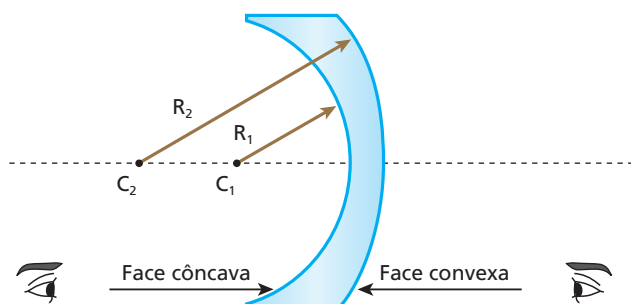
As lentes esféricas classificam-se em duas grandes categorias, dependendo da espessura da região periférica comparada à espessura da região central: **lentes de bordas finas** e **lentes de bordas grossas**.

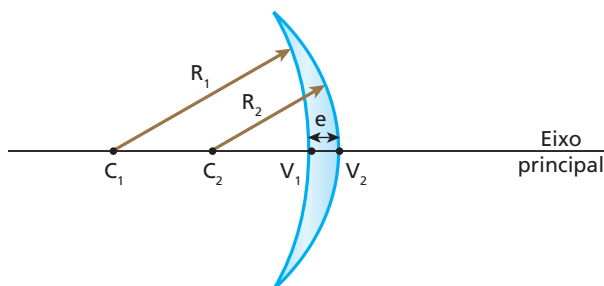
## Lentes de bordas finas

Nesta categoria, figuram três tipos de lente:

Lente biconvexa. Lente plano-convexa. Lente côncavo-convexa.

## Lentes de bordas grossas

Nesta categoria, também figuram três tipos de lente:

Lente bicôncava. Lente plano-côncava. Lente convexo-côncava.

Repare que na nomenclatura das lentes esféricas uma face é denominada convexa, plana ou côncava em relação a um observador **externo** à lente. Além disso, menciona-se, em primeiro lugar, o nome da face de **maior raio de curvatura**.

Nesse exemplo, como $R_2 > R_1$, o nome da lente é **convexo-côncava**.

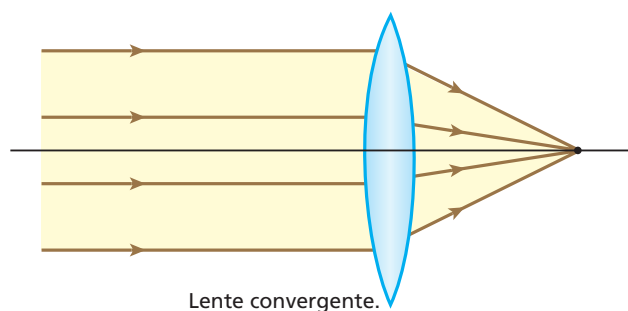
Observe, a seguir, a representação de uma lente esférica com seus principais elementos geométricos.

- $C_1$ e $C_2$ são os centros de curvatura das faces da lente.
- $R_1$ e $R_2$ são os raios de curvatura das faces da lente.
- A reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ é o eixo principal (ou eixo óptico) da lente. Esse eixo é normal às faces da lente.
- O segmento $\overline{V_1V_2}$ determina a espessura (**e**) da lente.

Em nossos estudos, exceto quando houver recomendação contrária, consideraremos as lentes esféricas com espessura desprezível em comparação aos raios de curvatura. As lentes que satisfazem essa condição são denominadas **lentes delgadas**. Admitiremos, ainda, que os raios incidentes são pouco inclinados e pouco afastados em relação ao eixo principal (raios paraxiais).

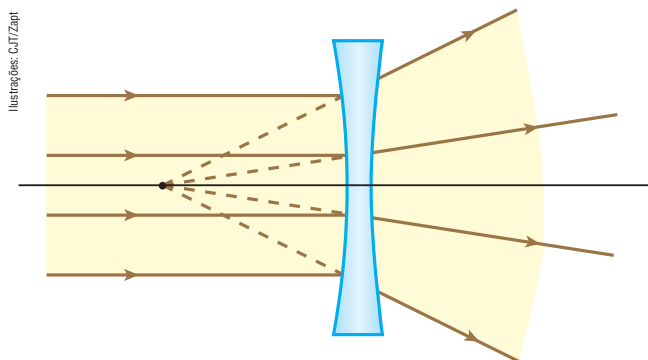
Além disso, estudaremos apenas as situações em que as duas faces da lente estão em contato com o mesmo meio. No caso mais comum, o meio que circunda a lente é o ar.

## 3. Comportamento óptico das lentes esféricas

As lentes esféricas podem apresentar dois comportamentos ópticos opostos: comportamento **convergente** e comportamento **divergente**.

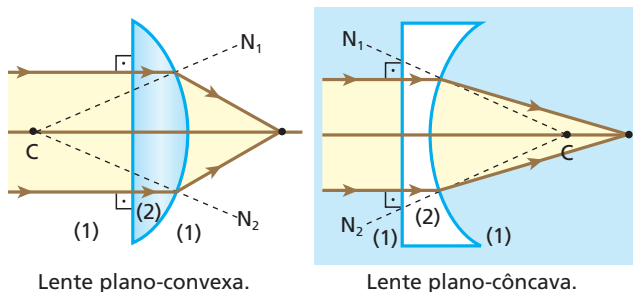
No primeiro caso, raios de luz que incidem na lente paralelamente entre si se refratam com direções que convergem para um mesmo ponto:

Lente convergente.

No segundo caso, raios de luz que incidem na lente paralelamente entre si se refratam com direções que divergem de um mesmo ponto:

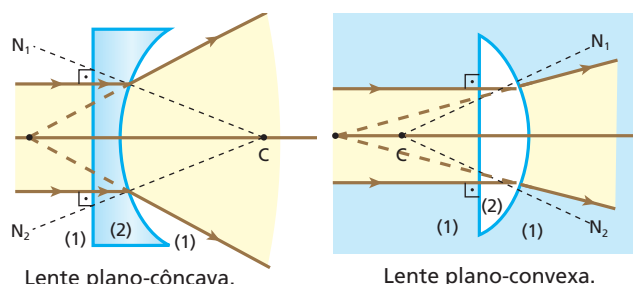
Ilustrações: CJT/Zapt

Lente divergente.

Qualquer lente esférica pode ser convergente ou divergente, dependendo de seu índice de refração em relação ao do meio externo.

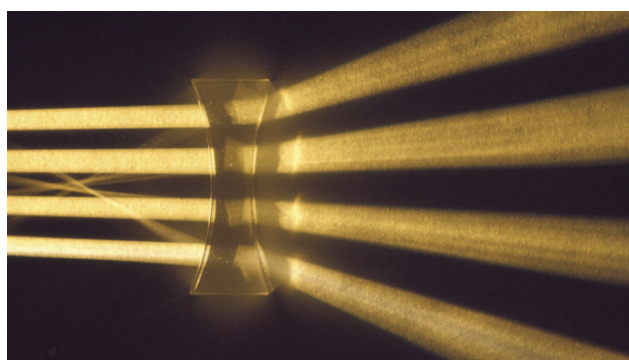
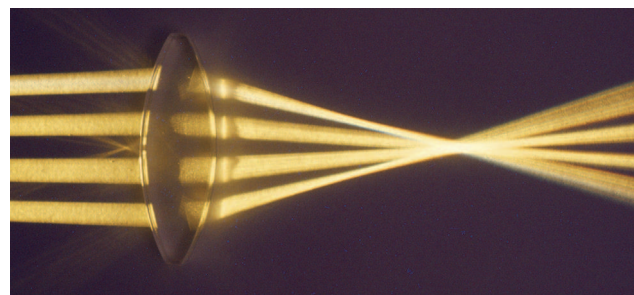
Os esquemas a seguir indicam o trajeto de raios de luz que atravessam lentes esféricas. Nos dois primeiros casos as lentes apresentam comportamento convergente e nos dois últimos comportamento divergente.

**Comportamento convergente:**

Lente plano-convexa. Lente plano-côncava.

Nesses dois casos, as lentes têm comportamento convergente. Para a lente plano-convexa, tem-se $n_2 > n_1$ (a lente é mais refringente que o meio externo); para a lente plano-côncava, $n_2 < n_1$ (a lente é menos refringente que o meio externo).

**Comportamento divergente:**

Lente plano-côncava. Lente plano-convexa.

Nesses dois casos, as lentes têm comportamento divergente. Para a lente plano-côncava, tem-se $n_2 > n_1$ (a lente é mais refringente que o meio externo); para a lente plano-convexa, $n_2 < n_1$ (a lente é menos refringente que o meio externo).

Imagens: Ruddy Gold/Grupo Keystone

Nestas fotografias, as lentes são de material mais refringente que o meio que as envolve. Note que a lente de cima — biconvexa — é convergente, enquanto a lente de baixo — bicôncava — é divergente.

Conclusão:

Se a lente é mais refringente que o meio externo, temos:

**bordas finas** — convergentes;

**bordas grossas** — divergentes.

Esse é o caso mais comum.

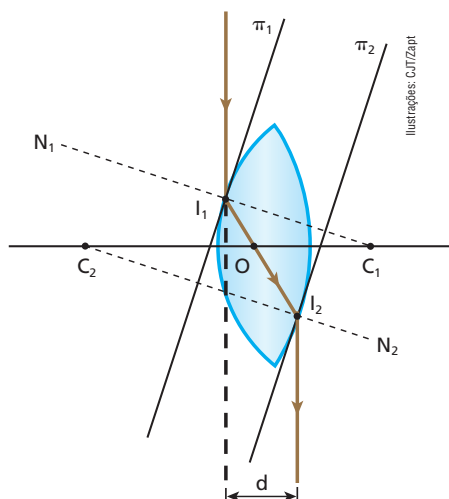
Se a lente é menos refringente que o meio externo, temos:

**bordas finas** — divergentes;

**bordas grossas** — convergentes.

Esse é o caso menos comum.

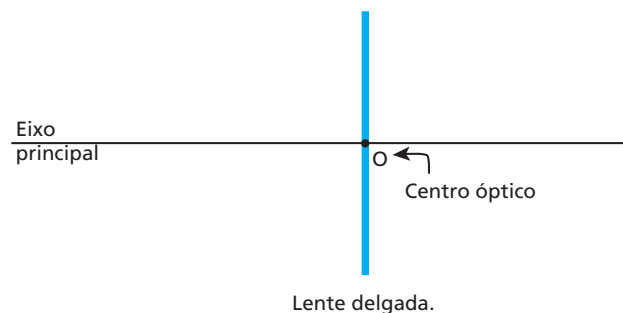
## 4. Centro óptico

Considere a lente esférica da figura seguinte, na qual estão destacados os centros de curvatura das faces ($C_1$ e $C_2$), o eixo principal ($\overleftrightarrow{C_1C_2}$) e dois planos $\pi_1$ e $\pi_2$ tangentes às faces da lente e paralelos entre si. Um raio luminoso monocromático adentra a lente pelo ponto $I_1$ e dela emerge pelo ponto $I_2$.

Em razão do paralelismo dos planos $\pi_1$ e $\pi_2$, a lente comporta-se como uma lâmina de faces paralelas em relação ao raio luminoso em questão. Por isso, pode-se concluir que, na travessia da lente, o raio luminoso não sofre desvio angular, experimentando apenas um deslocamento lateral **d**.

O ponto **O**, obtido pela interseção do raio luminoso com o eixo principal, é o **centro óptico** da lente. Esse ponto não depende do índice de refração da lente em relação ao meio externo, e sua posição é invariável para um mesmo tipo de luz (frequência).

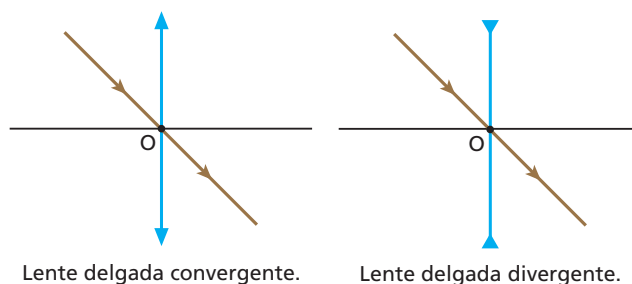
Com base no que foi exposto, pode-se enunciar que:

O **centro óptico** de uma lente esférica é o ponto do eixo principal por onde passa um raio luminoso que não sofre desvio angular.

É importante destacar que, nas lentes delgadas (espessura desprezível em comparação com os raios de curvatura das faces), o centro óptico é definido pela interseção da lente com seu eixo principal.

Lente delgada.

Pelo fato de a espessura de uma lente delgada ser desprezível, depreende-se que um raio luminoso que a atravessa, passando por seu centro óptico, sofre deslocamento lateral desprezível. Assim, podemos afirmar que:

Um raio luminoso que passa pelo centro óptico de uma lente esférica delgada não sofre desvio angular nem deslocamento lateral considerável.

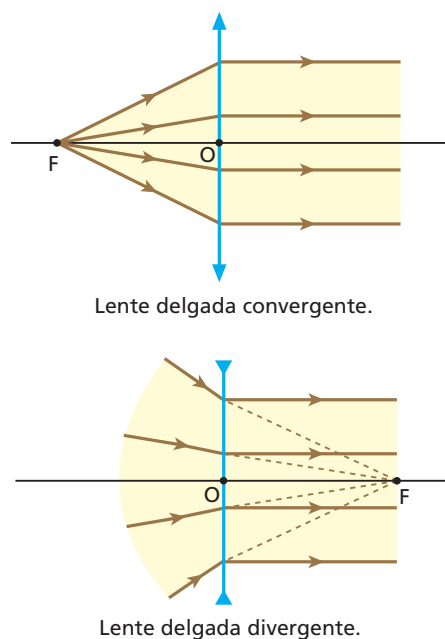
Lente delgada convergente. Lente delgada divergente.

## 5. Focos e pontos antiprincipais

### Focos

Considere as lentes esféricas delgadas representadas a seguir, das quais emergem raios luminosos paralelos entre si e aos respectivos eixos principais. Admita que esses raios sejam pouco afastados em relação ao eixo principal das lentes.

A experiência mostra que, nessas condições, os raios luminosos incidentes se apresentam, necessariamente, alinhados com um mesmo ponto do eixo principal, denominado **foco principal objeto** (**F**).

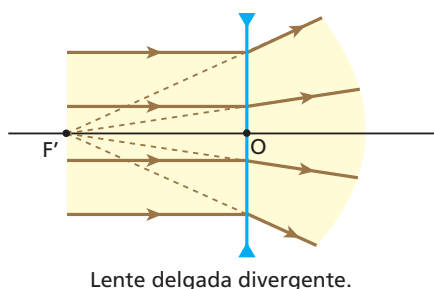
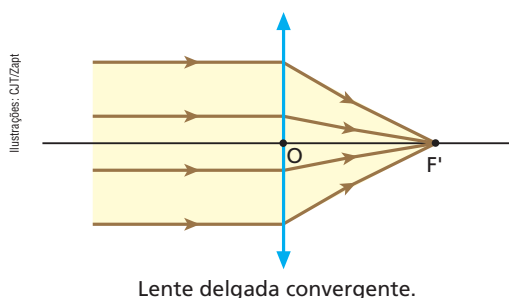
Lente delgada convergente.

Lente delgada divergente.

Considere, agora, as lentes esféricas delgadas representadas a seguir, nas quais incidem raios luminosos paralelos entre si e aos respectivos eixos principais. Admita, também, que esses raios sejam pouco afastados em relação ao eixo principal das lentes.

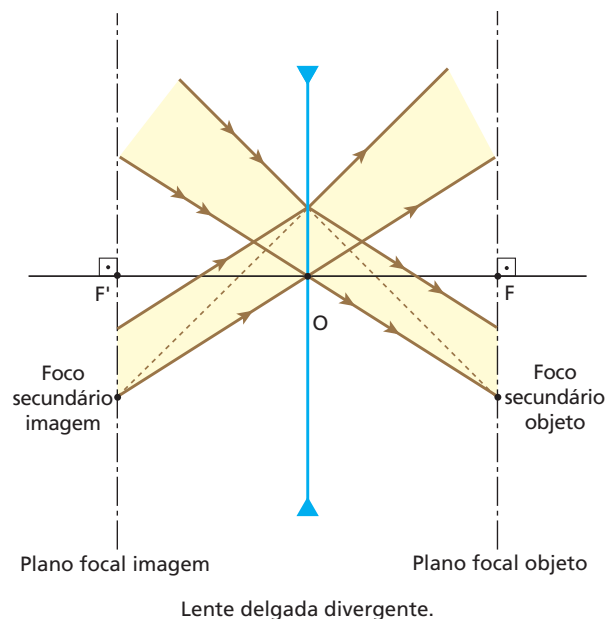
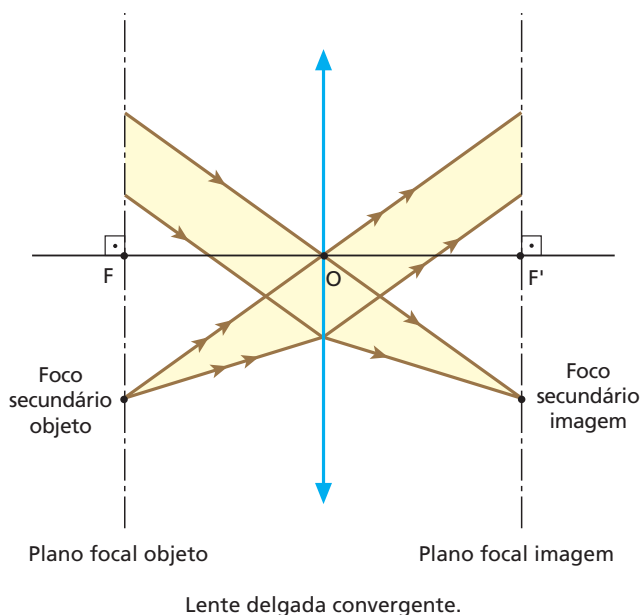
A experiência mostra que, nessas condições, os raios luminosos emergentes se apresentam, necessariamente, alinhados com um mesmo ponto do eixo principal, denominado **foco principal imagem (F′)**. Esse fato decorre do caso anterior, tendo-se em conta a reversibilidade no trajeto dos raios de luz.

Ilustrações: CJT/Zapt

Lente delgada convergente.

Lente delgada divergente.

Além dos focos principais, pode-se verificar que as lentes esféricas delgadas possuem infinitos focos secundários. Esses focos situam-se aproximadamente no mesmo plano frontal que contém os focos principais. A esses planos dá-se o nome de **planos focais**.

Lente delgada convergente.

Lente delgada divergente.

É importante observar que os focos de uma lente convergente são **reais**, enquanto os de uma lente divergente são **virtuais**. A explicação para esse fato é simples: nas lentes convergentes os focos são determinados efetivamente pelos raios de luz, enquanto nas lentes divergentes eles são determinados pelos prolongamentos dos raios.

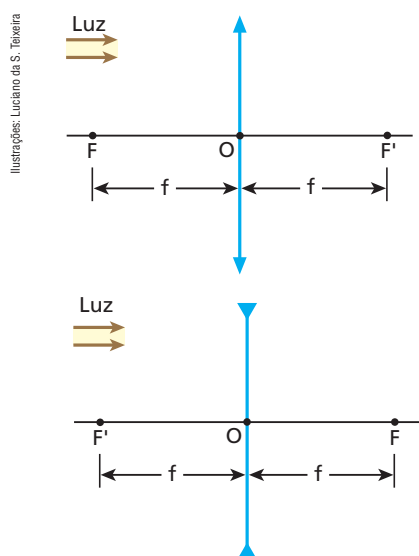
## Lupa e folhas secas: eis o fogo!

Thales Trigo

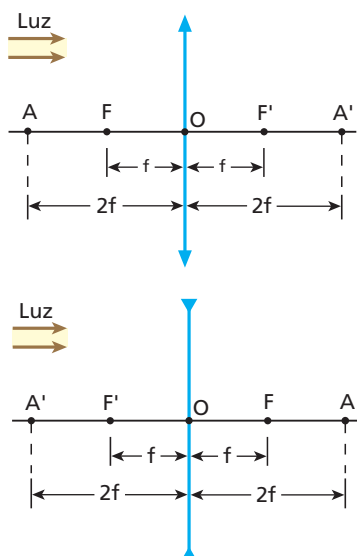
Um praticante de *camping* que tenha esquecido de colocar fósforos em sua bagagem pode produzir fogo utilizando uma lupa — lente convergente de aumento, geralmente biconvexa. Para isso, basta que ele reúna alguns gravetos e folhas secas, fazendo incidir sobre eles a luz emergente do sistema. Os raios do Sol são praticamente paralelos, o que produz uma imagem do astro em um foco da lupa. Esse foco, que é um elemento real em que há alta concentração de energia, sendo mantido por algum tempo sobre os gravetos e as folhas, provoca neles a combustão, gerando fogo.

## Distância focal

Considere as lentes delgadas indicadas no esquema abaixo, envolvidas pelo mesmo meio. Conforme foi descrito, cada lente tem dois focos principais: o foco objeto (**F**) e o foco imagem (**F'**).

Como o meio envolvente é o mesmo, para cada lente o segmento FO tem a mesma medida que o segmento F'O. Desconsiderados sinais algébricos, os comprimentos de FO ou de F'O são denominados **distância focal** (**f**), que é uma característica fundamental das lentes.

## Pontos antiprincipais

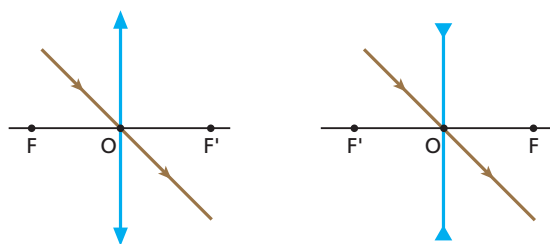
Os pontos do eixo principal de uma lente cuja distância em relação ao centro óptico vale 2f são chamados de **pontos antiprincipais**:

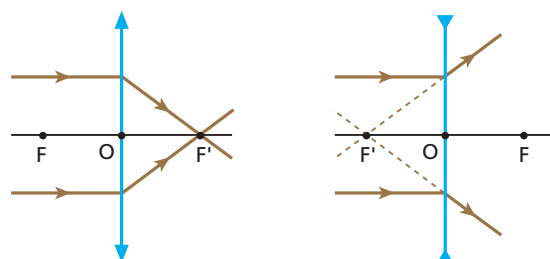
- ponto **A** = ponto antiprincipal objeto
- ponto **A'** = ponto antiprincipal imagem

Nesta gravura em madeira de 1874 (coleção particular), original de M. Claverie, o matemático e naturalista francês Georges-Louis Leclerc — o Conde de Buffon (1707-1788) — demonstra a possibilidade de se atear fogo em arbustos distantes, situados nas regiões focais de lentes convergentes atravessadas pela luz solar.

## 6. Raios luminosos particulares

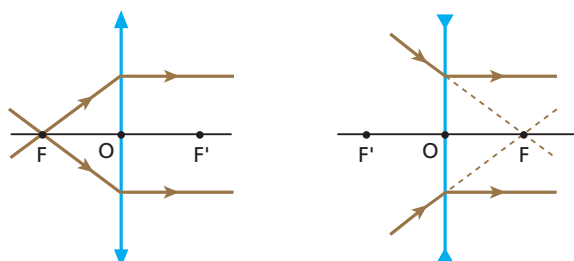
Como nos espelhos esféricos, também no estudo das lentes esféricas alguns raios luminosos que obedecem a determinadas condições e propriedades devem estar sempre à mão, já que facilitam a obtenção gráfica das imagens.

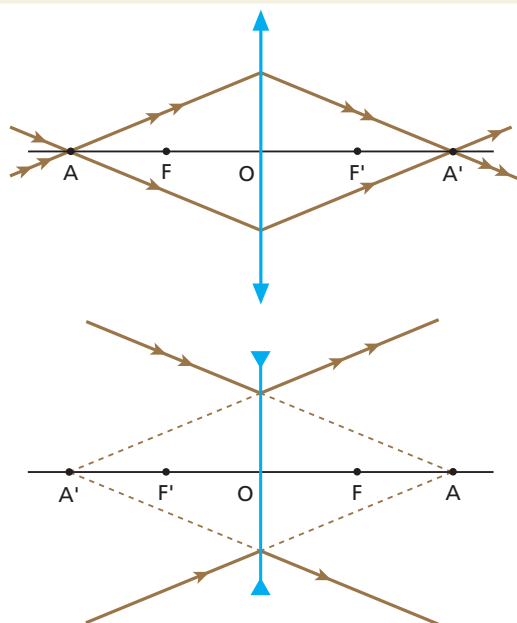
### 1º raio particular:

Todo raio luminoso que incide no centro óptico se refrata diretamente, sem sofrer desvio.

### 2º raio particular:

Todo raio luminoso que incide paralelamente ao eixo principal se refrata alinhado com o foco principal imagem (**F'**).

Levando em conta a reversibilidade no trajeto dos raios de luz, podemos enunciar também que:

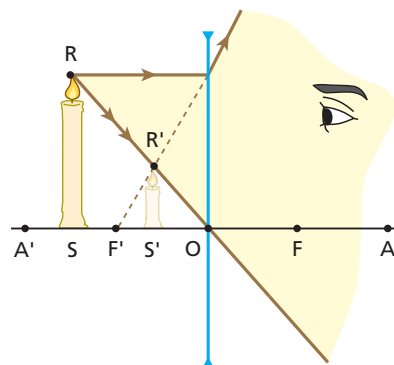
Todo raio luminoso que incide alinhado com o foco principal objeto (**F**) se refrata paralelamente ao eixo principal.

Ilustrações: CJT/Zapt

## 3º raio particular:

Todo raio luminoso que incide alinhado com o ponto antiprincipal objeto (**A**) se refrata alinhado com o ponto antiprincipal imagem (**A'**).

O comportamento desse raio pode ser verificado experimentalmente e também pela **Equação de Gauss**, que será apresentada na seção 9 deste tópico.

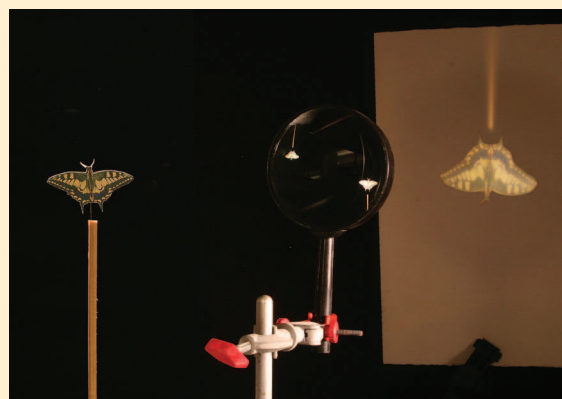
## 7. Construção gráfica das imagens em lentes esféricas

### Lente divergente e objeto real

Neste caso, qualquer que seja a posição do objeto em relação à lente, obtêm-se as mesmas características para a imagem, que se forma sempre entre o centro óptico (**O**) e o foco principal imagem (**F '**).

**Características da imagem:**
virtual, direita e menor.

John W. Gertz/Zefa/CORBIS/Latinstock

Esta fotografia mostra a imagem virtual, direita e menor produzida por uma lente divergente para um objeto real (rosto da mulher).

### Borboleta e lente biconvexa convergente

Sérgio Dotta Jr./The Next

Nesta curiosa fotografia, é possível observar, projetada em um anteparo difusor, a imagem real, invertida e maior de uma borboleta iluminada, conjugada por uma lente biconvexa convergente. Chamam atenção as duas pequenas imagens obtidas pela reflexão de parte da luz proveniente da borboleta nas faces da lente. A face de entrada da luz, onde ocorre a primeira refração, comporta-se como espelho convexo, originando uma imagem virtual, direita e menor. A face de saída da luz, onde ocorre a segunda refração, comporta-se como espelho côncavo, originando uma imagem real, invertida e menor.

## Faça você mesmo

Este é um experimento simples, que você pode realizar facilmente em casa, bastando para isso conseguir um copo cilíndrico transparente de paredes lisas e um cartão branco de $10 \times 10$ (cm$^2$), aproximadamente.

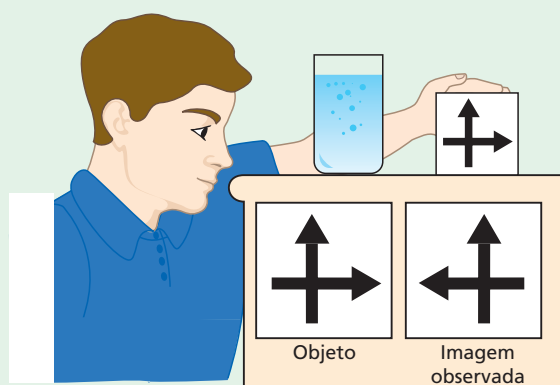
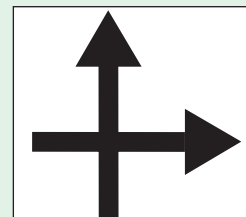
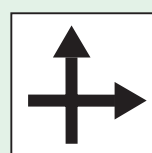
Desenhe no cartão duas setas: uma vertical orientada para cima e outra horizontal orientada para a direita, conforme mostra a figura ao lado.

O cartão será o objeto em relação ao sistema óptico descrito a seguir.

Encha o copo com água, tomando o cuidado de não deixar molhar suas paredes externas. O copo constitui, juntamente com a água, uma **lente cilíndrica**.

Colocando o cartão a uma distância conveniente do copo, como ilustra a próxima figura, você contemplará uma imagem real do cartão, na qual a seta vertical não apresentará alterações aparentes, mas a seta horizontal aparecerá orientada para a esquerda.

Esse experimento mostra que uma lente cilíndrica, como a constituída pelo copo e pela água, produz imagens reais invertidas apenas transversalmente.

Se você fizesse o mesmo experimento utilizando, por exemplo, uma lente esférica biconvexa de vidro, com distância focal da ordem de 10 cm, colocando o cartão a aproximadamente 20 cm da lente, observaria a ocorrência de inversão tanto na seta vertical, que se apresentaria orientada para baixo, como na seta horizontal, que se apresentaria orientada para a esquerda.

A ilustração abaixo mostra a dupla inversão imposta pela lente convergente: a **transversal** e a **lateral**.

Objeto

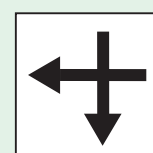
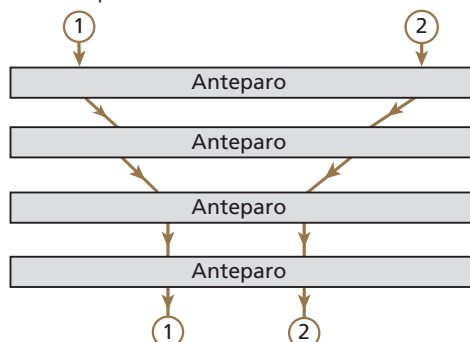
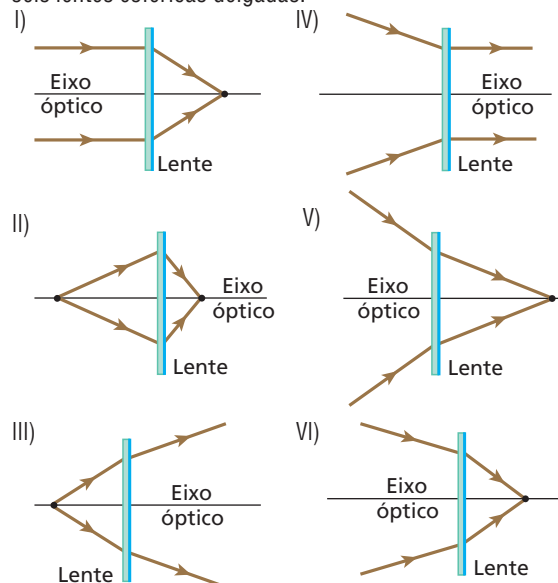



Imagem observada

## Exercícios nível 1

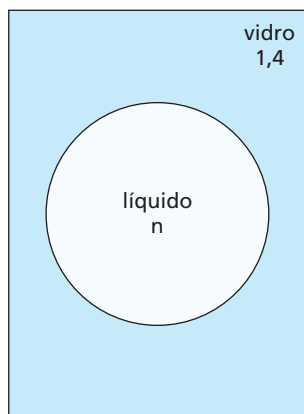
**1.** (UFRN) Os raios de luz 1 e 2, representados na figura, atravessam elementos ópticos que estão escondidos pelos anteparos, numa região em que o ar atmosférico é homogêneo. Estes elementos podem ser:

I. uma lente delgada convergente;
II. uma lente delgada divergente;
III. uma lâmina de vidro de faces paralelas.

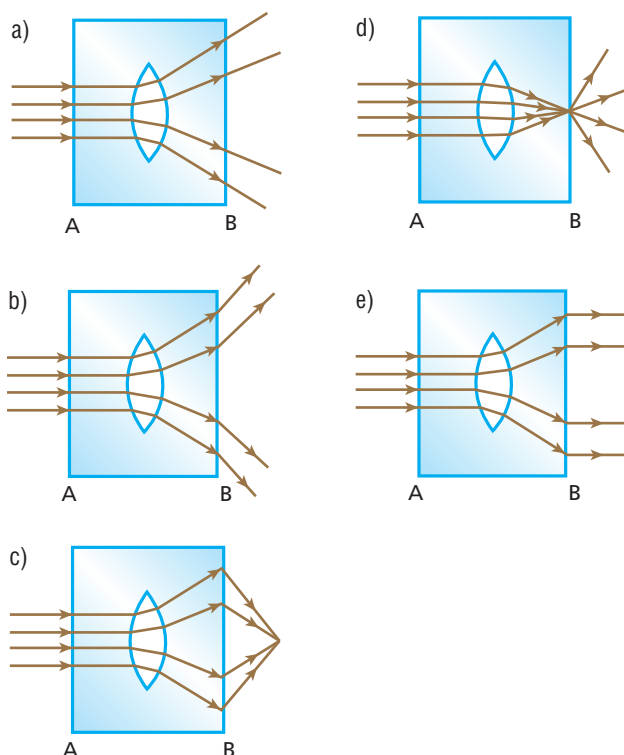
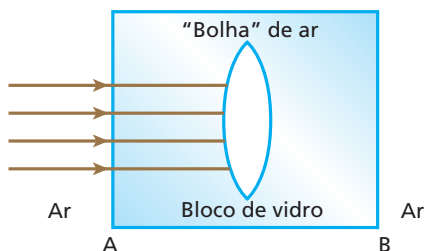
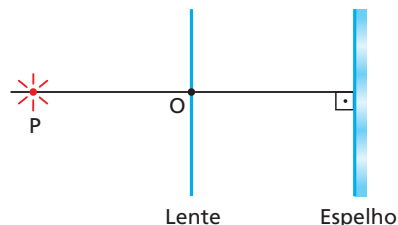
Acompanhando, de cima para baixo, as trajetórias dos dois raios, quais são, nessa ordem, os elementos ópticos escondidos pelos anteparos, sabendo que cada anteparo esconde um único elemento óptico?

**2.** As figuras seguintes representam a refração da luz através de seis lentes esféricas delgadas:

Quais lentes apresentam comportamento convergente?

**3.** Um escoteiro, contrariando a orientação do chefe que recomendava o uso de gravetos rolantes para produzir fogo no momento da confecção do almoço do pelotão, utilizou uma lente esférica de distância focal **f** que "concentrou os raios solares" sobre um monte de folhas secas situado a uma distância **d** da lente.

a) Diga que tipo de lente o escoteiro utilizou (convergente ou divergente).
b) Faça, em seu caderno, um esquema representando os raios solares, a lente e o monte de folhas secas.
c) Determine o valor de **d** em função de **f** para que o processo tenha eficiência máxima, isto é, o fogo seja produzido no menor intervalo de tempo possível.

**4.** (Fuvest-SP) Um objeto decorativo consiste de um bloco de vidro transparente, de índice de refração igual a 1,4, com a forma de um paralelepípedo, que tem, em seu interior, uma bolha, aproximadamente esférica, preenchida com um líquido, também transparente, de índice de refração **n**. A figura abaixo mostra um perfil do objeto.

Nessas condições, quando a luz visível incide perpendicularmente em uma das faces do bloco e atravessa a bolha, o objeto se comporta, aproximadamente, como

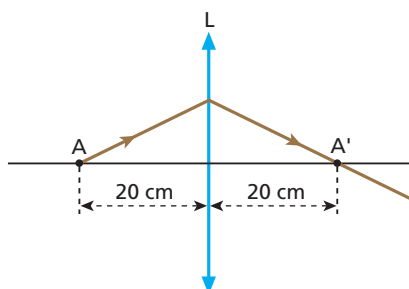
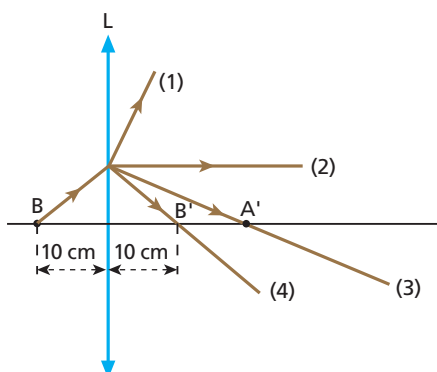
a) uma lente divergente, somente se $n > 1,4$.
b) uma lente convergente, somente se $n > 1,4$.
c) uma lente convergente, para qualquer valor de **n**.
d) uma lente divergente, para qualquer valor de **n**.
e) se a bolha não existisse, para qualquer valor de **n**.

**5.** (Mack-SP) Na produção de um bloco de vidro *flint*, de índice de refração absoluto 1,7, ocorreu a formação de uma "bolha" de ar (índice de refração absoluto 1,0), com o formato de uma lente esférica biconvexa. Um feixe luminoso monocromático, paralelo, incide perpendicularmente à face **A** do bloco, conforme a figura a seguir, e, após passar pelo bloco e pela bolha, emerge pela face **B**. A figura que melhor representa o fenômeno é:

**6.** O arranjo experimental da figura é composto de uma lente esférica de vidro e um espelho plano. A montagem é feita no interior de uma sala de aula pelo professor de Óptica, que dispõe o espelho perpendicularmente ao eixo principal da lente:

De um ponto **P**, situado sobre o eixo principal e distante 30 cm do centro óptico da lente, provém luz que se refrata através da lente, incide no espelho, reflete-se e volta a atravessar a lente, convergindo novamente para o ponto **P**, independentemente da distância entre a lente e o espelho.

a) Classifique a lente como convergente ou divergente.
b) Obtenha o valor absoluto de sua distância focal.

**7.** (UFPI) Um estudante de óptica fez um dispositivo para focalizar um objeto muito distante (considere-o no infinito). Esse dispositivo consistia de uma lente esférica simétrica de vidro, imersa no ar, e de um espelho esférico côncavo, cujo raio de curvatura media 60 cm. Na montagem, o vértice do espelho ficava a 40 cm do centro óptico da lente. Sabendo que os raios emergentes do dispositivo sobrepõem-se aos incidentes, podemos afirmar que a lente utilizada no dispositivo era

a) biconvexa, cuja distância focal tem valor absoluto de 20 cm.
b) biconvexa, cuja distância focal tem valor absoluto de 30 cm.
c) bicôncava, cuja distância focal tem valor absoluto de 20 cm.
d) bicôncava, cuja distância focal tem valor absoluto de 30 cm.
e) bicôncava, cuja distância focal tem valor absoluto de 40 cm.

**8.** (Unip-SP) A figura representa um objeto luminoso **P** no eixo principal de uma lente convergente **L**. Quando o objeto **P** está na posição **A**, o raio de luz que parte de **P** passa, após refratar-se na lente, pelo ponto **A'**, simétrico de **A** em relação a **L**:

Em seguida, o objeto **P** se aproxima da lente, posicionando-se no ponto **B**, conforme a figura.

O raio de luz que parte do objeto **P**, posicionado em **B**, após refratar-se na lente, assume:

a) a direção 1.
b) a direção 2.
c) a direção 3.
d) a direção 4.
e) uma direção diferente das indicadas.

**9.** (Fuvest-SP) Tem-se um objeto luminoso situado em um dos focos principais de uma lente convergente. O objeto afasta-se da lente, movimentando-se sobre seu eixo principal. Podemos afirmar que a imagem do objeto, à medida que ele se movimenta:

a) cresce continuamente.
b) passa de virtual para real.
c) afasta-se cada vez mais da lente.
d) aproxima-se do outro foco principal da lente.
e) passa de real para virtual.

**10.** (Fuvest-SP) Uma pessoa segura uma lente delgada junto a um livro, mantendo seus olhos aproximadamente a 40 cm da página, obtendo a imagem indicada na figura.

Soneto da Fidelidade
Vinicius de Moraes

De tudo, ao meu amor serei atento
Antes, e com tal zelo, e sempre, e tanto
Que mesmo em ... ior encanto
Dele se enc ... amento.

Quero v ... to
E em s ... u canto
E rir m ... o
Ao seu

E assim, ... ocure
Quem sab ... quem vive
Quem sabe ... quem ama

Eu possa (me) dizer do amor (que tive):
Que não seja imortal, posto que é chama,
Mas que seja infinito enquanto dure.

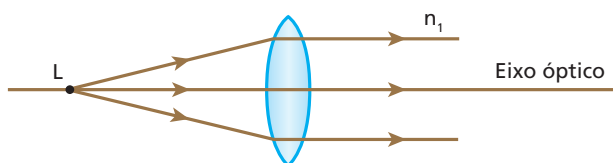
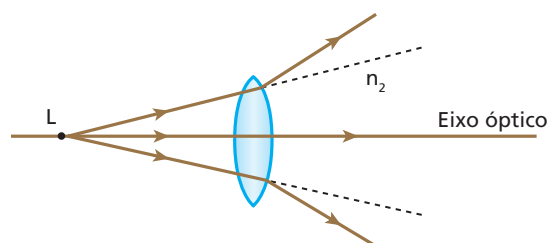


Em seguida, sem mover a cabeça ou o livro, vai aproximando a lente de seus olhos. A imagem, formada pela lente, passará a ser:

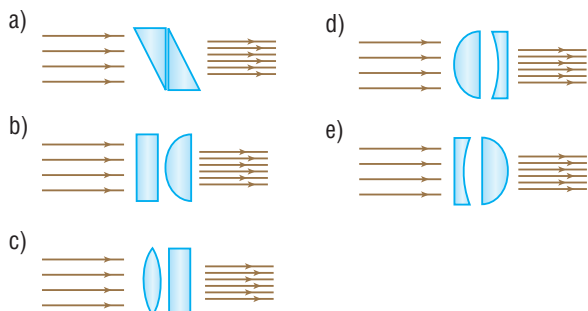
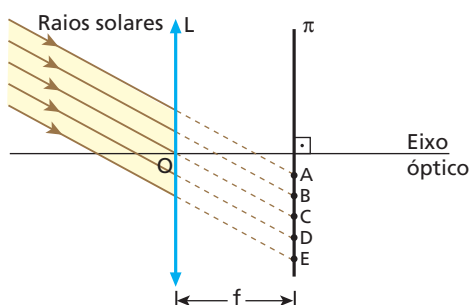
a) sempre direita, cada vez menor.
b) sempre direita, cada vez maior.
c) direita cada vez menor, passando a invertida e cada vez menor.
d) direita cada vez maior, passando a invertida e cada vez menor.
e) direita cada vez menor, passando a invertida e cada vez maior.

## Exercícios

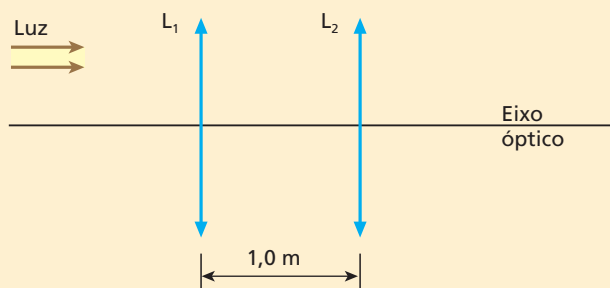
nível 2

**11.** (Ufla-MG) Coloca-se uma pequena lâmpada **L** no foco principal de uma lente biconvexa de índice de refração $n_L$ imersa em um líquido de índice de refração $n_1$. Essa situação está esquematizada abaixo.

Mantendo-se a posição da lâmpada em relação à lente e imergindo-se o conjunto em um outro líquido de índice de refração $n_2$, obteve-se o seguinte percurso para os raios luminosos:

É correto afirmar que:

a) $n_2 > n_1 > n_L$
b) $n_2 = n_L > n_1$
c) $n_L > n_2 > n_1$
d) $n_2 > n_L > n_1$
e) $n_L = n_1 > n_2$

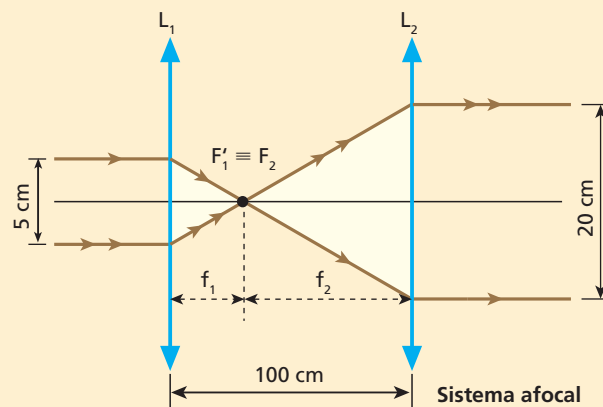
**12.** (Unirio-RJ) Uma pessoa deseja construir um sistema óptico capaz de aumentar a intensidade de um feixe de raios de luz paralelos, tornando-os mais próximos, sem que modifique a direção original dos raios incidentes. Para isso, tem à sua disposição prismas, lentes convergentes, lentes divergentes e lâminas de faces paralelas.
Tendo em vista que os elementos que constituirão o sistema óptico são feitos de vidro e estarão imersos no ar, qual das cinco composições a seguir poderá ser considerada como uma possível representação do sistema óptico desejado?

**13.** Para acender um palito de fósforo com os raios solares (considerados paralelos), você vai utilizar uma lente convergente **L** de centro óptico **O** e distância focal **f**. Para tanto, a cabeça do palito será colocada em um dos cinco pontos, **A**, **B**, **C**, **D** ou **E**, indicados na figura a seguir.

O plano **π** é perpendicular ao eixo óptico da lente e os pontos citados pertencem à intersecção desse plano com o plano do papel. O efeito desejado será produzido no mínimo intervalo de tempo se a cabeça do palito for colocada no ponto:

a) A. b) B. c) C. d) D. e) E.

**14. E.R.** Duas lentes convergentes $L_1$ e $L_2$ são associadas coaxialmente, conforme mostra o esquema a seguir:

Fazendo-se incidir sobre $L_1$ um pincel cilíndrico de luz monocromática de 5 cm de diâmetro e de eixo coincidente com o eixo óptico do sistema, observa-se que de $L_2$ emerge um pincel luminoso também cilíndrico e de eixo coincidente com o eixo óptico do sistema, porém com 20 cm de diâmetro. Determine:

a) o trajeto dos raios luminosos, ao atravessarem o sistema.
b) as distâncias focais de $L_1$ e de $L_2$.

**Resolução:**

a) Para que o pincel luminoso emergente de $L_2$ seja cilíndrico e de eixo coincidente com o eixo óptico do sistema, o foco principal imagem de $L_1$ deve coincidir com o foco principal objeto de $L_2$, conforme representa a figura:

b) Os triângulos destacados são semelhantes. Logo:

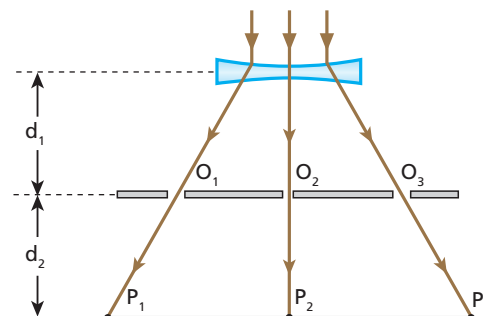
$$\frac{f_1}{5} = \frac{f_2}{20} \Rightarrow f_2 = 4f_1 \quad \text{(I)}$$

Mas: $f_1 + f_2 = 100$ (II)

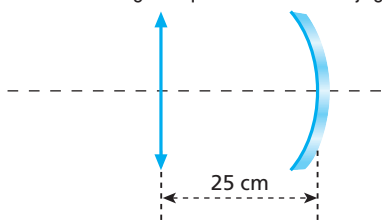
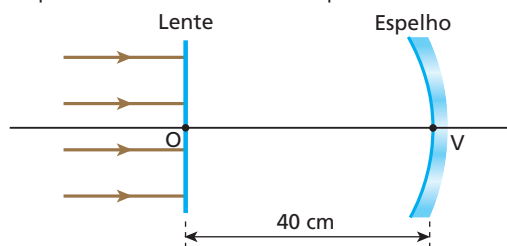
Substituindo (I) em (II), temos:

$$f_1 + 4\,f_1 = 100 \Rightarrow \boxed{f_1 = 20 \text{ cm}} \text{ e}$$

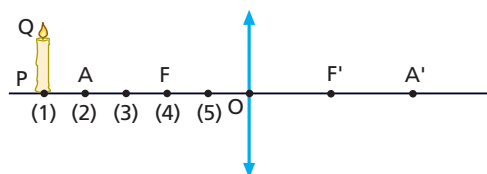
$$\boxed{f_2 = 80 \text{ cm}}$$

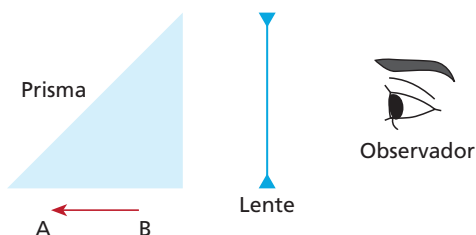
**15.** (UFRGS) A figura a seguir ilustra um experimento realizado com o fim de determinar o módulo da distância focal de uma lente divergente. Um feixe de raios paralelos incide sobre a lente. Três deles, após atravessarem essa lente, passam pelos orifícios $O_1$, $O_2$ e $O_3$ existentes em um anteparo fosco à sua frente, indo encontrar um segundo anteparo nos pontos $P_1$, $P_2$ e $P_3$:

**Dados:** $O_1O_3 = 4{,}0$ cm; $P_1P_3 = 6{,}0$ cm; $d_1 = 15{,}0$ cm; $d_2 = 15{,}0$ cm.
Quanto vale, em centímetros, o módulo da distância focal da lente em questão?

**16.** Uma lente convergente de distância focal f = 20 cm e um espelho côncavo de raio R = 10 cm são colocados ao longo do eixo comum e separados por uma distância de 25 cm um do outro. Observe a figura a seguir. Com esse dispositivo, é focalizado um objeto muito distante (considere-o no infinito).

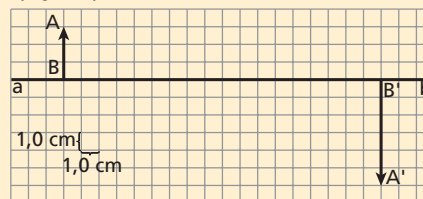
Copie a figura e esquematize a trajetória da luz no sistema, indicando a posição das duas imagens que o sistema conjuga ao objeto.

**17.** A figura representa uma lente esférica simétrica de vidro, imersa no ar, diante da qual está a superfície refletora de um espelho esférico côncavo, cujo raio de curvatura vale 60 cm. O vértice do espelho dista 40 cm do centro óptico da lente.

Raios luminosos paralelos entre si e ao eixo óptico comum à lente e ao espelho incidem no sistema. Sabendo que os raios emergentes do sistema sobrepõem-se aos incidentes:

a) classifique a lente como biconvexa ou bicôncava.
b) obtenha o valor absoluto de sua distância focal.

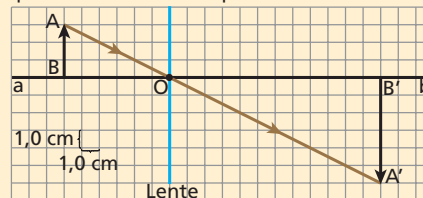
**18.** Na figura, está esquematizada uma lente convergente de pontos antiprincipais **A** e **A'**, focos principais **F** e **F'** e centro óptico **O**. PQ é um objeto luminoso que será deslocado ao longo do eixo óptico da lente, passando pelas posições 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Para cada posição do objeto, obtenha graficamente, em seu caderno, a correspondente imagem, fornecendo suas características.

**19.** (Fameca-SP) A figura ilustra um objeto linear AB disposto horizontalmente e paralelo a uma face "cateto" de um prisma de vidro transparente, com perfil de triângulo retângulo e isósceles. À direita da outra face "cateto", a uma certa distância do prisma, há uma lente divergente paralela a essa face. À direita da lente, no seu eixo óptico principal, encontra-se o olho de um observador.

A imagem de AB, vista pelo observador, está mais bem representada na alternativa

a)  b)  c)  d)  e) 

**20. E.R.** No esquema seguinte, ab é o eixo principal de uma lente esférica delgada, AB é um objeto real e A′B′ é a imagem de AB conjugada pela lente:

a) Posicione o centro óptico da lente sobre o eixo ab, calculando sua distância em relação a AB e em relação a A'B'.
b) Classifique a lente como convergente ou divergente.
c) Determine o valor absoluto de sua abscissa focal.

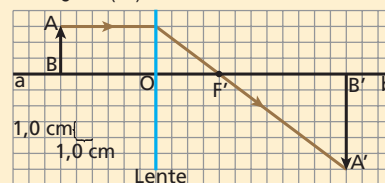
**Resolução:**

a) I. **Posicionamento do centro óptico (O)**
Um raio luminoso que incide na lente a partir do ponto **A**, alinhado com o ponto **A'**, intercepta o eixo ab na posição correspondente ao centro óptico:

II. **Determinação das distâncias**
Sejam:

p = distância da lente a AB
p' = distância da lente a A'B'

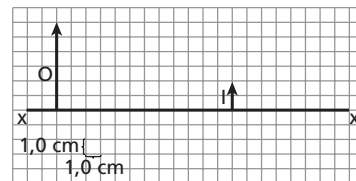
Observando a figura, obtemos:

p = 6,0 cm e p' = 12 cm

b) Um raio luminoso que incide na lente paralelamente ao eixo ab, a partir do ponto **A**, deve refratar-se alinhado com o ponto **A'**. Esse raio determina o comportamento da lente (convergente ou divergente) e intercepta o eixo ab no foco principal imagem (**F'**):

A lente é convergente.

c) A distância focal (**f**) da lente corresponde ao comprimento F'O. Da figura, obtemos:

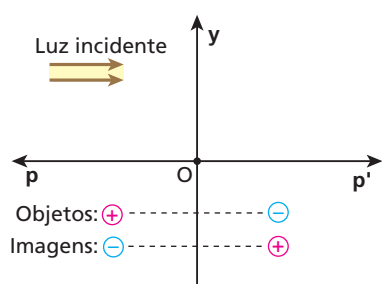
f = 4,0 cm

**21.** No esquema ao lado, xx' é o eixo principal de uma lente esférica delgada, **O** é um objeto luminoso e **I** é sua imagem conjugada pela lente:

a) Copie a figura em escala no seu caderno e determine a posição do centro óptico da lente sobre o eixo xx', calculando sua distância em relação a **O** e em relação a **I**.
b) Classifique a lente como convergente ou divergente.
c) Determine o valor absoluto de sua abscissa focal.

# Bloco 2

## 8. Referencial gaussiano

Conforme foi visto no Tópico 2 (Reflexão da luz), o referencial gaussiano tem por função dar estrutura ao estudo analítico das imagens, atribuindo, às abscissas e ordenadas dos objetos e consequentes imagens, sinais algébricos adequados.

Em relação às lentes esféricas, o referencial de Gauss é composto de três eixos, todos com origem coincidente com o centro óptico, conforme se pode observar no esquema abaixo:

- **Eixo Op** (abscissas dos objetos): direção do eixo principal e orientação em sentido oposto ao da luz incidente.
- **Eixo Op′** (abscissas das imagens): direção do eixo principal e orientação no mesmo sentido da luz incidente.
- **Eixo Oy** (ordenadas dos objetos e das imagens): direção perpendicular ao eixo principal e orientação para cima.

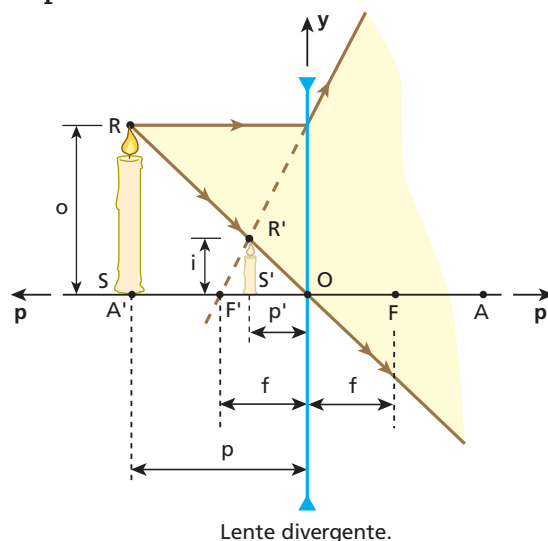
Do referencial gaussiano para as lentes esféricas, depreende-se que:

> Objetos e imagens **reais**: abscissa **positiva**.
> Objetos e imagens **virtuais**: **abscissa negativa**.
> Imagem **direita**: objeto e imagem com ordenadas de **mesmo sinal**.
> Imagem **invertida**: objeto e imagem com ordenadas de **sinais contrários**.

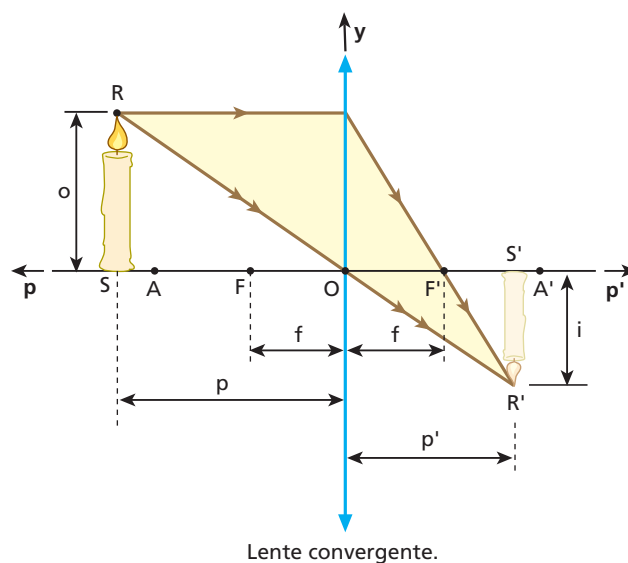
Convém observar que nas lentes convergentes, pelo fato de os focos serem reais, as abscissas focais são **positivas**, enquanto nas lentes divergentes, pelo fato de os focos serem virtuais, as abscissas focais são **negativas**.

Veja, a seguir, dois exemplos que destacam os sinais algébricos das abscissas e ordenadas envolvidas.

**Exemplo 1:**

Lente divergente.

Nesse caso: $p > 0$, $p' < 0$, $f < 0$, $o > 0$ e $i > 0$.

**Exemplo 2:**

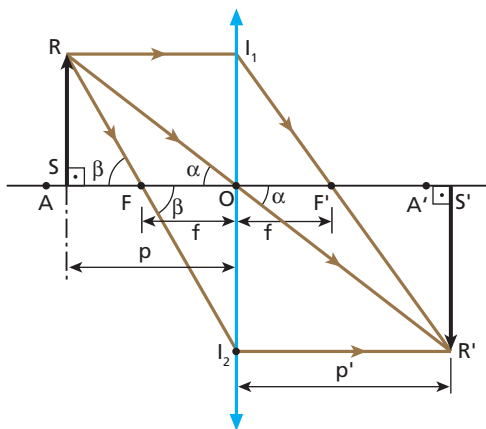
Lente convergente.

Nesse caso: $p > 0$, $p' > 0$, $f > 0$, $o > 0$ e $i < 0$.

## 9. Função dos pontos conjugados (equação de Gauss)

No caso das lentes esféricas, as abscissas **f**, **p** e **p′** relacionam-se matematicamente segundo a mesma função deduzida para os espelhos esféricos.

Trata-se da **função dos pontos conjugados**, também conhecida como **Equação de Gauss**:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Com o objetivo de apresentar uma dedução simples dessa importante expressão, considere a lente da figura a seguir, em que está traçada, para o objeto real SR, a correspondente imagem S'R'.

Os triângulos RSO e R'S'O são semelhantes. Então:

$$\frac{RS}{R'S'} = \frac{OS}{OS'}$$

Mas OS = p e OS' = p'. Assim:

$$\frac{RS}{R'S'} = \frac{p}{p'} \qquad \text{(I)}$$

Os triângulos RSF e $I_2OF$ também são semelhantes. Então:

$$\frac{RS}{I_2O} = \frac{FS}{OF}$$

Mas $I_2O = R'S'$, $FS = p - f$ e $OF = f$. Assim:

$$\frac{RS}{R'S'} = \frac{p - f}{f} \qquad \text{(II)}$$

Comparando-se as expressões (I) e (II), vem:

$$\frac{p}{p'} = \frac{p - f}{f}$$

$$f\,p = p\,p' - f\,p' \;\Rightarrow\; p\,p' = f\,p' + f\,p$$

Dividindo todos os termos da última expressão por f p p', tem-se:

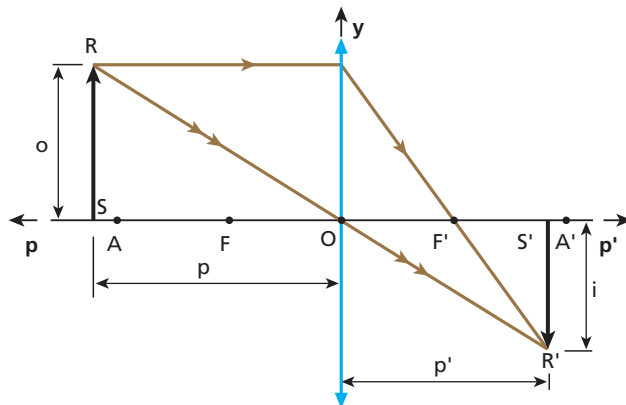
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \quad \text{(função dos pontos conjugados)}$$

Convém destacar que nas aplicações dessa expressão devem ser levados em conta os sinais algébricos de **f**, **p** e **p'**, dados pelo referencial gaussiano.

## 10. Aumento linear transversal

Conforme vimos no Tópico 2 (Reflexão da luz), também para as lentes esféricas define-se **aumento linear transversal** como a grandeza adimensional dada pela relação entre a ordenada da imagem (**i**) e a ordenada do objeto (**o**), ambas expressas em relação ao referencial gaussiano.

$$A = \frac{i}{o}$$

Considere a lente a seguir, que conjuga, para o objeto real SR, a imagem real S'R'.

Os triângulos RSO e R'S'O são semelhantes. Então:

$$\frac{R'S'}{RS} = \frac{OS'}{OS}$$

Mas $R'S' = |i|$, $RS = |o|$, $OS' = |p'|$ e $OS = |p|$. Assim:

$$\frac{|i|}{|o|} = \frac{|p'|}{|p|}$$

Perceba que, no caso da situação proposta (vide referencial gaussiano), $i < 0$, $o > 0$, $p > 0$ (objeto real) e $p' > 0$ (imagem real).

Levando em conta os sinais algébricos de **i**, **o**, **p** e **p'**, podemos escrever que:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

Nesse momento, é importante recapitular duas situações importantes referentes ao aumento linear transversal:

**1ª situação: Aumento positivo**

Se $A > 0$, devemos ter:

a) **i** e **o** com o mesmo sinal: a imagem é direita;

b) **p** e **p'** com sinais opostos: o objeto e a imagem têm naturezas opostas (se um é real, o outro é virtual).

**2ª situação: Aumento negativo**

Se $A < 0$, devemos ter:

a) **i** e **o** com sinais opostos: a imagem é invertida;

b) **p** e **p'** com o mesmo sinal: o objeto e a imagem têm a mesma natureza (ambos são reais ou ambos são virtuais).

É importante notar também que:

Se $|A| > 1$: a imagem é **maior** que o objeto.
Se $|A| < 1$: a imagem é **menor** que o objeto.

É possível expressar o aumento linear transversal (**A**) de uma lente esférica em função da abscissa focal (**f**) e da abscissa do objeto (**p**). Para isso, basta utilizar a expressão deduzida no exercício resolvido 66, do Tópico 2 (Reflexão da luz):

$$A = \frac{f}{f - p}$$

## Duas posições e duas projeções

O dispositivo representado a seguir é denominado **banco óptico**. Trata-se de um aparato experimental muito útil para a verificação de propriedades ópticas, sendo constituído, no caso que será analisado, de um trilho dotado de uma escala graduada em centímetros, uma fonte de luz, uma lente convergente e um anteparo. No trilho, que permanecerá em repouso sobre uma bancada horizontal, serão alinhados a fonte de luz, a lente convergente e o anteparo, todos acoplados a suportes deslizantes. Suponhamos que a luz da fonte incida sobre uma placa retangular opaca instalada junto ao bocal de saída do feixe de luz e que nessa placa seja recortada — e destacada — uma região em forma de seta vertical. Sugere-se que a região correspondente à seta seja coberta por um pedaço de papel translúcido — papel vegetal, por exemplo — para melhor definição do elemento que servirá de objeto à lente: a seta luminosa. Esse procedimento ficará mais realçado se for realizado em um ambiente escurecido. Seja **f** a distância focal da lente, admitida em operação de acordo com as condições de Gauss. Vamos supor também que os suportes da fonte de luz e do anteparo estejam fixados a uma distância **d** um do outro, reservando-se apenas ao suporte da lente a possibilidade de ser deslocado ao longo do trilho no sentido da fonte para o anteparo.

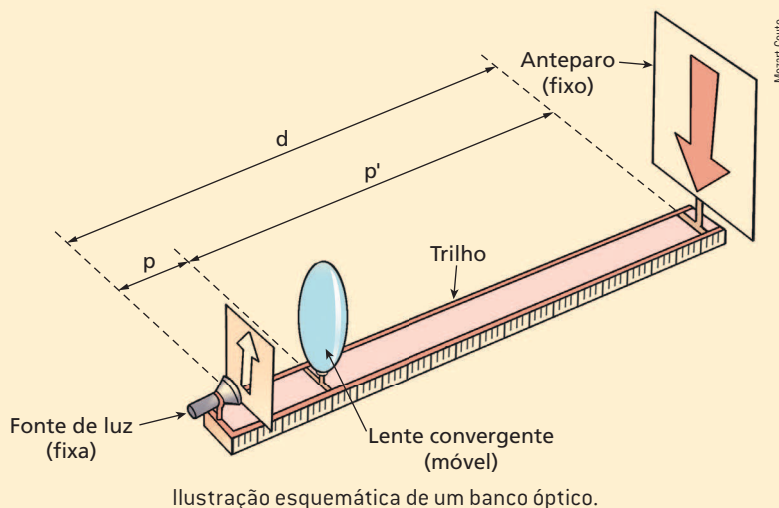



Ilustração esquemática de um banco óptico.

Iniciando-se o procedimento com a lente bem próxima à fonte, será possível observar no anteparo, nessa situação inicial, apenas um clarão. Afastando gradualmente a lente da fonte, porém, é encontrada uma primeira posição, mais próxima da lente que do anteparo, em que a imagem da seta aparecerá projetada com total nitidez. Continuando a deslocar a lente de modo que seja afastada da fonte, a figura projetada voltará a ficar indefinida, mas pode-se encontrar uma outra posição, agora mais próxima do anteparo que da lente, na qual, novamente, será visualizada uma imagem nítida da seta. No primeiro caso — que chamaremos de situação 1 —, a imagem será invertida e maior que a seta; no segundo — que chamaremos de situação 2 —, a imagem será invertida, porém menor que a seta. Serão possíveis, portanto, duas posições para a lente, entre a fonte e o anteparo, que permitirão a obtenção de imagens nítidas do objeto — seta luminosa — projetadas no anteparo.

Sejam **p** a distância entre a lente e a fonte de luz e **p'** a distância entre a lente e o anteparo. Em relação às situações 1 e 2, observando-se que o objeto luminoso e a imagem projetada são reais, é correto escrever que:

$$p + p' = d \Rightarrow p' = d - p \quad (1)$$

Pela **Equação de Gauss**, temos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), podemos determinar as posições $p_1$ e $p_2$ da lente em relação à fonte de luz, respectivamente, nas situações 1 e 2.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{d - p} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{d - p + p}{p(d - p)} = \frac{1}{f}$$

Da qual:

$$fd = dp - p^2 \Rightarrow p^2 - dp + fd = 0$$

Resolvendo a Equação do 2º grau, vem:

$$p = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} \Rightarrow p = \frac{d \pm \sqrt{d^2\left(1 - \frac{4f}{d}\right)}}{2} \text{ ou: } p = \frac{d \pm d\sqrt{1 - \frac{4f}{d}}}{2}$$

$$p = \frac{d}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f}{d}}\right)$$

É fundamental perceber, no entanto, que a equação acima terá soluções compatíveis com as situações 1 e 2 se $1 - \frac{4f}{d} > 0$, o que implica $1 > \frac{4f}{d}$ ou $d > 4f$. Isso significa que poderão ser visualizadas as imagens citadas apenas no caso de a distância entre a fonte de luz e o anteparo ser **maior que quatro vezes** a distância focal da lente.

**Solução correspondente à situação 1:**

$$p_1 = \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f}{d}}\right)$$

Da equação (1), obtém-se:

$$p'_1 = \frac{d}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4f}{d}}\right)$$

Nesse caso, o aumento linear transversal, $A_1 = -\frac{p'_1}{p_1}$, permite confirmar que a imagem projetada no anteparo é, de fato, **invertida** ($A_1 < 0$) e **maior** que o objeto ($|A_1| > 1$).

**Solução correspondente à situação 2:**

$$p_2 = \frac{d}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4f}{d}}\right)$$

Ainda em relação à equação (1), obtém-se:

$$p'_2 = \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f}{d}}\right)$$

Nesse caso, o aumento linear transversal, $A_2 = -\frac{p'_2}{p_2}$ permite confirmar que a imagem projetada no anteparo é, de fato, **invertida** ($A_2 < 0$) e **menor** que o objeto ($|A_2| < 1$).

É interessante destacar que, na situação em que $d = 4f$, a equação também tem solução, havendo, contudo, a formação de **apenas uma imagem nítida** projetada no anteparo. Em tal caso, ela será invertida e do mesmo tamanho do objeto. A seta e sua projeção estarão posicionadas respectivamente nos pontos antiprincipal objeto e antiprincipal imagem da lente.

Agora tente realizar o que acabamos de descrever com os recursos que você dispõe em casa ou na escola. Utilize, por exemplo, uma lanterna e fita adesiva preta para tampar o bocal dessa fonte de luz, deixando descoberta apenas uma região em forma de seta. Use ainda uma lente de aumento (lupa) e uma das paredes do recinto para as correspondentes projeções.

## Exercícios

nível 1

**22. E.R.** Uma lente esférica produz uma imagem real de um objeto situado a 30 cm da lente. Sabendo que o objeto se encontra a 50 cm de sua imagem, pede-se:

a) classificar a lente em convergente ou divergente.
b) calcular a distância focal da lente.
c) representar por meio de um esquema a situação proposta.

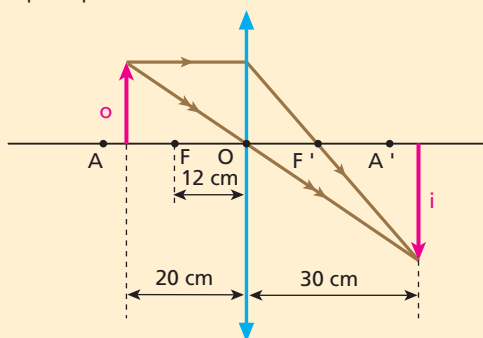
**Resolução:**

a) Se a um objeto real é conjugada uma imagem real, a lente é **convergente**.
b) Temos $p' = 30$ cm e $p + p' = 50$ cm. Obtemos, daí, $p = 20$ cm. Aplicando a função dos pontos conjugados, calculemos **f**:

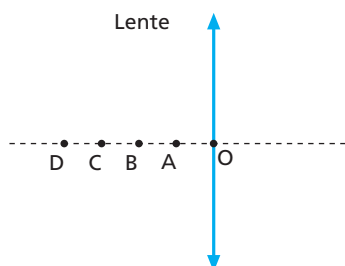
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{3+2}{60} \Rightarrow f = \frac{60}{5}$$

$$\boxed{f = 12 \text{ cm}}$$

c) No caso, o objeto situa-se entre o ponto antiprincipal e o foco principal.

**23.** Um objeto luminoso está posicionado no eixo principal de uma lente esférica convergente, distante 20 cm do seu centro óptico. Sabendo que a distância focal da lente é de 10 cm, calcule a distância da imagem ao objeto, em centímetros.

**24.** (Unisa-SP) Observando-se uma estrela distante com uma lente convergente, verifica-se que a imagem obtida se situa a 10 cm da lente. Observando-se um objeto localizado a 30 cm da lente, a que distância desta se formará a nova imagem?

**25.** (Unip-SP) Na figura, representamos uma lente delgada convergente cujo foco é o ponto **B**. Os pontos **O**, **A**, **B**, **C** e **D** são tais que $OA = AB = BC = CD$.

No instante $t_0$, um objeto pontual **P** está posicionado em **A** e no instante $t_1$, está posicionado em **D**. Seja **P'** a imagem de **P** fornecida pela lente. Sendo **f** a distância focal da lente, o deslocamento de **P'**, no intervalo de $t_0$ a $t_1$, tem módulo igual a:

a) 2f. b) 3f. c) 4f. d) 5f. e) 6f.

**26. E.R.** Pretende-se projetar em um anteparo a imagem nítida de um objeto real, ampliada 4 vezes. Para isso, utiliza-se uma lente esférica cuja abscissa focal tem módulo 20 cm. Determine:

a) o tipo de lente que deve ser utilizado (convergente ou divergente).
b) a distância do objeto à lente.
c) a distância do anteparo à lente.

**Resolução:**

a) Se a imagem será projetada em um anteparo, sua natureza é **real**. Assim, como o objeto e a imagem são reais, temos $p > 0$ e $p' > 0$ e, consequentemente, $f > 0$, indicando que a lente é **convergente**.
b) Com $p > 0$ e $p' > 0$, obtém-se aumento linear transversal negativo (imagem invertida).

$$A = -4$$

Mas: $A = \dfrac{f}{f - p}$

Logo: $-4 = \dfrac{20}{20 - p} \Rightarrow -20 + p = 5$

$$\boxed{p = 25 \text{ cm}}$$

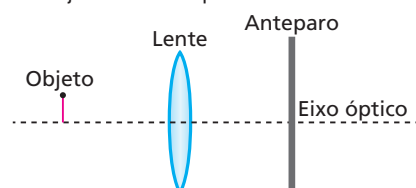
c) Observando que a imagem está no anteparo, temos:

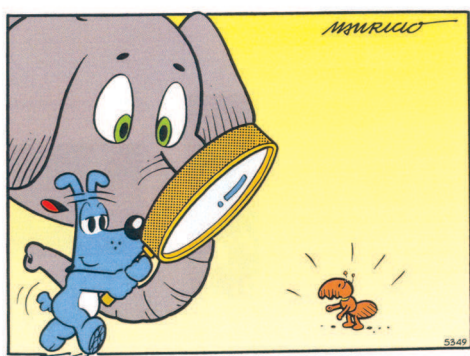
$$A = -\frac{p'}{p}$$

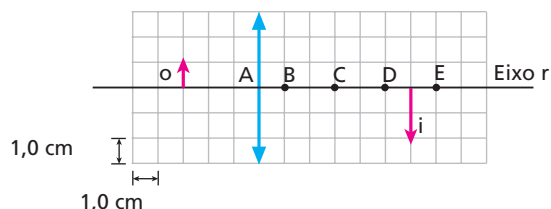
$$-4 = -\frac{p'}{25} \Rightarrow \boxed{p' = 100 \text{ cm}}$$

**27.** Utilizando-se uma lente esférica convergente, projeta-se em um anteparo difusor a imagem de um objeto luminoso, ampliada 5 vezes. Sabendo que a distância do objeto à lente é de 12 cm, determine:

a) a abscissa focal da lente.
b) a distância do anteparo à lente.

**28.** (UFPI) A figura a seguir representa uma lente delgada convergente, um anteparo e um objeto luminoso. A lente tem distância focal igual a 4,0 cm e está separada do anteparo por uma distância fixa de 20 cm. O objeto, com altura de 3,0 cm, é deslocado ao longo do eixo óptico da lente até que se tenha sua imagem formada com nitidez sobre o anteparo. Nessa situação, qual a distância do objeto à lente e qual a altura de sua imagem?

**29.** (PUC-SP) Leia com atenção a tira abaixo:

TURMA DA MÔNICA - BIDU

Suponha que Bidu, para resolver o problema da amiga, que só tem 6 mm de altura, tenha utilizado uma lente delgada convergente de distância focal 12 cm, colocada a 4 cm da formiguinha. Para o elefante, a altura da formiga, em cm, parecerá ser de:
a) 0,6. b) 0,9. c) 1,2. d) 1,5. e) 1,8.

**30.** Na figura a seguir, estão representados um objeto **o** e sua respectiva imagem **i**, produzida em uma lente delgada convergente:

Mantendo-se fixo o objeto, desloca-se a lente na direção do eixo **r**, até que a nova imagem tenha a mesma altura que o objeto. Nessas condições, o centro óptico **O** da lente deve coincidir com o ponto:
a) **A**. b) **B**. c) **C**. d) **D**. e) **E**.

**31.** (Ufac) Um dispositivo de segurança muito usado em portas de apartamentos é o olho mágico. Ele é uma lente esférica que permite ver o visitante que está aguardando do lado de fora. Quando o visitante está a 60 cm da porta, o olho mágico forma, para a pessoa de dentro do apartamento, uma imagem três vezes menor e direita do rosto do visitante. O valor absoluto da distância focal dessa lente, em cm, vale:
a) 75. b) 60. c) 45. d) 30. e) 15.

## Exercícios nível 2

**32. E.R.** Um objeto linear de 12 cm de comprimento é colocado diante de uma lente convergente, cuja distância focal é de 15 cm. Sabendo que a distância do objeto à lente é de 60 cm, obtenha, analiticamente, todas as características da imagem.

**Resolução:**

Como o objeto é real, tem-se $p > 0$: $p = +60$ cm.
Como a lente é convergente, tem-se $f > 0$: $f = +15$ cm.
A partir da função dos pontos conjugados, calculamos **p′**:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{15} - \frac{1}{60} = \frac{4-1}{60} = \frac{3}{60}$$

$$\boxed{p' = +20 \text{ cm}}$$

Como **p′** resultou positiva, conclui-se que a imagem é real. Com **p** e **p′** conhecidas, calculamos o aumento linear transversal:

$$A = -\frac{p'}{p}$$

$$A = -\frac{20}{60} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{3}}$$

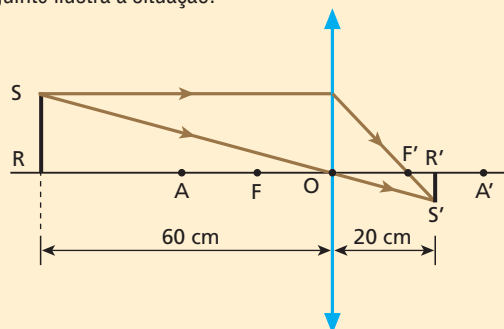
Como **A** resultou negativo, conclui-se que a imagem é invertida. E pelo fato de $|A| < 1$, a imagem é menor que o objeto. Lembrando que o comprimento do objeto $|o|$ vale 12 cm, calculamos o comprimento da imagem $|i|$:

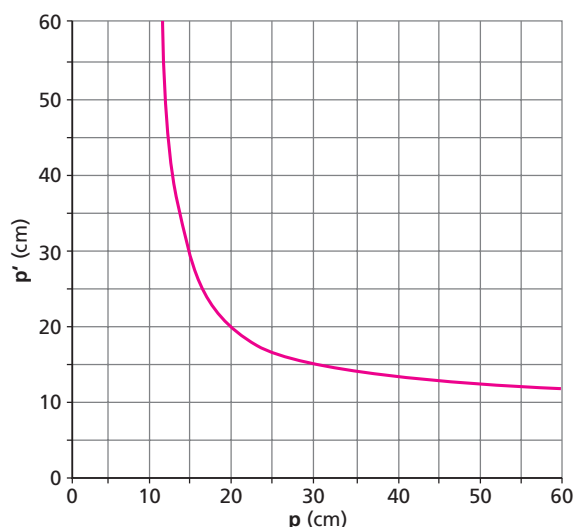
$$A = \frac{i}{o} \Rightarrow |A| = \frac{|i|}{|o|} \Rightarrow |i| = |A| \cdot |o|$$

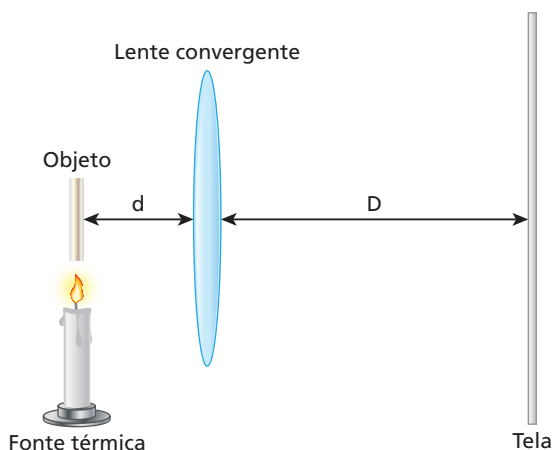
$$|i| = \frac{1}{3} \cdot 12 \text{ (cm)} \Rightarrow \boxed{|i| = 4{,}0 \text{ cm}}$$

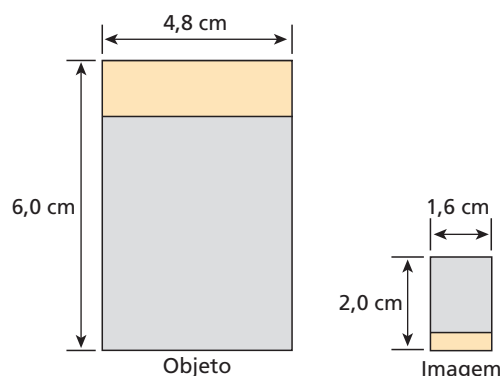
Finalmente, podemos dizer que:

> A imagem é real, invertida, menor que o objeto e tem 4,0 cm de comprimento.

Convém destacar ainda que, como $15 \text{ cm} < p' < 30 \text{ cm}$ (observe-se que $p' = 20$ cm), a imagem situa-se entre o foco principal imagem e o ponto antiprincipal imagem. O esquema seguinte ilustra a situação:

**33.** Uma pequena lâmpada fluorescente está acesa e posicionada perpendicularmente ao eixo principal de uma lente delgada convergente. A imagem da lâmpada conjugada por essa lente tem metade do tamanho da lâmpada e se forma sobre um anteparo a 60 cm da lente. Nessas condições, qual é a distância focal da lente expressa em centímetros?

**34.** Parte do gráfico da abscissa-imagem, **p′**, em função da abscissa-objeto, **p**, medidas ao longo do eixo óptico de uma lente esférica que obedece às condições de Gauss, está mostrada abaixo.

a) Determine o comportamento óptico da lente (convergente ou divergente), bem como sua distância focal.
b) Admitindo que a abscissa-objeto seja igual a 5,0 cm, calcule a correspondente abscissa-imagem e também o aumento linear transversal.

**35.** (UFG-GO) Para realizar a medida do coeficiente de dilatação linear de um objeto, cujo material é desconhecido, montou-se o arranjo experimental ilustrado na figura a seguir, no qual d = 3,0 cm e D = 150,0 cm.

O objeto tem um comprimento inicial de 4,0 cm. Após ser submetido a uma variação de temperatura de 250 °C, sua imagem projetada na tela aumentou 1,0 cm. Com base no exposto, calcule o valor do coeficiente de dilatação linear do objeto.

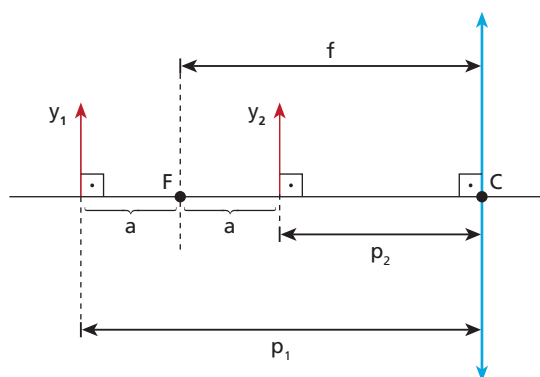
**36.** (Fuvest-SP) A figura a seguir mostra, numa mesma escala, o desenho de um objeto retangular e sua imagem, formada a 50 cm de uma lente convergente de distância focal **f**. O objeto e a imagem estão em planos perpendiculares ao eixo óptico da lente.
Podemos afirmar que o objeto e a imagem:

a) estão do mesmo lado da lente e que f = 150 cm.
b) estão em lados opostos da lente e que f = 150 cm.
c) estão do mesmo lado da lente e que f = 37,5 cm.
d) estão em lados opostos da lente e que f = 37,5 cm.
e) podem estar tanto do mesmo lado como em lados opostos da lente e que f = 37,5 cm.

**37.** Um objeto real é colocado a 60 cm de uma lente delgada convergente. Aproximando-se de 15 cm o objeto da lente, a nova imagem obtida fica três vezes maior que a anterior, com a mesma orientação.
Pode-se então afirmar que a distância focal da lente vale, em centímetros:

a) 7,5 cm;
b) 15,0 cm;
c) 22,5 cm;
d) 30,0 cm;
e) 37,5 cm.

**38.** (Unip-SP) Para uma lente convergente, utilizada nas condições de aproximação de Gauss, o aumento linear **A** é dado pela relação:

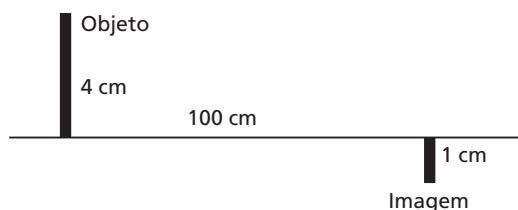
$$A = \frac{f}{f - p}$$

**f** é a distância focal da lente e **p** é a distância entre o objeto e o centro óptico da lente.
Considere dois objetos idênticos, $y_1$ e $y_2$, posicionados simetricamente em relação ao foco, conforme ilustra a figura.

Sejam $A_1$ e $A_2$ os aumentos lineares correspondentes aos objetos $y_1$ e $y_2$, respectivamente.

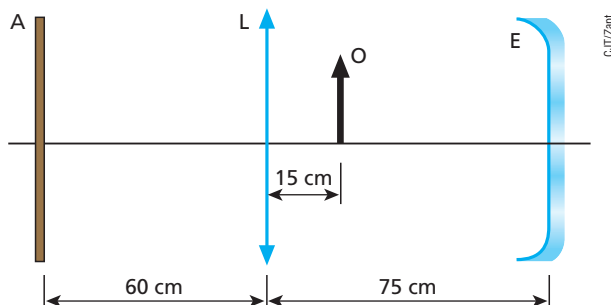
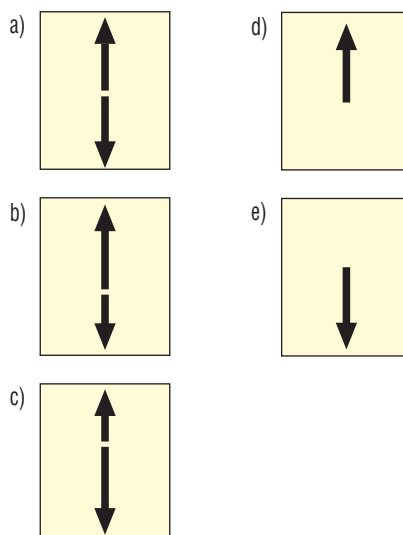
A razão $\frac{A_1}{A_2}$

a) não está determinada.
b) vale −2.
c) vale −1.
d) vale 1.
e) vale 2.

**39.** A imagem que uma lente esférica divergente conjuga a um objeto linear colocado perpendicularmente ao seu eixo óptico tem um quarto do tamanho do objeto e está situada a 6,0 cm da lente. Supondo válidas as condições de Gauss, determine:
a) a distância do objeto à lente.
b) a abscissa focal da lente.

**40.** (Unicamp-SP) Um sistema de lentes produz a imagem real de um objeto, conforme a figura. Calcule a distância focal e localize a posição de uma lente delgada que produza o mesmo efeito.

**41.** (Unesp-SP) Um estudante, utilizando uma lente, projeta a imagem da tela da sua televisão, que mede 0,42 m × 0,55 m, na parede oposta da sala. Ele obtém uma imagem plana e nítida com a lente localizada a 1,8 m da tela da televisão e a 0,36 m da parede.
a) Quais as dimensões da tela projetada na parede? Qual a distância focal da lente?
b) Como a imagem aparece na tela projetada na parede: sem qualquer inversão? Invertida apenas na vertical (de cabeça para baixo)? Invertida na vertical e na horizontal (de cabeça para baixo e trocando o lado esquerdo pelo direito)? Justifique.

**42.** Um pequeno bastão luminoso é disposto paralelamente a uma parede, a 338 cm de distância. Entre o bastão e a parede é instalada uma lente esférica convergente, de distância focal igual a 24 cm, de modo que projete na parede uma imagem nítida e ampliada do bastão. Supondo válidas as condições de Gauss, determine:
a) a distância entre a lente e a parede.
b) quantas vezes a imagem projetada é maior que o bastão.

**43.** Uma lente esférica convergente **L** e um espelho esférico côncavo **E**, ambos em operação de acordo com as condições de aproximação de Gauss, são dispostos coaxialmente conforme representa o esquema. Um anteparo retangular **A** e um objeto linear **O** em forma de seta, ambos perpendiculares ao eixo do sistema, são posicionados nos locais indicados, iluminando-se o objeto por todos os lados.

Sendo de 12 cm e 30 cm as distâncias focais de **L** e **E**, respectivamente, a melhor representação para a figura projetada em **A** é:

# Bloco 3

## 11. Vergência ("grau") de uma lente

É comum as pessoas avaliarem lentes como "fortes" ou "fracas". Uma lente será tanto mais "forte" quanto maior for seu "poder" de alterar a trajetória da luz.

Entretanto, essa é uma concepção simplista, já que existe uma grandeza física que quantifica a capacidade que as lentes têm de desviar os raios luminosos.

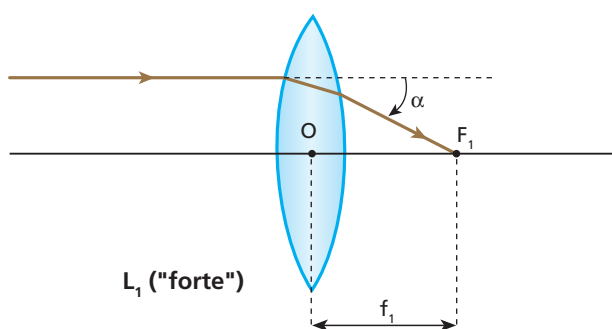
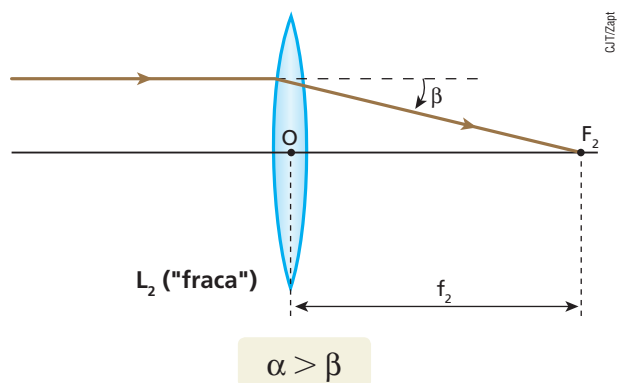
Trata-se da **vergência** (**V**), que é definida como o inverso da abscissa focal (**f**).

$$V = \frac{1}{f}$$

Os esquemas a seguir representam duas lentes convergentes, $L_1$ e $L_2$, de abscissas focais $f_1$ e $f_2$, provocando, em raios de luz paralelos aos seus eixos principais, desvios angulares respectivamente iguais a $\alpha$ e $\beta$.

$\alpha > \beta$

Observe que $\mathbf{L_1}$ desvia mais a luz que $\mathbf{L_2}$. Nesse caso, temos $f_1 < f_2$, o que implica $V_1 > V_2$.

A vergência é uma **grandeza algébrica** que tem o mesmo sinal da abscissa focal.

Nas lentes convergentes (focos reais): $\mathbf{f > 0}$ e $\mathbf{V > 0}$.

Nas lentes divergentes (focos virtuais): $\mathbf{f < 0}$ e $\mathbf{V < 0}$.

A unidade de vergência é o inverso da unidade de comprimento. No SI, com a abscissa focal expressa em metros, temos:

$$\text{unid. (V)} = \frac{1}{\text{m}} = \text{m}^{-1} = \text{dioptria (di)}$$

Na linguagem popular, é comum ouvirmos a vergência expressa em "graus". Geralmente, 1 "grau" equivale a 1 dioptria.

## Faça você mesmo

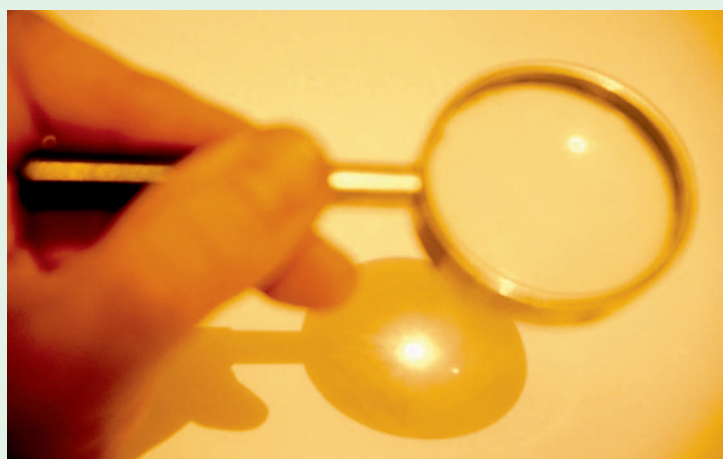
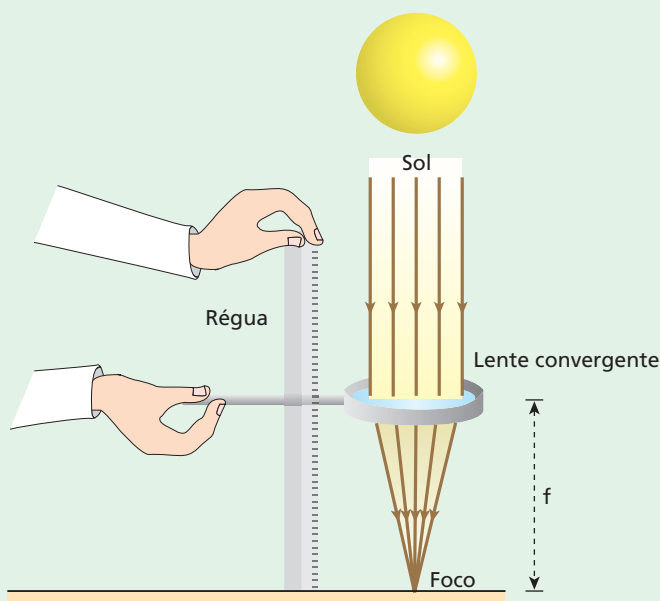
Vamos determinar o "grau" de uma lente convergente?

Consiga uma dessas lentes — uma lupa, por exemplo — e dirija o eixo óptico dela para a região central do Sol.

Movimente a lente de modo a verificar que a área da região que ela ilumina sobre uma superfície está diminuindo. Ajuste a posição da lente de forma a obter a região iluminada de menor área possível.

Quando você conseguir concentrar a luz solar emergente da lente em praticamente um ponto, você terá determinado o foco desse sistema óptico.

Utilizando uma régua ou algo equivalente, meça em seguida a distância **f** entre o foco e o centro da lente, como representa o esquema ao lado.

A medida **f** será a distância focal. Expressando o valor de **f** em metros e lembrando-se de que a vergência ("grau") de uma lente é o inverso de sua distância focal $\left(V = \frac{1}{f}\right)$, você poderá fazer o cálculo de **V**, obtendo, assim, a vergência da lente utilizada, em **dioptrias** (di).

## 12. Equação dos Fabricantes de Lentes

Atribuída ao astrônomo inglês Edmond **Halley** (1656-1742), a **Equação dos Fabricantes de Lentes** permite calcular a abscissa focal (ou a vergência) de uma lente, sendo conhecidos seu índice de refração em relação ao meio externo e os raios de curvatura de suas faces.

Representando por $n_{L,m}$ o índice de refração da lente em relação ao meio externo $\left(n_{L,m} = \frac{n_L}{n_m}\right)$ e por $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$ os raios de curvatura de suas faces, pode-se demonstrar, como será feito a seguir, que a abscissa focal **f** fica determinada por:

$$\frac{1}{f} = (n_{L,m} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Lembrando que $V = \frac{1}{f}$, temos:

$$V = (n_{L,m} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Para que as abscissas focais (ou vergências) calculadas pela Equação dos Fabricantes de Lentes estejam de acordo com o referencial gaussiano, devemos adotar a seguinte convenção de sinais:

- **Faces convexas:** raios de curvatura positivos ($R > 0$);
- **Faces côncavas:** raios de curvatura negativos ($R < 0$).

### De 76 em 76 anos?

Halley foi o primeiro astrônomo a conjecturar que os cometas são corpos celestes dotados de órbitas regulares e movimentos periódicos. Fundamentado nas teorias de seu compatriota e contemporâneo Isaac Newton, constatou que um certo astro, observado em 1531, 1607 e 1682, se tratava de um mesmo corpo celeste, o qual deveria cruzar o Sistema Solar também em 1758, o que realmente se verificou. Esse astro, com período próximo de 76 anos, foi denominado **cometa de Halley** em sua homenagem.

O cometa de Halley aparece nesta fotografia de 12 de março de 1986. Naquele ano o astro passou pela última vez nas proximidades da Terra. Sua próxima aparição deverá ocorrer em 2062.

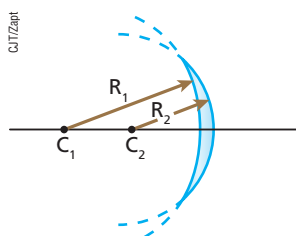
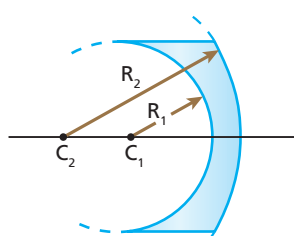
National Portrait Gallery, London/Diomedia

Detalhe de retrato de *sir* Edmond Halley, pintado por Richard Phillips por volta de 1720. Natural Portrait Gallery, Londres.

ROYAL OBSERVATORY, EDINBURGH/SPL/Latinstock

Cometa de Halley, em 12/3/1986.

Nas duas figuras a seguir, exemplificamos a convenção:

CJT/Zapt

Lente côncavo-convexa: $R_1 < 0$ e $R_2 > 0$.

Lente convexo-côncava: $R_1 < 0$ e $R_2 > 0$.

Para lentes esféricas biconvexas ou bicôncavas **simétricas** — com faces de raios de curvatura iguais a **R** —, a Equação dos Fabricantes de Lentes fica expressa por:

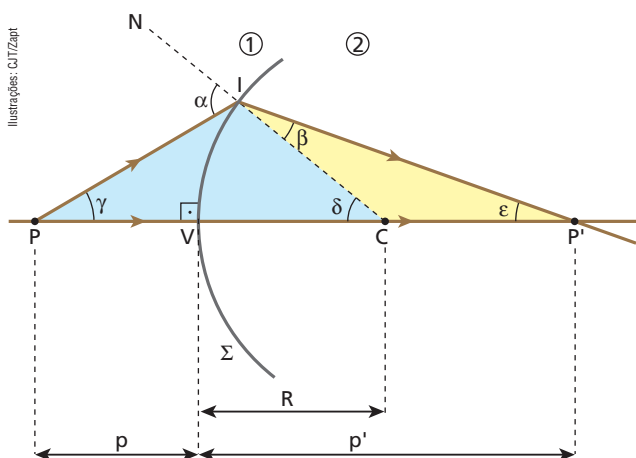
$$V = (n_{L,m} - 1)\frac{2}{R}$$

Se uma das faces da lente for plana, o raio de curvatura $\mathbf{R_1}$ dessa face tenderá ao infinito, fazendo o quociente $\frac{1}{R_1}$ tender a 0. Para esse caso, a Equação dos Fabricantes de Lentes reduz-se a:

$$V = (n_{L,m} - 1)\frac{2}{R_2}$$

### Equação do Dioptro Esférico

Consideremos o dioptro constituído pelos meios transparentes 1 e 2 de índices absolutos de refração respectivamente iguais a $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$, separados pela superfície esférica $\boldsymbol{\Sigma}$ de centro de curvatura **C** e raio **R**. A um objeto pontual **P** situado a uma distância **p**

do ponto **V**, o dioptro conjuga uma imagem também pontual **P'** situada a uma distância **p'** desse mesmo ponto, conforme representa a figura abaixo.

Visando estabelecer uma relação entre $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, **p**, **p'** e **R**, apliquemos a Lei de Snell à refração do raio luminoso incidente no ponto **I**:

$$n_1 \text{ sen } \alpha = n_2 \text{ sen } \beta$$

Admitindo que esse raio seja pouco inclinado em relação à reta determinada por **P** e **P'**, os ângulos $\alpha$ e $\beta$ serão pequenos, valendo a aproximação:

$$\text{sen } \alpha \cong \alpha \quad \text{e} \quad \text{sen } \beta \cong \beta$$

Assim:

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad \text{(a)}$$

No triângulo PCI, $\alpha$ é ângulo externo, logo:

$$\alpha = \gamma + \delta \quad \text{(b)}$$

No triângulo CIP', $\delta$ é ângulo externo, logo:

$$\delta = \beta + \varepsilon$$

Portanto:

$$\beta = \delta - \varepsilon \quad \text{(c)}$$

Substituindo (b) e (c) em (a), vem:

$$n_1 (\gamma + \delta) = n_2 (\delta - \varepsilon)$$

$$n_1 \gamma + n_1 \delta = n_2 \delta - n_2 \varepsilon$$

Da qual:

$$n_1 \gamma + n_2 \varepsilon = (n_2 - n_1)\, \delta \quad \text{(d)}$$

Valem também as aproximações:

$$\gamma \cong \text{tg } \gamma = \frac{IV}{p}$$

$$\varepsilon \cong \text{tg } \varepsilon = \frac{IV}{p'}$$

$$\delta \cong \text{tg } \delta = \frac{IV}{R}$$

Substituindo os valores de $\gamma$, $\varepsilon$ e $\delta$ em (d), decorre que:

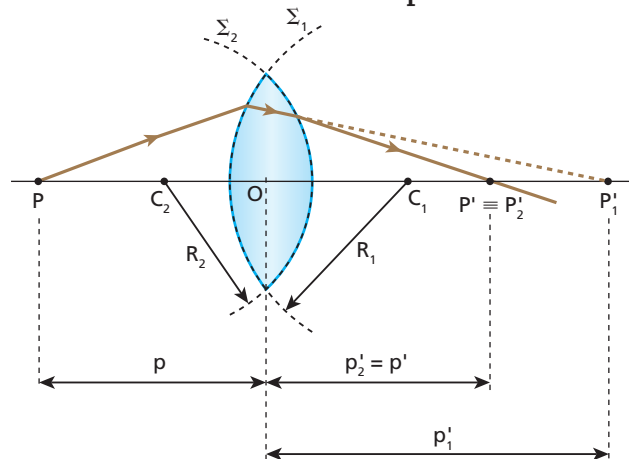
$$n_1 \frac{IV}{p} + n_2 \frac{IV}{p'} = (n_2 - n_1) \frac{IV}{R}$$

Logo:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

## Demonstração da Equação dos Fabricantes de Lentes

Consideremos a lente biconvexa esquematizada a seguir, de faces esféricas $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ com raios de curvatura respectivamente iguais a $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$. Essa lente é fabricada com um material de índice absoluto de refração $n_L$ e está imersa em um meio de índice absoluto de refração $n_m$, de modo que o índice de refração da lente em relação ao meio externo seja igual a $n_{L,\,m}$.

Um objeto pontual **P**, colocado a uma distância **p** do centro óptico **O** da lente, produz uma imagem final **P'** situada a uma distância **p'** de **O**.

Aplicando a Equação do Dioptro Esférico à face $\Sigma_1$, temos:

$$\frac{n_m}{p} + \frac{n_L}{p'_1} = \frac{n_L - n_m}{R_1} \quad \text{(I)}$$

A imagem real gerada pela face $\Sigma_1$ comporta-se como objeto virtual em relação à face $\Sigma_2$. Aplicando a essa face a Equação do Dioptro Esférico, tem-se:

$$-\frac{n_L}{p'_1} + \frac{n_m}{p'_2} = \frac{n_L - n_m}{R_2} \quad \text{(II)}$$

Somando (I) e (II) e observando que $p'_2 = p'$, obtém-se:

$$\frac{n_m}{p} + \frac{n_m}{p'_2} = (n_L - n_m)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Dividindo-se todos os termos da equação acima por $n_m$, decorre que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \left(\frac{n_L}{n_m} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

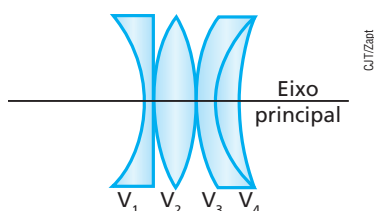
Lembrando-se de que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$ (Equação de Gauss), em que **f** é a abscissa focal da lente, chega-se, finalmente, à **Equação dos Fabricantes de Lentes**:

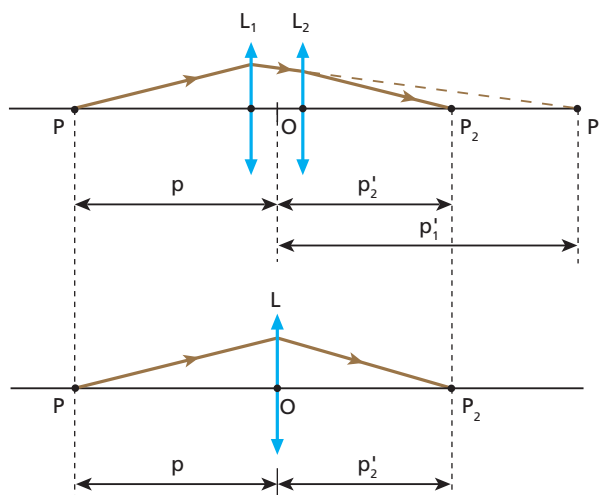
$$\frac{1}{f} = (n_{L,\,m} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$ (Equação de Halley)

## 13. Associação de lentes — Teorema das Vergências

Nos equipamentos ópticos modernos com maior grau de sofisticação, são comuns as associações de lentes. Em geral, uma lente esférica, por si só, apresenta problemas como o das aberrações cromáticas, que consiste no fato de a lente ter distâncias focais diferentes para as diferentes cores. Ao incidir paralelamente ao eixo principal, um pincel elementar de luz branca refrata-se sofrendo dispersão, e cada cor experimenta um desvio diferente. Associando as lentes adequadamente, consegue-se uma minimização considerável desse e de outros inconvenientes.

Um sistema de lentes associadas como o que está representado no esquema abaixo é uma **associação por justaposição**.

Nesse caso, as lentes apresentam eixo principal comum e estão dispostas lado a lado, praticamente encostadas uma na outra.

Considere a figura a seguir, em que estão representadas duas lentes convergentes delgadas, $L_1$ e $L_2$, associadas por justaposição. Seja **O** o centro óptico comum às lentes (de espessura desprezível e encostadas uma na outra) e **P** um ponto luminoso situado sobre o eixo do sistema. A lente $L_1$ conjuga a **P** a imagem real $P_1$, que se comporta como objeto virtual em relação a $L_2$. Finalmente, $L_2$ conjuga a $P_1$ a imagem real $P_2$, que constitui a imagem final que a associação fornece a **P**.

É possível imaginar uma lente **L** que, colocada na mesma posição de $L_1$ e $L_2$, conjugue a **P** uma imagem com as mesmas características de $P_2$. Dizemos, então, que essa lente única que substitui a associação é a **lente equivalente**.

Calculemos a abscissa focal (e a vergência) da lente equivalente em função das abscissas focais (e das vergências) das lentes componentes da associação. Para isso, vamos adotar em nossas considerações a seguinte simbologia:

$f_1$ e $V_1$ = abscissa focal e vergência da lente $L_1$;
$f_2$ e $V_2$ = abscissa focal e vergência da lente $L_2$;
f e V = abscissa focal e vergência da lente equivalente.

Aplicando a função dos pontos conjugados à lente $L_1$, tem-se:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'_1} \qquad \text{(I)}$$

Aplicando a função dos pontos conjugados à lente $L_2$, tem-se:

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} \qquad \text{(II)}$$

Somando as equações (I) e (II), segue que:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'_2} \qquad \text{(III)}$$

Aplicando a função dos pontos conjugados à lente equivalente **L**, chega-se a:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'_2} \qquad \text{(IV)}$$

Comparando (III) e (IV), obtém-se:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Em termos de vergências $\left(V = \frac{1}{f}\right)$, é também correto que:

$$V = V_1 + V_2$$

A conclusão a que chegamos é conhecida por **Teorema das Vergências**, sendo extensiva ao cálculo da vergência equivalente da associação de duas ou mais lentes justapostas. As lentes envolvidas podem ser

convergentes ou divergentes, e, nos cálculos, deve-se observar os sinais algébricos de suas abscissas focais (e vergências).

Para **n** lentes que constituem uma **associação delgada** (espessura desprezível) por justaposição, podemos escrever que:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + ... + \frac{1}{f_n}$$

ou:

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n$$

## Exercícios

nível 1

**44. E.R.** Considere uma lente plano-convexa de vidro imersa no ar, em que o raio de curvatura da face convexa vale 25 cm. Se o índice de refração do vidro vale 1,5, calcule a distância focal e a vergência da lente.

**Resolução:**

Trata-se de uma aplicação direta da **Equação dos Fabricantes de Lentes**:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_m} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

No caso, $n_L = 1,5$, $n_m = 1,0$ e $R_1 = +25$ cm (na face convexa, $R > 0$).

O raio de curvatura $R_2$ tende ao infinito, já que a face correspondente a ele é plana. Por isso, o termo $\frac{1}{R_2}$ tende a zero, conduzindo-nos a:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1,5}{1,0} - 1\right)\left(\frac{1}{25} + 0\right)$$

$$\frac{1}{f} = 0,50 \cdot \frac{1}{25} \Rightarrow \boxed{f = 50 \text{ cm} = 0,50 \text{ m}}$$

A vergência é dada pelo inverso da distância focal.

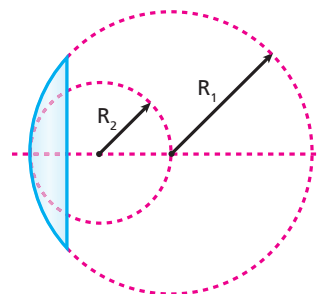
$$V = \frac{1}{f} \Rightarrow V = \frac{1}{0,50} \text{ (di)} \Rightarrow \boxed{V = 2,0 \text{ di}}$$

A lente é convergente, já que $f > 0$ e $V > 0$.

**45.** Uma lente delgada biconvexa de raios de curvatura iguais a 50 cm, feita de material de índice de refração 1,5, está imersa no ar (índice de refração igual a 1,0). A que distância da lente deve-se colocar um objeto real para que sua imagem se forme no infinito?

**46.** Uma lente esférica de vidro ($n_v = 1,5$) tem uma face plana e a outra côncava, com raio de curvatura de 1,0 m. Sabendo que a lente está imersa no ar ($n_{ar} = 1,0$), determine:

a) a abscissa focal da lente.
b) sua vergência.
c) seu comportamento óptico (convergente ou divergente).

**47.** Uma lente plano-convexa de vidro em operação no ar apresenta distância focal $f_1$ quando o raio de curvatura de sua face esférica tem medida $R_1$. Desgastando-se essa lente, faz-se com que o raio de curvatura da face esférica adquira a medida $R_2$, conforme indica a figura a seguir.

Sendo $f_2$ a distância focal da lente depois do desgaste, é correto afirmar que:

a) $f_2 = \frac{1}{2} f_1$.
b) $f_2 = f_1$.
c) $f_2 = 2f_1$.
d) $f_2 = 3f_1$.
e) o valor de $f_2$ está indeterminado, já que não é conhecida a relação entre $R_2$ e $R_1$.

**48. E.R.** São justapostas três lentes delgadas **A**, **B** e **C** com vergências $V_A = +4$ di, $V_B = -3$ di e $V_C = +1$ di.

a) Qual é a vergência e qual a distância focal do sistema resultante?
b) O comportamento óptico do sistema resultante é convergente ou divergente?

**Resolução:**

a) A vergência equivalente a uma associação delgada de lentes justapostas é calculada por:

$$\boxed{V = V_1 + V_2 + ... + V_n}$$

No caso:

$$V = V_A + V_B + V_C$$

Substituindo os valores de $V_A$, $V_B$ e $V_C$, segue que:

$$V = +4 \text{ di} - 3 \text{ di} + 1 \text{ di} \Rightarrow \boxed{V = +2 \text{ di}}$$

Sendo $V = \frac{1}{f}$, calculamos **f**, que é a distância focal equivalente à associação:

$$V = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{V} = \frac{1}{+2 \text{ di}} = 0,5 \text{ m}$$

$$\boxed{f = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}}$$

b) Como a vergência do sistema resultante é positiva ($V = +2$ di), ele tem comportamento **convergente**.

**49.** Admita que um náufrago tenha conseguido chegar a uma ilha deserta levando consigo apenas um conjunto de duas lentes justapostas, uma delas com vergência $V_1 = +3,0$ di e a outra com vergência $V_2 = -1,0$ di. Para acender uma fogueira concentrando raios solares, ele utilizará o Sol do meio-dia, dispondo as lentes paralelamente ao solo, onde fez um amontoado de gravetos e folhas secas. Para obter fogo no menor intervalo de tempo possível, o náufrago deverá colocar as lentes a uma distância dos gravetos e folhas secas igual a:

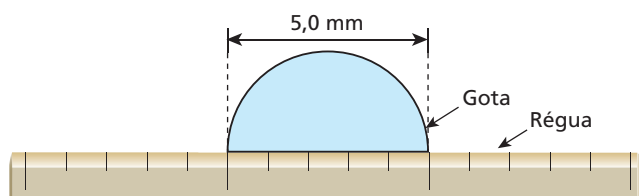
a) 2,0 m.
b) 1,5 m.
c) 1,0 m.
d) 0,50 m.
e) 0,25 m.

## Exercícios

nível 2

**50.** Uma lente esférica de vidro, envolvida pelo ar, tem raios de curvatura iguais. Sabendo que o índice de refração do vidro em relação ao ar vale $\frac{3}{2}$ e que a convergência da lente é de $+5$ di:

a) calcule o raio de curvatura comum às faces da lente.
b) classifique a lente como biconvexa ou bicôncava.

**51.** (Unifesp-SP) Um estudante observa uma gota de água em repouso sobre sua régua de acrílico, como ilustrado na figura.

Curioso, percebe que, ao olhar para o caderno de anotações através dessa gota, as letras aumentam ou diminuem de tamanho conforme afasta ou aproxima a régua do caderno. Fazendo alguns testes e algumas considerações, ele percebe que a gota de água pode ser utilizada como uma lente e que os efeitos ópticos do acrílico podem ser desprezados. Se a gota tem raio de curvatura de 2,5 mm e índice de refração 1,35 em relação ao ar:

a) Calcule a convergência **C** dessa lente.
b) Suponha que o estudante queira obter um aumento de 50 vezes para uma imagem direita, utilizando essa gota. A que distância **d** da lente deve-se colocar o objeto?

**52.** (UFC-CE) Uma lente esférica delgada, construída de um material de índice de refração **n**, está imersa no ar ($n_{ar} = 1,00$). A lente tem distância focal **f** e suas superfícies esféricas têm raios de curvatura $R_1$ e $R_2$. Esses parâmetros obedecem a uma relação, conhecida como "equação dos fabricantes", expressa por

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

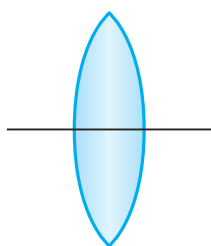



Figura I

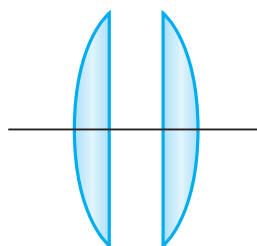



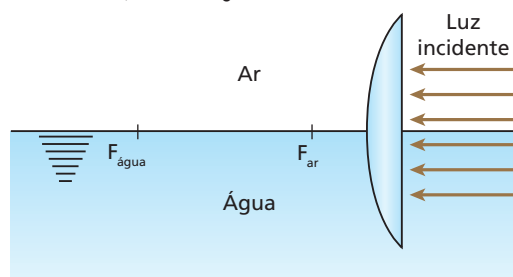
Figura II

Suponha uma lente biconvexa de raios de curvatura iguais ($R_1 = R_2 = R$), distância focal $f_0$ e índice de refração $n = 1,8$ (figura I). Essa lente é partida ao meio, dando origem a duas lentes plano-convexas iguais (figura II). A distância focal de cada uma das novas lentes é:

a) $\frac{1}{2} f_0$.
b) $\frac{4}{5} f_0$.
c) $f_0$.
d) $\frac{9}{5} f_0$.
e) $2f_0$.

**53.** Um estudante possui uma lente côncavo-convexa de vidro $\left(n_v = \frac{3}{2}\right)$, cujas faces têm raios de curvatura 10 cm e 5,0 cm. Sabendo que a lente é utilizada no ar ($n_{ar} = 1$) e posteriormente na água $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$, responda:

a) Do ar para a água os planos focais aproximam-se ou afastam-se do centro óptico?
b) Qual é a variação da distância focal da lente?

**54.** (UFTM-MG) Em um laboratório, uma lente plano-convexa de raio de curvatura 0,5 m é parcialmente mergulhada em água, de modo que o eixo principal fique no mesmo plano da superfície de separação entre a água e o ar. Um feixe de luz, incidindo paralelamente a esse eixo, após passar pela lente, converge para dois focos distintos ($F_{ar}$ e $F_{água}$). Na região em que a lente está imersa no ar, a convergência é de 1 di.

Se o índice de refração do ar tem valor 1 e o índice de refração da água, valor $\frac{4}{3}$, a convergência da parte da lente mergulhada no líquido é, em di:

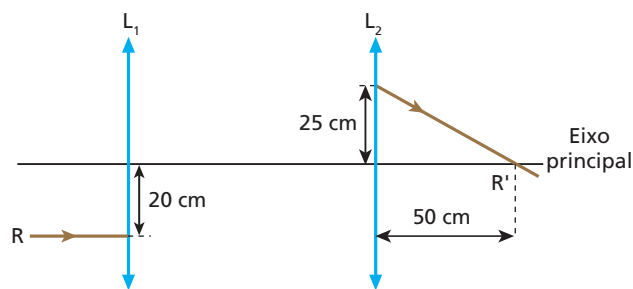
a) $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{3}{5}$.
c) $\frac{2}{3}$.
d) $\frac{3}{4}$.
e) $\frac{4}{5}$.

**55.** Nicolas é um curioso estudante de Óptica Geométrica que dispõe de duas lupas iguais (lentes biconvexas de vidro que obedecem às condições de Gauss). Posicionando um pequeno objeto luminoso a 10 cm de uma das lupas, ele nota uma imagem direita e ampliada, com duas vezes as dimensões do objeto. Em seguida, ele justapõe as duas lupas, mantendo o objeto na mesma posição, a 10 cm da associação. Nesse caso, ele observará uma imagem

a) direita e ampliada.
b) invertida e ampliada.
c) direita e reduzida.
d) invertida e reduzida.
e) imprópria (indefinida).

**56.** Um objeto luminoso de altura igual a 15 cm é colocado perpendicularmente ao eixo óptico de uma lente esférica convergente que obedece às condições de Gauss. Sabendo que a imagem obtida tem altura igual a 3,0 cm e está a 30 cm do objeto, determine a vergência da lente.

**57.** (Vunesp-SP) Suponha que você tenha em mãos duas lentes de mesmo diâmetro e confeccionadas com o mesmo tipo de vidro, mas uma plano-convexa (convergente) e outra plano-côncava (divergente). Como proceder para verificar, sem auxílio de instrumentos de medição, se a convergência de uma é igual, em módulo, à divergência da outra?

**58.** Um raio de luz monocromática **R** incide paralelamente ao eixo principal de um sistema óptico composto de duas lentes convergentes, $L_1$ e $L_2$, produzindo um raio emergente **R′**, conforme ilustra a figura a seguir. A vergência da lente $L_2$ é igual a 4,0 di.

Determine:

a) a distância focal da lente $L_1$. b) a distância entre as lentes.

**59.** (Unisa-SP) Um objeto luminoso é colocado a 60 cm de uma lente convergente de 20 cm de distância focal. Uma segunda lente convergente, de 30 cm de distância focal, é colocada a 80 cm da primeira lente, tendo seus eixos principais coincidentes. A que distância da segunda lente se forma a imagem final fornecida pelo sistema?

## Leitura

### Teoria da Relatividade Geral

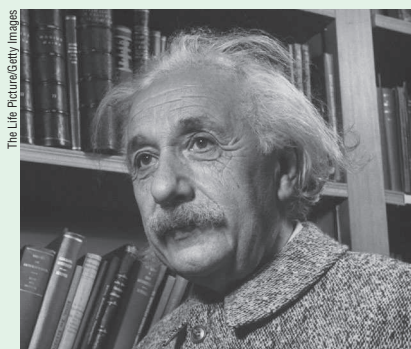
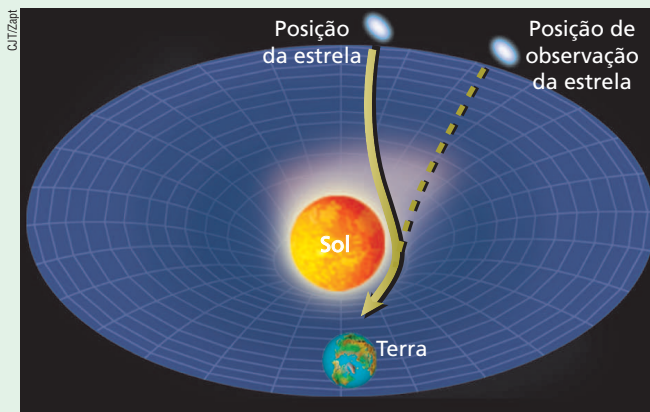
Em 1916, Einstein publicou sua Teoria da Relatividade Geral. Entre outros temas, ele tratou das deformações que uma grande massa provoca no chamado espaço-tempo. É como se uma superfície horizontal de borracha, presa pelas bordas, recebesse um corpo pesado em sua região central. Isso provocaria uma vala análoga à deformação no espaço-tempo proposta pelo cientista. Uma pequena esfera que passasse com baixa velocidade perto dessa vala seria “atraída” para a parte mais funda dela, como se a vala fosse uma espécie de sorvedouro. Esse foi o fundamento da explicação de Einstein para a gravitação dos planetas em torno do Sol ou a da Lua em torno da Terra.

As deformações no espaço-tempo também encurvam as trajetórias da luz, o que justifica as imagens produzidas pelas lentes gravitacionais descritas mais adiante neste texto.

Em 1919, Einstein recebeu notícias que comprovavam aspectos de sua teoria. Nessa ocasião, os astrônomos britânicos Andrew Crommelin e Charles Davidson, da equipe de Arthur Edington, estiveram no Brasil, em Sobral, Ceará, para observar um eclipse total do Sol. Eles verificaram no momento do fenômeno, com o céu obscurecido pela presença da Lua diante do disco solar, o aparecimento de estrelas do grupo das Híades, que deveriam estar escondidas atrás do Sol. O que foi visto, na verdade, foram imagens virtuais dessas estrelas produzidas pela lente-gravitacional-Sol, que deforma o espaço-tempo ao seu redor.

The Life Picture/Getty Images

Albert Einstein (1879-1955).

CJT/Zapt

Representação ilustrativa, com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia, da deformação no espaço-tempo provocada pela presença do Sol e o consequente desvio da luz proveniente de uma estrela.

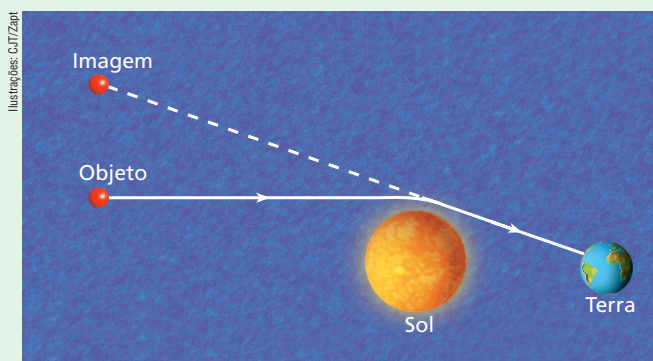
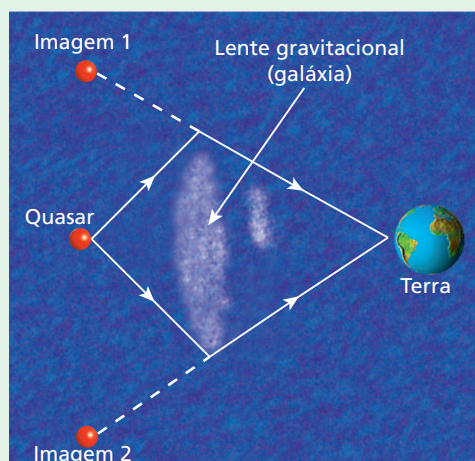
### Os quasares e as lentes gravitacionais

Em 1963, o astrônomo holandês Maarten Schmidt localizou uma “estrela” que foi chamada de **3C 273**. Quando analisou seu espectro, ficou intrigado. As conclusões não faziam sentido, destoando de tudo o que se conhecia até então.

Depois de algum tempo de dúvidas e inquietação, Schmidt concluiu, pela análise do *red shift* da 3C 273 — deslocamento das frequências visíveis para o vermelho devido ao efeito Doppler —, que aquele corpo celeste devia estar muito mais longe da Terra que a maioria das galáxias e que se afastava de nosso planeta com grande velocidade, o que ia ao encontro das teorias do universo em expansão. A 3C 273 foi chamada de **quasar** — *quasi-stellar astronomical radiosource*, que significa "fonte de rádio astronômica quase estelar".

Os quasares são corpos que, embora tenham tamanho equivalente ao do Sistema Solar, brilham mais que 1 trilhão de sóis. Sua distância à Terra excede 2 bilhões de anos-luz e sua detecção em nosso planeta é feita principalmente por meio das ondas de rádio e raios X que emitem.

Albert Einstein demonstrou que a presença de um corpo de grande massa pode desviar ondas eletromagnéticas, em especial a luz. Quando as radiações emanadas de um astro passam nas proximidades do Sol, por exemplo, elas se encurvam, como está ilustrado na figura abaixo, fazendo com que se obtenham imagens virtuais do astro em posições aparentes diferentes daquela em que ele realmente está.

Ilustrações: CJT/Zapt

A luz do astro sofre um desvio devido à presença do Sol. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.)

Ilustração, com tamanho e distâncias fora de escala e em cores-fantasia, representando duas imagens de um mesmo quasar conjugadas por uma lente gravitacional (galáxia).

A influência de grandes massas sobre ondas eletromagnéticas pode ser comprovada quando um quasar, "escondido" atrás de uma galáxia, tem suas radiações captadas por sistemas de detecção (radiotelescópios) localizados na Terra. Luz, ondas de rádio e raios X emitidos por ele são desviados intensamente pela deformação do espaço-tempo em torno da galáxia, proporcionando aos astrônomos imagens duplas ou múltiplas daquele corpo celeste.

É importante notar que essas imagens não provêm de dois ou mais quasares distintos; trata-se do mesmo astro, já que qualquer alteração verificada em uma delas também é constatada simultaneamente nas demais.

A galáxia funciona como uma **lente gravitacional** que, desviando a energia radiante como se fosse uma imensa lente óptica, permite a visualização de imagens dos astros de onde essa energia provém. Isso nos leva a acreditar que, realmente, as radiações desses corpos celestes não se propagam em linha reta, sendo desviadas pela presença de grandes concentrações de massa.

## Descubra mais

1. Existe um "defeito" inerente às lentes denominado **aberração cromática**. Em que consiste esse problema?
2. Em alguns faróis marítimos, holofotes e retroprojetores, são utilizadas as chamadas lentes de Fresnel. Esses sistemas ópticos, implementados pelo físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), exercem funções semelhantes às das lentes convencionais, porém possuem espessura e peso bem menores. Como funcionam as lentes de Fresnel?
3. Em certos momentos, astronautas abandonam porções de água no interior de espaçonaves em órbita ao redor da Terra, que passam a levitar, apresentando formato praticamente esférico. Olhando através dessas esferas líquidas, nota-se quase sempre a formação de imagens invertidas e menores de objetos situados do seu lado oposto. Como se explica a forma esférica dessas porções de água? As lentes assim constituídas têm comportamento convergente ou divergente?
4. Para observadores na Terra, as lentes gravitacionais modificam o formato real dos astros visualizados?

## Exercícios

nível 3

**60.** (Vunesp-SP) As figuras representam feixes paralelos de luz monocromática incidindo, pela esquerda, nas caixas **A** e **B**, que dispõem de aberturas adequadas para a entrada e a saída dos feixes:

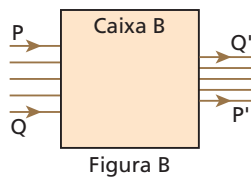
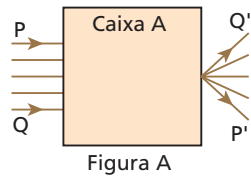



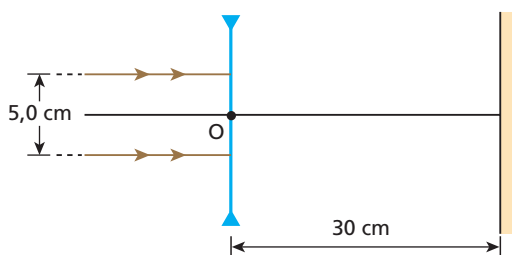
Figura A

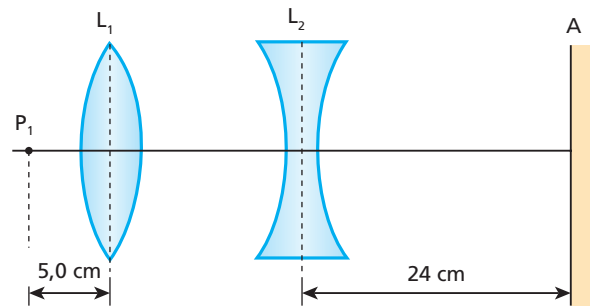
Figura B

Para produzir esses efeitos, dispunha-se de um conjunto de lentes convergentes e divergentes de diversas distâncias focais.

a) Copie a figura **A** e, em seguida, desenhe no interior da caixa uma lente que produza o efeito mostrado; complete a trajetória dos raios e indique a posição do foco da lente.

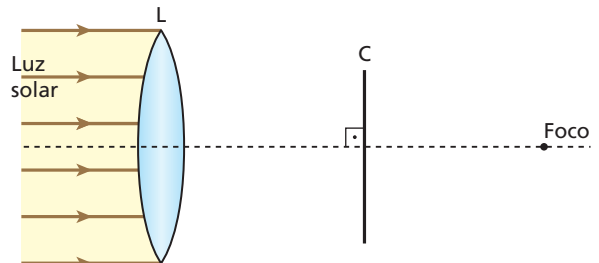
b) Copie a figura **B** e, em seguida, desenhe no interior da caixa um par de lentes que produza o efeito mostrado; complete a trajetória dos raios e indique as posições dos focos das lentes.

**61.** Monta-se um anteparo opaco perpendicularmente ao eixo principal de uma lente delgada divergente, a 30 cm do centro óptico da lente:

Um feixe cilíndrico de luz monocromática, com 5,0 cm de diâmetro, incide na lente de modo que seus raios luminosos fiquem paralelos ao eixo principal. Sabendo que depois da refração na lente o feixe ilumina, no anteparo, uma região circular de 20 cm de diâmetro, calcule o valor absoluto da distância focal da lente.

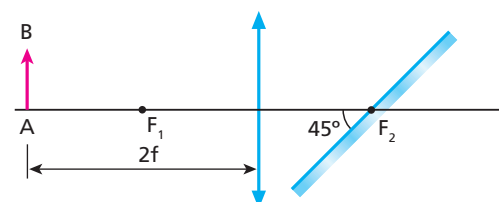
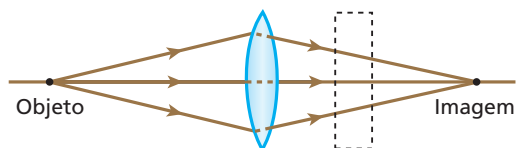
**62.** (ITA-SP – mod.) Considere um sistema composto de duas lentes circulares esféricas delgadas de 6,0 cm de diâmetro, dispostas coaxialmente, como indica a figura. $L_1$ é uma lente convergente de distância focal de módulo igual a 5,0 cm e $L_2$ é uma lente divergente de distância focal de módulo igual a 4,0 cm. No ponto $P_1$, à esquerda do sistema, é colocado um objeto luminoso puntiforme a 5,0 cm de $L_1$. À direita de $L_2$, a uma distância $d = 24$ cm, é colocado um anteparo **A**, perpendicular ao eixo do sistema.

Assim, temos que:

a) sobre o anteparo **A** forma-se uma imagem real puntiforme de $P_1$.
b) sobre o anteparo **A** aparece uma região iluminada circular com 12 cm de diâmetro.
c) sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular com 6,0 cm de diâmetro.
d) o anteparo fica iluminado uniformemente em uma região muito grande.
e) sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular com 42 cm de diâmetro.

**63.** (Fuvest-SP – mod.) Uma lente circular convergente **L**, de área 20 cm$^2$ e distância focal 12 cm, é colocada perpendicularmente aos raios solares, que neste local têm uma intensidade de radiação de 0,10 W/cm$^2$. Admita que 20% da radiação incidente na lente seja absorvida por ela.

Um coletor solar **C** é colocado entre a lente e seu foco, a 6 cm da lente, conforme representa o esquema a seguir.

Suponha que toda energia incidente no coletor seja absorvida por ele e usada para aquecer 1 cm$^3$ de água, inicialmente a 20 °C. Adotando para a água calor específico sensível igual a 1 cal/g °C e densidade absoluta igual a 1 g/cm$^3$, e considerando 1 cal = 4 J, responda:

a) Qual a temperatura da água ao fim de 2 min do aquecimento?
b) Qual a intensidade de radiação solar incidente no coletor?

**64.** (Unicamp-SP) O sistema óptico esboçado na figura consiste em uma lente convergente de distância focal **f** e em um espelho plano que contém o foco $F_2$ da lente. Um pequeno objeto AB encontra-se a uma distância 2f da lente, como indica a figura. Os raios luminosos provenientes de AB e refletidos pelo espelho não atingem a lente novamente. Refaça a figura e construa a imagem de AB produzida pelo sistema óptico.

**65.** (Vunesp-SP) Uma lâmina de vidro óptico de faces paralelas, cuja espessura é de aproximadamente 1 cm, será interposta perpendicularmente, entre uma lente convergente e a imagem real (que a lente produz) de um objeto iluminado com luz monocromática. Observe a figura:

Com a inserção da lâmina:
a) a posição da imagem não se altera.
b) a imagem se aproxima da lente.
c) a imagem se afasta da lente.
d) não se forma mais a imagem.
e) formam-se duas imagens reais separadas por uma distância menor que 1 cm.

**66.** (Cederj-RJ) Posiciona-se a placa, representada na figura a seguir, perpendicularmente ao eixo principal de uma lente delgada convergente.

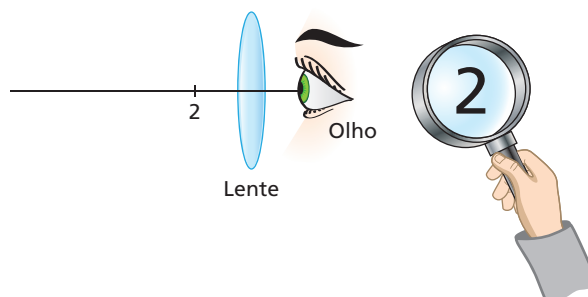
Ao se iluminar a placa, observa-se a formação de sua imagem projetada em um anteparo.
Sabendo que a distância entre a placa e a lente é maior que o dobro da distância focal da lente, assinale a opção que melhor representa a imagem formada no anteparo.

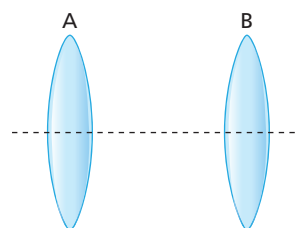
a) 

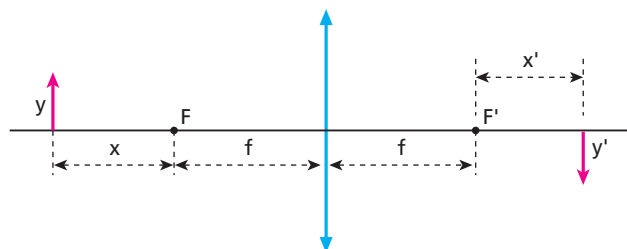
b) 

c) 

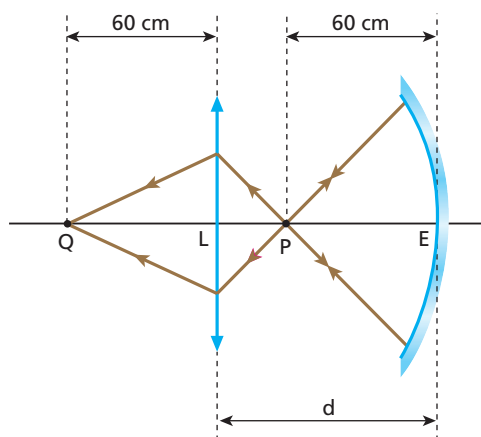

d) 


**67.** (Unifesp-SP) Uma lente convergente pode servir para formar uma imagem virtual, direita, maior e mais afastada do que o próprio objeto. Uma lente empregada dessa maneira é chamada lupa, e é utilizada para observar, com mais detalhes, pequenos objetos ou superfícies. Um perito criminal utiliza uma lupa de distância focal igual a 4,0 cm e fator de ampliação da imagem igual a 3,0 para analisar vestígios de adulteração de um dos números da série identificadora, de 0,7 cm de altura, tipados em um motor de um automóvel.

a) A que distância do número tipado no motor o perito deve posicionar a lente para proceder sua análise nas condições descritas?
b) Em relação à lente, onde se forma a imagem do número analisado? Qual o tamanho da imagem obtida?

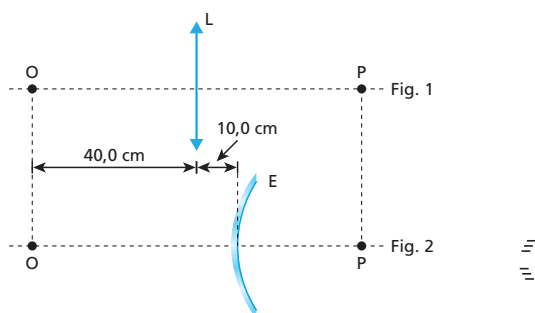
**68.** (UFV-MG) Duas lentes delgadas de vidro, **A** e **B**, de distâncias focais $f_A = 5$ cm e $f_B = 4$ cm, respectivamente, são colocadas lado a lado, imersas no ar, com eixos coincidentes, conforme a figura abaixo.

a) Qual a distância entre os centros das lentes para que um feixe de luz de raios paralelos, incidente na lente **A**, emerja da lente **B** como um feixe de luz de raios também paralelos? Reproduza a figura acima e desenhe o diagrama de raios ilustrando esta situação. Indique nessa figura os pontos correspondentes aos focos de cada uma das lentes.
b) Calcule a que distância do centro da lente **B** ficará a imagem do objeto produzida por esse conjunto de lentes, se fixarmos, arbitrariamente, a distância entre os centros das lentes em 10 cm e colocarmos um objeto luminoso a uma distância de 3 cm à esquerda do centro da lente **A**.

**69.** Um objeto real **y** é colocado a uma distância **x** do foco objeto principal de uma lente esférica convergente, perpendicularmente ao seu eixo principal. A imagem **y′** conjugada pela lente a esse objeto é real e situa-se a uma distância **x′** do foco imagem principal, conforme indica a figura.

Supondo-se válidas as condições de Gauss, pode-se afirmar que a distância focal da lente é dada por:

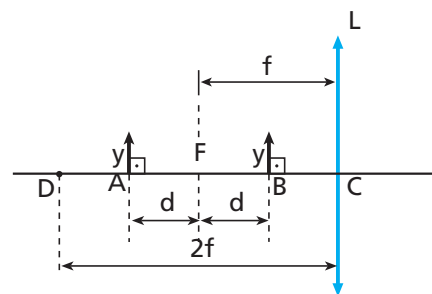
a) $x + x'$.
b) $x - x'$.
c) $x \cdot x'$.
d) $\sqrt{\frac{x}{x'}}$.
e) $\sqrt{x \cdot x'}$.

**70.** Um espelho esférico côncavo **E**, de distância focal $f_E$, e uma lente delgada convergente **L**, de distância focal $f_L = 12$ cm, estão dispostos coaxialmente, com seus eixos ópticos coincidentes, conforme representa a figura. Admita que o espelho e a lente estejam sendo utilizados dentro das condições de Gauss. A distância entre o vértice do espelho e o centro óptico da lente é igual a **d**. Uma fonte pontual de grande potência, capaz de emitir luz exclusivamente para a direita, é colocada no ponto **P**. Os raios luminosos provenientes da fonte seguem, então, as trajetórias indicadas, acendendo um palito de fósforo cuja extremidade se encontra no ponto **Q**.

Considerando as medidas do esquema, aponte a alternativa em que aparecem os valores corretos de $f_E$ e **d**:

a) $f_E = 60$ cm; $d = 120$ cm.
b) $f_E = 60$ cm; $d = 75$ cm.
c) $f_E = 30$ cm; $d = 120$ cm.
d) $f_E = 30$ cm; $d = 75$ cm.
e) $f_E = 60$ cm; $d = 72$ cm.

**71.** Nos esquemas abaixo, a lente convergente **L**, de distância focal $f_L = 20,0$ cm, e o espelho esférico convexo **E** operam de acordo com as condições de Gauss, com seus eixos principais coincidentes com a direção OP. Na Figura 1, **L** conjuga a uma pequena lâmpada colocada no ponto **O** uma imagem situada no ponto **P**. Na Figura 2, E conjuga à mesma lâmpada fixa em **O** uma imagem também situada no ponto **P**.

O raio de curvatura de **E** tem valor, em centímetros, igual a:

a) 37,5.
b) 75,0.
c) 112,5.
d) 150,0.
e) 187,5.

**72.** (Unip-SP) Considere a lente convergente **L** de distância focal **f**, representada na figura, em que **F** é o foco principal objeto e **A** e **B** são duas posições simétricas em relação a **F**. Admita, na formação de imagens, serem válidas as condições de aproximação de Gauss. Quando um objeto linear de tamanho **y** é colocado em **A**, a imagem formada pela lente tem tamanho **y′**.

Quando o mesmo objeto linear é colocado em **B**, a imagem formada passa a ter um tamanho **y”**, tal que:

a) $y'' = y'$.
b) $y'' = \frac{1}{4}y'$.
c) $y'' = \frac{1}{2}y'$.
d) $y'' = 2y'$.
e) $y'' = 4y'$.

**73.** (UFU-MG – mod.) Um estudante de Física olha através de uma lupa uma pulga que foi condicionada a andar apenas sobre o eixo principal da lente, conforme representa a figura **A**. Ele mediu a distância **p** entre o inseto e a lupa e a distância **p′** entre a lupa e a imagem real da pulga, em vários pontos. O resultado dessas medições está apresentado no gráfico da figura **B**.

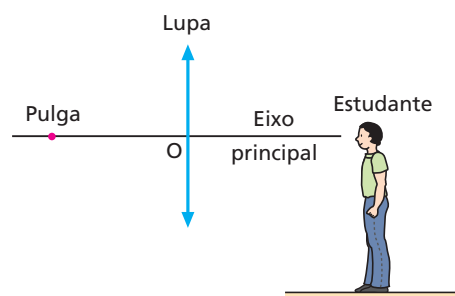



Figura A

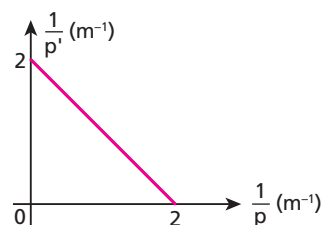
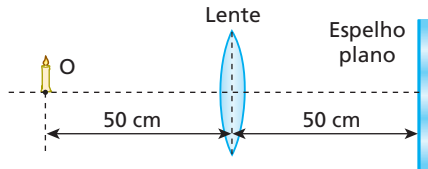



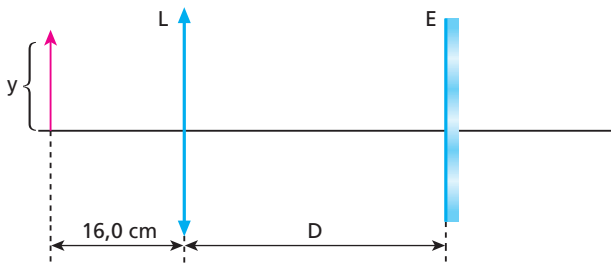
Figura B

a) Obtenha a distância focal da lente.
b) A pulga, ao passar exatamente pelo ponto médio entre o foco principal objeto e o centro óptico da lente, resolve dar um pequeno salto vertical. Desprezando a resistência do ar, adotando $g = 10$ m/s$^2$ e admitindo como válidas as condições de Gauss, determine a intensidade da aceleração da imagem da pulga em relação ao estudante durante o salto.

**74.** (UFSCar-SP) No quarto de um estudante, há uma lâmpada incandescente localizada no teto, sobre a sua mesa. Deslocando uma lente convergente ao longo da vertical que passa pelo filamento da lâmpada, do tampo da mesa para cima, o estudante observa que é possível obter a imagem nítida desse filamento, projetada sobre a mesa, em duas alturas distintas. Sabendo-se que a distância do filamento da lâmpada ao tampo da mesa é de 1,5 m, que a distância focal da lente é de 0,24 m e que o comprimento do filamento é de 12 mm, determine:

a) as alturas da lente em relação à mesa, nas quais essas duas imagens nítidas são obtidas.
b) os comprimentos e as características das imagens do filamento obtidas.

**75.** Utilizando um banco óptico, um estudante monta no laboratório o arranjo representado a seguir, em que a abscissa focal da lente vale +30 cm:

A que distância do espelho forma-se a imagem final de **O** conjugada pelo sistema?

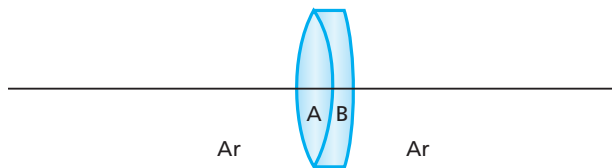
**76.** Na figura, está representado um objeto luminoso de altura **y** posicionado a 16,0 cm de uma lente convergente **L**, cuja distância focal é de 8,0 cm. A lente está a uma distância **D** de um espelho esférico gaussiano **E** de raio de curvatura 36,0 cm e eixo principal coincidente com o eixo óptico da lente.

Para que a imagem produzida pelo espelho tenha altura igual a 2y e orientação invertida em relação ao objeto, o tipo de espelho esférico utilizado e o valor de **D** são, respectivamente:

a) côncavo e D = 16,0 cm.
b) côncavo e D = 25,0 cm.
c) côncavo e D = 43,0 cm.
d) convexo e D = 16,0 cm.
e) convexo e D = 25,0 cm.

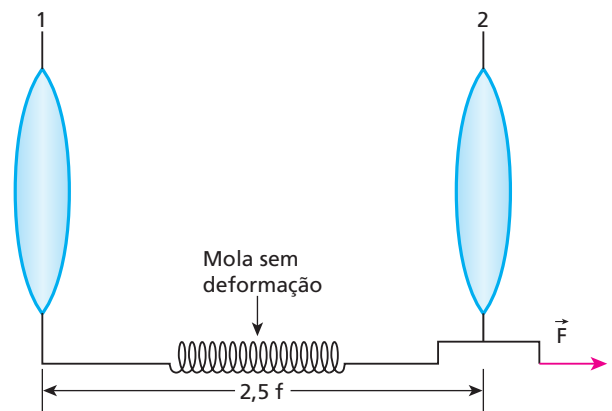
**77.** Duas lentes esféricas simétricas, de vidro e de pequena espessura — uma biconvexa ($L_1$) e outra bicôncava ($L_2$) — e um espelho esférico côncavo gaussiano (**E**) são testados no ar, onde se verifica que suas distâncias focais apresentam o mesmo valor absoluto: **f**. Esses sistemas ópticos são então mergulhados em água, onde se realiza um novo teste de verificação de distâncias focais. Nesse ensaio, obtêm-se para as distâncias focais de $L_1$, $L_2$ e **E** os valores absolutos $f_1$, $f_2$ e $f_E$, respectivamente. Se o vidro é mais refringente que a água e esta é mais refrigente que o ar, é correto concluir que:

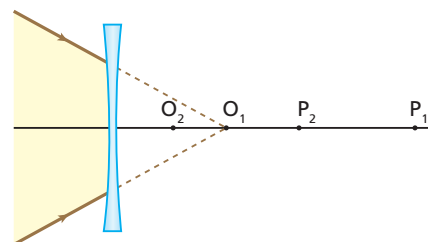
a) $f_1 > f$, $f_2 > f$ e $f_E = f$.
b) $f_1 > f$, $f_2 < f$ e $f_E = f$.
c) $f_1 = f$, $f_2 = f$ e $f_E = f$.
d) $f_1 < f$, $f_2 < f$ e $f_E < f$.
e) $f_1 > f$, $f_2 > f$ e $f_E > f$.

**78.** (ITA-SP) As duas faces de uma lente delgada biconvexa têm um raio de curvatura igual a 1,00 m. O índice de refração da lente para a luz vermelha é 1,60 e, para luz violeta, 1,64. Sabendo que a lente está imersa no ar, cujo índice de refração é 1,00, calcule a distância entre os focos de luz vermelha e de luz violeta, em centímetros.

**79.** Para compor a objetiva de certo instrumento óptico, usa-se a associação de lentes acrílicas (de espessura desprezível) representada na figura a seguir.

A lente **A** é biconvexa, e suas faces têm 25 cm de raio de curvatura. A lente **B** é convexo-côncava, e sua face côncava adere perfeitamente à lente **A**. Os índices de refração do acrílico e do ar são conhecidos, valendo, respectivamente, 1,5 e 1,0. Sabendo que a vergência equivalente à associação é de +3,0 di, determine:

a) a vergência da lente **A**.
b) a abscissa focal da lente **B**.
c) os raios de curvatura das faces da lente **B**.

**80.** (IME-RJ) Um sistema óptico é constituído por duas lentes convergentes, 1 e 2, cujas distâncias focais são **f** e 2f, respectivamente. A lente 1 é fixa; a lente 2 está presa à lente 1 por uma mola cuja constante elástica é **k**. Com a mola em repouso (sem deformação), a distância entre as lentes é 2,5f.

Determine o menor valor da força $\vec{F}$ para que o sistema produza uma imagem real de um objeto distante, situado à esquerda da lente 1. Despreze as forças de atrito.

**81.** (Olimpíada Brasileira de Física) Um feixe de raios convergentes aponta na direção do ponto $O_1$, localizado no eixo óptico de uma lente divergente, a uma distância de 15 cm da mesma. Após a refração, os raios convergem para o ponto $P_1$. Entretanto, se os raios, antes da refração, convergirem para um ponto $O_2$ que está a 10 cm da lente, os raios refratados convergem para um ponto $P_2$ que está a 40 cm de $P_1$.

Determine a distância da lente ao ponto $P_1$, bem como a distância focal da lente.

## Para raciocinar um pouco mais

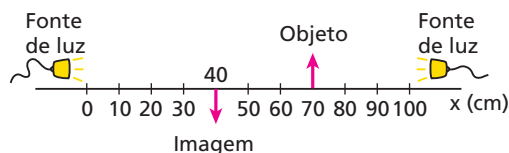
**82.** Uma lente delgada convergente de distância focal $f = 10$ cm é disposta com o eixo principal normal a um anteparo situado à distância $d = 30$ cm. Ao longo do eixo principal, desloca-se uma fonte puntiforme. Há duas posições da fonte para as quais a luz emergente da lente ilumina, no anteparo, um círculo do tamanho da lente. Para qualquer uma dessas posições, determine a distância da fonte à lente.

**83.** Um estudante dispõe de uma lupa (lente esférica convergente) de distância focal igual a 6,0 cm e com ela deseja obter imagens nítidas de uma pequena lâmpada situada sobre o eixo óptico, sempre distantes 25 cm em relação ao objeto. Determine as possíveis distâncias da lâmpada à lente para que o intento do estudante seja satisfeito.

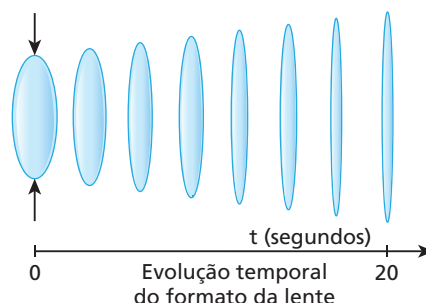
**84.** Um objeto luminoso é colocado a uma distância $d_0$ de uma lente convergente de distância focal $f_0$, sendo sua imagem projetada em um anteparo situado a uma distância **L** da lente. O objeto é então aproximado, ficando posicionado a uma distância $\frac{d_0}{2}$ da lente, o que faz com que a imagem se apresente desfocada no anteparo. Desejando-se focalizar a imagem, substitui-se a primeira lente por uma outra, também convergente, mas de distância focal $f_1$. Sabendo que a segunda lente é instalada na mesma posição da primeira, determine:

a) o valor de **L**.
b) o valor de $f_1$.

**85.** Entre um anteparo e uma vela, ambos na vertical, coloca-se uma lente convergente, com eixo principal horizontal. Verifica-se que há duas posições para a lente, separadas por 75 cm, nas quais se obtêm imagens nítidas da vela projetadas no anteparo. Verifica-se ainda que a altura da imagem projetada quando a lente está mais próxima da vela é 16 vezes a altura da imagem projetada quando a lente está mais afastada da vela.
Determine:
a) a distância **d** entre a vela e o anteparo.
b) a distância focal **f** da lente.

**86.** Considere um espelho esférico côncavo e uma lente esférica convergente que obedecem às condições de Gauss. As distâncias focais do espelho e da lente valem, respectivamente, 20 cm e 2,7 cm. Esses elementos serão instalados sucessivamente em um banco óptico, como o esquematizado a seguir, com a finalidade de conjugar a um objeto fixo na posição $x_0 = 70$ cm uma imagem real que deverá situar-se na posição $x_1 = 40$ cm.

Na figura, os comprimentos do objeto e da imagem não estão representados em escala. Há duas fontes de luz que poderão ser utilizadas uma de cada vez.
Determine:
a) as posições $x_{E_1}$ e $x_{E_2}$ ($x_{E_1} < x_{E_2}$) em que poderá ser colocado o espelho.
b) as posições $x_{L_1}$ e $x_{L_2}$ ($x_{L_1} < x_{L_2}$) em que poderá ser colocada a lente.

**87.** Um ponto luminoso **P** descreve movimento circular e uniforme num plano frontal distante 30 cm de uma lente delgada convergente, com velocidade escalar de módulo 5,0 cm/s. A circunferência descrita por **P** tem centro no eixo principal da lente e raio igual a 10 cm. Admitindo que a lente opera de acordo com as condições de Gauss e que sua distância focal vale 20 cm, determine:
a) a relação entre o período de **P** e de sua imagem **P′** conjugada pela lente.
b) as características da trajetória descrita por **P′**, bem como sua posição em relação à lente.
c) o módulo da velocidade escalar de **P′**.

**88.** (Olimpíada Brasileira de Física) Um objeto de 10 cm de altura é colocado a 50 cm de uma lente biconvexa simétrica que é construída com um material plástico transparente de índice de refração 1,5. Esse material é bastante elástico de modo que, pressionando-se as extremidades da lente em direção ao centro óptico, o raio de curvatura das faces convexas pode ser alterado mantendo-se, porém, a simetria. Suponha que no instante $t_0 = 0$ a força aplicada na lente é retirada, de modo que os raios de curvatura vão aumentando segundo a função $R = 40 + vt$, em que **R** é expresso em centímetros e **t**, em segundos. Observa-se que a partir de $t = 20$ s, o sentido da imagem é justamente o oposto daquele verificado quando $t < 20$ s.
Supondo-se que a lente está imersa no ar (índice de refração igual a 1,0), determine o valor de **v**.

**89.** Uma vela é colocada a 80 cm de uma lente esférica convergente, perpendicularmente a seu eixo principal. Aproximando-se em 20 cm a vela da lente, a nova imagem fica três vezes maior que a anterior, com a mesma orientação. Determine a vergência da lente.

**90.** (Olimpíada Brasileira de Física) Uma lente convergente de diâmetro 2 L é construída com diamante, cujo índice de refração varia com o comprimento de onda da luz incidente. Para a luz violeta, o índice de refração é 2,50, para a amarela, é 2,43, e para a vermelha, é 2,40. Suponha que um feixe de luz paralela, constituído por apenas essas três cores, incida sobre essa lente cobrindo-a completamente e que um anteparo seja colocado perpendicularmente ao eixo óptico da lente, no ponto focal determinado usando-se a luz amarela. Calcule a razão entre os raios das regiões iluminadas por luz vermelha e por luz violeta projetadas no anteparo.

Tópico 5

# Instrumentos ópticos e Óptica da visão

## Bloco 1

### 1. Introdução aos instrumentos ópticos

Os conceitos, as leis e os sistemas ópticos estudados até aqui constituem a base teórica para a implementação de **instrumentos ópticos**, que sempre desempenharam ao longo da história, desde suas primeiras concepções, papel preponderante na saga do conhecimento humano. Isso pode ser notado em diversos setores, como em Fotografia, em Biologia e em Astronomia.

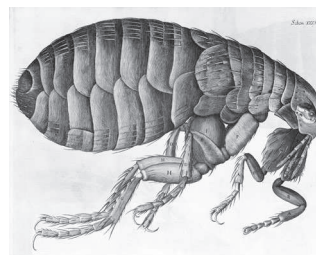
Hoje vivemos uma era em que a captação de imagens se transformou em algo corriqueiro, quase banal. Utilizando câmeras digitais, muitas vezes embutidas em telefones celulares e outros dispositivos eletrônicos, podemos obter fotografias em grande número, passíveis de visualização imediata e publicação instantânea em mídias como a internet. Na fabricação de câmeras de todo tipo são utilizadas, além de outros saberes, noções de Óptica.

Em 1667, o cientista inglês Robert **Hooke** publicou um livro intitulado *Micrographia*, em que apresentou os resultados de suas observações utilizando um incipiente microscópio capaz de ampliar apenas algumas dezenas de vezes as dimensões de certos objetos. Nessa obra, Hooke descreve a similaridade entre as minúsculas partículas de um pedaço de cortiça e as celas ocupadas por monges nos claustros de mosteiros. E para denominar essas estruturas do tecido vegetal ele lançou mão do termo **célula**, derivado da expressão latina *cella* (espaço vazio). Essa denominação foi utilizada mais tarde para designar a unidade construtiva da matéria viva. Em 1838, os cientistas alemães **Schleiden** e **Schwann** formularam uma teoria celular propondo que os seres vivos em geral — animais e vegetais — são constituídos de células. Em 1855, o patologista alemão Rudolf Ludwig Karl **Virchow** propôs que toda célula se origina de outra célula preexistente. Uma de suas citações, feita em latim, tornou-se célebre: "*Omnis cellula ex cellula*", que significa "Toda célula se origina de outra célula". Hoje sabemos, entre outras coisas, que as reações metabólicas próprias de nosso organismo ocorrem nas células.

A Citologia, importante ramo da Biologia, teve, a partir do século XIX, um rápido desenvolvimento. Esse avanço foi capitaneado pelo microscópio, um dos mais importantes instrumentos ópticos, que também passou por significativa evolução. Além de se prestar ao estudo da célula e de microrganismos, o microscópio é uma ferramenta essencial para o desenvolvimento de vacinas e medicamentos que permitem erradicar doenças, laborando, assim, em prol da saúde dos seres humanos.

Imagens: Science and Society Picture/Diomedia

A primeira fotografia mostra o precário microscópio utilizado por Hooke em suas pesquisas; a segunda traz um detalhe de desenho de uma pulga como foi observada pelo cientista em seu equipamento. Esta ilustração foi feita pelo próprio Hooke e está publicada em sua obra *Micrographia*.

Science and Society Picture Library/Diomedia

O físico e naturalista inglês Joseph Jackson **Lister** (1786-1859) realizou significativas melhorias no microscópio óptico, dotando o instrumento de aumentos ainda maiores.

A Astronomia que antecedeu ao século XVII, muito ligada à Astrologia e a concepções não científicas, utilizava astrolábios, quadrantes, sextantes e esferas armilares. Um instrumento revolucionário descoberto na Holanda serviu de ferramenta para que o italiano **Galileu** Galilei (1566-1642) elaborasse um novo mapa celeste e desse forte apoio à Teoria Heliocêntrica, do polonês Nicolau **Copérnico** (1473-1543). Galileu construiu versões mais sofisticadas da luneta original, que lhe permitiram observar detalhadamente as manchas solares, as crateras lunares, os anéis de Saturno e os satélites de Júpiter.

Gianni Tortoli/Photo Researchers/Diomedia

Lunetas projetadas e utilizadas por Galileu no século XVII.

Os telescópios atuais são uma evolução das primeiras lunetas, e esses dispositivos constituem janelas reveladoras através das quais contemplamos o Universo em busca de respostas a perguntas primordiais, como: De onde viemos? Para onde vamos?

Os instrumentos ópticos costumam ser classificados em dois grupos: **instrumentos de projeção** e **instrumentos de observação**.

**Grupo I: instrumentos de projeção**

Caracterizam-se por formar imagem final real, que é projetada em uma tela difusora (tela cinematográfica) ou em um anteparo fotossensível (filme fotográfico ou conversor eletrônico). Pertencem a esse grupo as câmeras fotográficas, as filmadoras e os projetores em geral.

**Grupo II: instrumentos de observação**

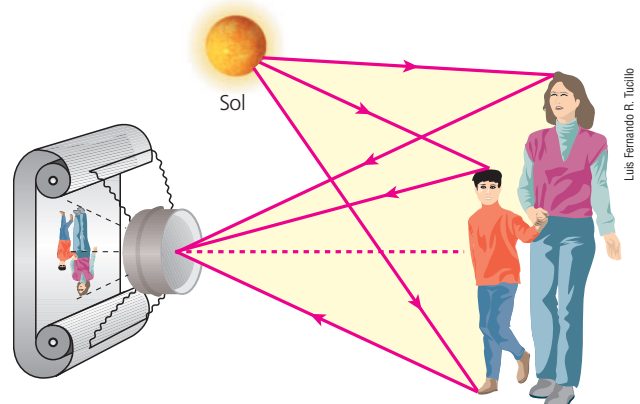
Distinguem-se por formar imagem final virtual, que serve de objeto real para um observador, cujo bulbo do olho se associa ao instrumento. Fazem parte desse grupo a lupa, o microscópio composto, as lunetas e os telescópios.

As próximas seções fazem uma breve apresentação dos principais instrumentos ópticos, sem, no entanto, entrar em pormenores funcionais ou técnicos.

## 2. Câmera fotográfica

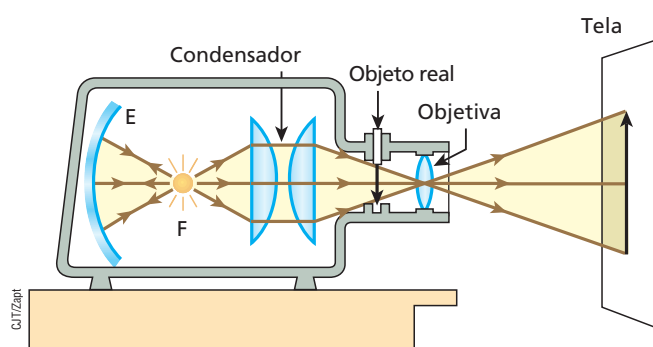
É um dispositivo destinado à fixação de imagens. Em linhas gerais, ocorre o seguinte: a objetiva da câmera (sistema **convergente** formado por uma ou mais lentes) projeta a imagem real e invertida do motivo da fotografia sobre um anteparo fotossensível em que, devido a fenômenos fotoquímicos ou fotoeletrônicos, ela fica gravada.

Convém destacar que o filme fotográfico (ou conversor eletrônico) é colocado no interior de uma câmara escura; a quantidade de luz que aí penetra é graduada por um mecanismo denominado **diafragma**. Outro importante componente das câmeras é o **obturador**, que regula o intervalo de tempo durante o qual o filme (ou conversor eletrônico) fica exposto à luz.

Luis Fernando R. Tucillo

Nas fotografias mais comuns, o objeto a ser fotografado é iluminado pela luz solar e esta é captada pela câmera por reflexão. A imagem projetada sobre o filme (ou conversor eletrônico) é invertida, e a inversão ocorre tanto na vertical como na horizontal. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.)

## 3. Projetor

Trata-se de um dispositivo que fornece, de um objeto real (arquivo eletrônico, diapositivo ou filme), uma imagem real projetada em uma tela. A imagem final é invertida (na vertical e na horizontal) e ampliada e pode comportar-se como objeto real para vários espectadores ao mesmo tempo. É importante salientar que, para uma melhor visualização da imagem projetada, o equipamento deve operar no interior de um ambiente escurecido.

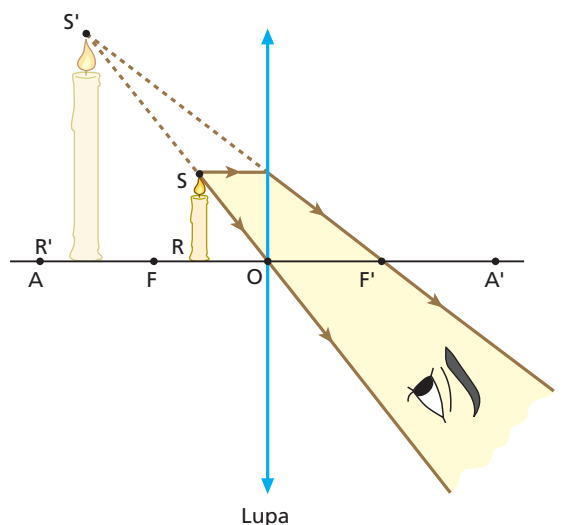
O esquema abaixo representa, em corte, um projetor simplificado.

Observe que a "objetiva" do projetor é um sistema **convergente** de lentes. O espelho côncavo **E**, em cujo centro de curvatura se posiciona a fonte de luz **F**, tem por função minimizar as perdas de energia luminosa.

## 4. Lupa ou microscópio simples

Esse dispositivo nada mais é do que um sistema **convergente**, de distância focal da ordem de centímetros.

Precursora dos instrumentos ópticos de grande ampliação, a lupa é utilizada como lente de aumento em diversas atividades, como a confecção de joias, o conserto de relógios, a filatelia, o estudo de insetos, a criminalística, entre outras.

Como veremos adiante, a lupa também pode ser a lente ocular de equipamentos mais sofisticados.

De um objeto real situado entre o foco principal objeto e o centro óptico, a lupa fornece uma imagem virtual, direita e ampliada. Convém destacar que, para o olho do observador, a imagem fornecida pela lupa comporta-se como objeto real. Veja, na figura, o traçado da imagem do objeto RS:

Os aumentos fornecidos pelas lupas raramente excedem a 10 vezes. Lupas que proporcionam aumentos da ordem de uma dezena de vezes têm distância focal pequena, o que torna seu diâmetro também pequeno, comprometendo o brilho da imagem e sua boa visualização.

### Câmeras digitais: imagens armazenadas em *chips*

Uma tecnologia totalmente consagrada é a das **câmeras digitais**. Nesses dispositivos, as imagens são captadas opticamente, porém, em vez de serem gravadas em filmes fotográficos ou em fitas magnéticas, são digitalizadas e armazenadas em cartões de memória ou *chips* eletrônicos. Com isso, é possível obter imagens com alta definição, que podem ser visualizadas imediatamente no próprio equipamento ou na tela de um computador. A ágil e perfeita transmissão dessas imagens pela internet facilita a comunicação entre pessoas e também as atividades profissionais, como a medicina e o jornalismo.

AGE FOTOSTOCK/Grupo Keystone

Usando uma lupa, podemos ter uma visão ampliada e pormenorizada dos objetos.

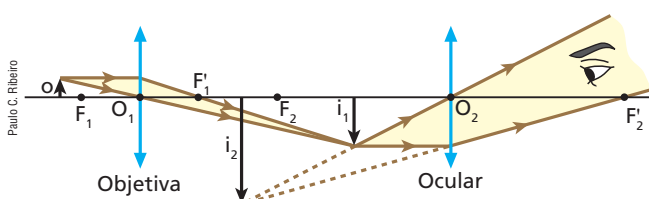
## 5. Microscópio composto

É um instrumento de aumento constituído basicamente de dois sistemas **convergentes** de lentes associados coaxialmente: o primeiro é a **objetiva** (distância focal da ordem de milímetros), que responde pela captação da primeira imagem do objeto; o segundo é a **ocular**, que, operando como lupa, forma a imagem final, a qual se comporta como objeto para o olho do observador.

O objeto a ser analisado posiciona-se um pouco além do foco objeto da objetiva, que conjuga a ele uma imagem real, invertida e ampliada. Essa imagem, formada entre o foco objeto e o centro óptico da ocular, comporta-se como objeto para a ocular, que conjuga a ele uma imagem final virtual, direita e ampliada.

Veja, na figura a seguir, um esquema da formação da imagem em um microscópio composto.

Observe que, tomando por base o objeto inicial, a imagem final é invertida.

Paulo C. Ribeiro

Em relação à objetiva, o aumento linear transversal é dado por:

$$A_{ob} = \frac{i_1}{o}$$

Em relação à ocular, o aumento linear transversal é calculado por:

$$A_{oc} = \frac{i_2}{i_1}$$

Para o microscópio composto, temos:

$$A = \frac{i_2}{o}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da última expressão por $\mathbf{i_1}$, temos:

$$A = \frac{i_2}{o} \cdot \frac{i_1}{i_1} \Rightarrow A = \frac{i_1}{o} \cdot \frac{i_2}{i_1}$$

Portanto:

$$A = A_{ob} \cdot A_{oc}$$

A ampliação total fornecida por um microscópio composto é dada pelo produto dos aumentos da objetiva e da ocular.

É importante notar que nos microscópios compostos o aumento linear transversal nunca excede a algumas centenas de vezes, ficando em média na faixa de 300 vezes. Em condições excepcionais, conseguem-se ampliações até pouco acima de mil vezes. Nesses casos, porém, intervém de forma decisiva a difração da luz dentro do instrumento, o que inibe qualquer tentativa de obtenção de ampliações ainda maiores.

Os microscópios ópticos ou compostos são largamente utilizados em laboratórios de biologia e de análises clínicas. Essa grande aceitação deve-se ao fato de esses instrumentos serem compatíveis com pequenos objetos, células, tecidos e microrganismos normalmente examinados.

Getty Images

Fotografia de um microscópio composto equipado com objetivas cambiáveis e duas oculares.

Em alguns casos, entretanto, como no estudo da estrutura de materiais, há a necessidade de aumentos de dezenas de milhares de vezes. Recorre-se, então, ao microscópio eletrônico, que opera com feixes de elétrons no lugar de feixes de luz. Nesses equipamentos, as partículas são defletidas por campos elétricos e magnéticos, proporcionando aumentos da ordem de 100 mil vezes. O que o pesquisador observa não é uma imagem óptica, disponível em uma ocular, mas uma figura gravada em filme fotográfico ou exibida no monitor de um computador.

## Microscópio eletrônico: aumentos de 100 mil vezes?

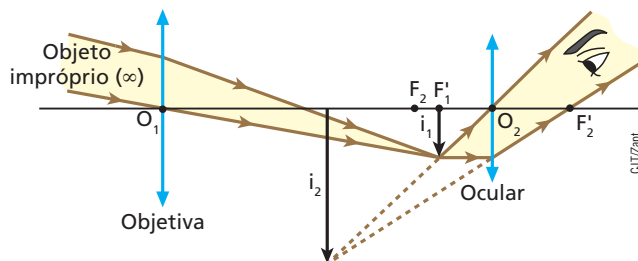
Sebastiano Volponi/Marka/Diomedea

Com o microscópio eletrônico, é possível adentrar em microuniversos inacessíveis aos nossos sentidos. Aumentos da ordem de 100 mil vezes desvendam os pormenores mais intrínsecos dos materiais, como as trajetórias (rastos) deixadas por partículas elementares submetidas à ação de campos elétricos e/ou magnéticos, podendo-se chegar praticamente a escalas atômicas. Esse equipamento tem sido de grande valia no desenvolvimento da nanotecnologia, ramo da Ciência que objetiva manipular punhados de átomos na elaboração de mecanismos minúsculos, que tornarão os utensílios eletrônicos ainda menores e muito mais sofisticados.

## 6. Lunetas

São instrumentos formados basicamente por dois sistemas **convergentes** de lentes, associados coaxialmente: o primeiro é a **objetiva** (distância focal da ordem de decímetros ou metros), que capta a primeira imagem do objeto; o segundo é a **ocular**, que, operando como lupa, conjuga a imagem final, a qual se comporta como objeto para o olho do observador.

Há duas categorias de lunetas: as **astronômicas**, utilizadas na observação de objetos longínquos, como os corpos celestes, e as **terrestres**, empregadas para visar objetos não muito afastados. As lunetas terrestres são muito úteis, por exemplo, na navegação.

No caso da luneta astronômica, a luz emanada de um corpo muito afastado (teoricamente, no "infinito") incide na objetiva, que forma uma imagem real e invertida. Em razão da grande distância entre o objeto e a objetiva, a imagem conjugada por essa lente forma-se em seu plano focal imagem. Tal imagem, posicionada entre o foco objeto e o centro óptico da ocular, comporta-se como objeto para a ocular, que faz corresponder a ele uma imagem final virtual, direita e aumentada. Essa imagem final, porém, é invertida em relação ao objeto inicial. O esquema a seguir ilustra o exposto.

As lunetas não fornecem aumentos lineares dos corpos observados; apenas possibilitam a visualização desses corpos sob ângulos visuais ampliados, o que dá aos usuários melhores condições de observação. Por isso elas são denominadas **instrumentos de aproximação**.

Seja $\theta_0$ o ângulo visual segundo o qual um corpo distante é observado a olho nu e $\theta$ o ângulo visual segundo o qual esse mesmo corpo é observado da mesma posição por meio de uma luneta.

Por definição, o **aumento visual** ou **aumento angular** para essa luneta é a grandeza adimensional **G**, dada por:

$$G = \frac{\text{tg}\,\theta}{\text{tg}\,\theta_0}$$

Sendo $f_{ob}$ a distância focal da objetiva e $f_{oc}$ a distância focal da ocular, pode-se demonstrar que o aumento angular de uma luneta focalizada para obter a imagem de um objeto impróprio ("situado no infinito") fica determinado por:

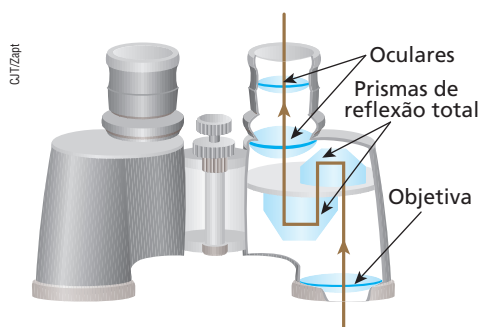
$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

Teoricamente, as lunetas astronômicas podem ser utilizadas como lunetas terrestres, mas, na prática, há alguns inconvenientes. Elas geralmente possuem dimensões avantajadas e, por causa da alta qualidade de seus componentes, têm custo elevado. Além disso, conforme vimos aqui, as imagens finais são invertidas em relação aos objetos iniciais, o que, tratando-se de seu emprego como luneta terrestre, seria um transtorno.

Nick Dolding/Digital Vision/Getty Images

Luneta sobre tripé com o observador próximo à ocular.

Por isso tudo, a construção das lunetas terrestres, embora seja parecida com a das lunetas astronômicas, conta com muitas simplificações. As lunetas terrestres são menores, custam menos e dispõem de um sistema endireitador da imagem final, formado por uma ou mais lentes, que é denominado **veículo**. A correção da imagem final também pode ser feita por meio de prismas de reflexão total, como ocorre nos binóculos, que nada mais são que duas pequenas lunetas terrestres associadas.

CJT/Zapt

Esquema da trajetória da luz no interior de um binóculo.

## Para ver mais de perto

Fogstock/Diomedia

Os binóculos são instrumentos de aproximação constituídos pela junção de duas lunetas terrestres. Há quem os utilize em *shows*, eventos esportivos e até em peças de teatro. Também são empregados por policiais rodoviários em suas observações do trânsito nas estradas.

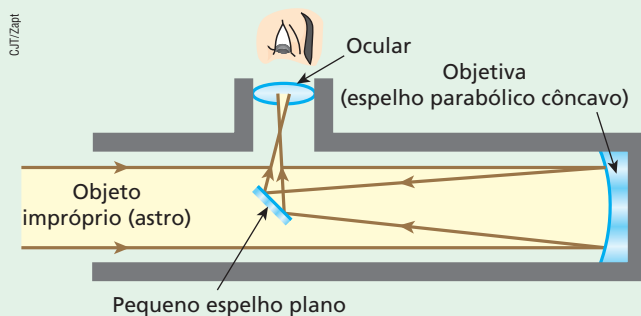
Nos grandes observatórios de Astronomia, para eliminar os inconvenientes das aberrações de esfericidade e cromáticas, próprias das lentes, são utilizados, na função de objetiva, espelhos parabólicos côncavos. Assim, os instrumentos de observação que geram a primeira imagem do astro por reflexão, e não por refração da luz, deixam de ser chamados de lunetas e assumem a denominação de **telescópios**.

## Leitura

### ... e Newton foi além!

O precursor dos telescópios modernos foi construído pelo inglês Isaac **Newton** (1642-1727) no século XVII. Ele aprimorou a luneta de Galileu, utilizando como objetiva um espelho parabólico côncavo em substituição à tradicional lente convergente.

CJT/Zapt

The Bridgeman Art Library/Grupo Keystone

Telescópio newtoniano de reflexão.

## Saindo da atmosfera — do Hale ao Hubble

Muito se sabe hoje sobre a Lua, sobre os planetas, a nossa galáxia, outras galáxias, o Universo, enfim. Seria possível dissociar esse conhecimento dos instrumentos ópticos de observação astronômica?

O advento dos telescópios descortinou aos olhos do ser humano um panorama quase sem limites, muito mais amplo que o disponível a olho nu.

Há muitos telescópios ópticos instalados em várias partes do mundo, como o *Large Binocular Telescope* (LBT), no Arizona, o Grande Telescópio das Canárias (GTC), nas Ilhas Canárias, o Keck 1 e o Keck 2, no Havaí, os *Very Large Telescopes* (VLT), no Chile, dentre outros, em geral em locais de clima seco, com discreta presença de nuvens, que dificultam a observação. Há outros, ainda maiores, em construção. Pelo porte e por razões históricas, porém, um dos mais importantes é o do Monte Palomar, na Califórnia. Idealizado pelo astrônomo norte-americano George Ellery Hale (1868-1938), esse gigante, que leva o nome **Hale**, foi inaugurado em 3 de junho de 1948 e está instalado no interior de uma cúpula de 40 m de altura, a 1 830 m de altitude. Os ajustes de posição, tanto da cúpula como do telescópio, são feitos por sofisticados mecanismos acionados por cinco motores. Sua objetiva é um enorme espelho parabólico côncavo de vidro revestido por uma película de alumínio polido, com 5 m de diâmetro e massa em torno de 20 toneladas.

Roger Ressmeyer/CORBIS/Latinstock

Fotografia do interior da cúpula giratória em que está instalado o telescópio Hale, em Monte Palomar.

O Hale trouxe à Astronomia um grande número de dados que deram sustentação a várias teorias, como a dos buracos negros e a do Universo em expansão.

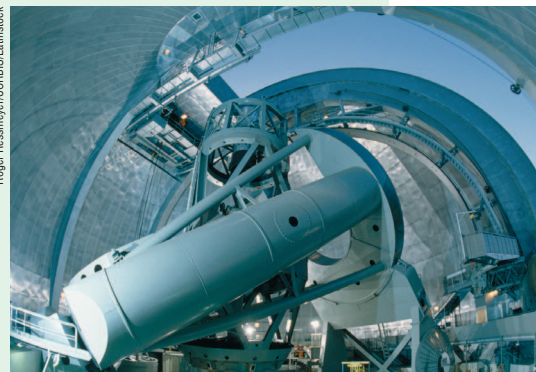
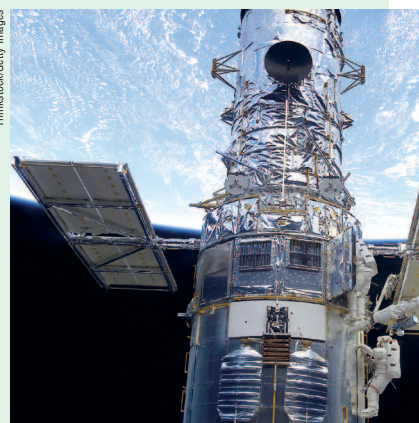
Os telescópios terrestres, entretanto, contam com um grande inconveniente: a barreira constituída pela atmosfera, que bloqueia diversas radiações provenientes do cosmo, impedindo-as de chegar aos observatórios. Devemos lembrar também que a presença da atmosfera faz com que os astros sejam observados em posições diferentes de sua posição real. Além disso, a cintilação provocada pela movimentação das camadas de ar dificulta a visualização, sobretudo das estrelas mais distantes.

No dia 26 de abril de 1990, foi posto em órbita pela nave **Discovery** o mais caro e sofisticado supertelescópio de todos os tempos: o **Hubble**, que tem esse nome em homenagem ao astrônomo norte-americano Edwin Powell Hubble (1889-1953).

O equipamento levou vinte anos para ser montado. Foi projetado para permanecer pelo menos dez anos no espaço, operando com uma eficiência superior à de qualquer telescópio terrestre, especialmente por estar livre das distorções e interferências impostas pela atmosfera.

O telescópio espacial Hubble, com uma massa próxima de 11 toneladas, tem 13,3 m de comprimento. Seu corpo principal apresenta 4,26 m de diâmetro. Quando os painéis solares estão armados, o conjunto atinge uma largura de 12 m. O sistema óptico compreende um espelho côncavo primário de 2,4 m de diâmetro e um espelho convexo secundário de 30 cm de diâmetro. Os raios luminosos provenientes dos corpos celestes, uma vez refletidos na superfície do espelho primário, são dirigidos ao espelho secundário, que, por sua vez, os envia a sistemas eletrônicos que convertem a luz captada em informações digitais.

O Hubble tem uma capacidade fantástica de distinguir detalhes. Ele pode detectar um botão de camisa a 1 200 km de distância ou mostrar se deu cara ou coroa em uma moeda lançada a 10 000 km.

Os sinais transmitidos por esse aparelho, recebidos dos pontos mais remotos do espaço, já deram aos cientistas mais informações que todos os telescópios terrestres juntos. Hoje se tem uma ideia mais clara da idade do Universo. Isso é muito importante, pois, em Astronomia, ver corpos mais distantes significa receber informações de épocas mais remotas. Ao observar um astro a 10 bilhões de anos-luz, por exemplo, o telescópio vê como ele era há 10 bilhões de anos, pois esse foi o tempo gasto pela luz, a partir desse corpo, para atingir o instrumento.

Thinkstock/Getty Images

As pessoas que têm uma boa visão podem enxergar sem o auxílio de instrumentos ópticos apenas 5 mil estrelas, aproximadamente. Com o telescópio espacial Hubble (fotografia), esse número é indeterminado, o que permitiu a elaboração de um novo e muito mais amplo mapa celeste.

Assim, as imagens do Hubble estão mostrando o Universo em sua juventude, muito antes de a própria Terra existir.

O Hubble, que já passou por três grandes sessões de manutenção em pleno espaço, deverá deixar de operar em um futuro próximo, já que muitos de seus equipamentos ficarão obsoletos ou extinguirão sua vida útil. O novo supertelescópio substituto, de nome **Webb**, em homenagem a James Webb, coordenador da NASA (Agência Espacial Norte-americana) por ocasião do projeto Apollo, que levou o homem à Lua, está em fase final de construção e poderá ser colocado em operação por volta de 2018. Trata-se de um equipamento muito mais sofisticado que o Hubble, dotado de um espelho primário de 6,5 m de diâmetro, constituído por células refletivas de berílio com formato hexagonal. O Webb tem um custo estimado em US$ 8,8 bi e sua órbita estará além da órbita lunar. Por meio desse telescópio, será possível obter imagens de alta definição das primeiras galáxias, que contarão mais detalhadamente a origem e evolução do Universo.

European Space Agency/Sipa/Newscom/Glow Images

Concepção artística do telescópio espacial Webb. O projeto é de responsabilidade da NASA em parceria com as agências espaciais canadense e europeia. O equipamento será altamente sensível às radiações na faixa do infravermelho, que revelarão detalhes dos primórdios do Universo, em eras próximas ao *Big Bang*.

## Efeito Doppler luminoso

O fenômeno sonoro descrito no Tópico 3 de Ondulatória, Acústica, que consiste em um som apresentar uma frequência aparente diferente de sua frequência real em virtude de haver movimento relativo entre a fonte de ondas e o observador é o **efeito Doppler**. Esse efeito também pode ser notado na luz, sendo descrito nesse caso por equações diferentes daquelas apresentadas para o som. Na situação da luz, devido às grandes velocidades envolvidas, fazem-se necessárias considerações relativísticas. Uma informação luminosa pode ser observada mais avermelhada (luz “grave” ou de menor frequência) ou mais azulada (luz “aguda” ou de maior frequência) em função de estar ocorrendo, respectivamente, afastamento da fonte de ondas em relação ao observador ou aproximação da fonte de ondas em relação ao observador.

O dedicado e talentoso astrônomo norte-americano Edwin Powell **Hubble** (1889 – 1953) se notabilizou por descobrir que as nebulosas, – galáxias situadas fora da Via Láctea –, afastam-se umas das outras com velocidades diretamente proporcionais às distâncias que as separam. Essa constatação deu forte amparo à teoria do *Big Bang*, segundo a qual o Universo teria surgido a partir de uma grande explosão, encontrando-se desde essa singularidade em franca expansão. As nebulosas foram observadas por Hubble avermelhadas ao invés de brancas, como se deveria esperar. Esse deslocamento detectado no espectro luminoso emitido por elas no sentido dos tons avermelhados foi chamado de *red shift* (desvio para o vermelho). Hubble explicou suas observações com base no efeito Doppler luminoso, segundo o qual, em processo de afastamento do nosso planeta, a luz proveniente de fontes estelares deve ser notada mais “grave” (com menor frequência), de maneira semelhante ao que ocorre com o som da sirene de uma ambulância que se afasta de um observador em repouso.

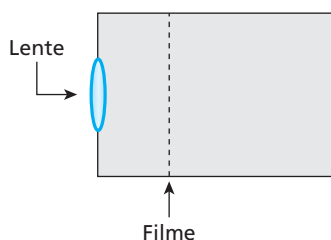
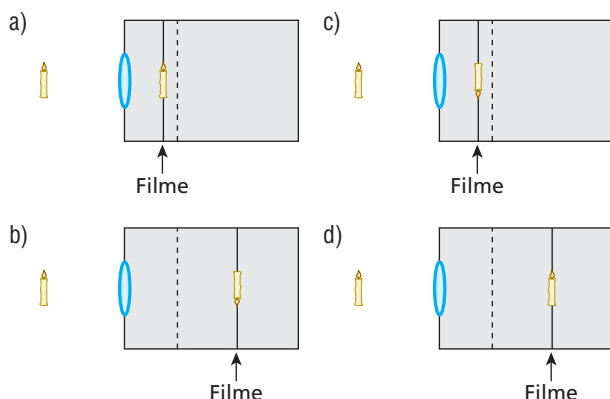
Universal Images Group/Universal History Archive/Diomedia

Na fotografia, vemos Edwin Hubble no observatório de Monte Palomar. A explicação de Hubble para o *red shift*, que sugere que o tom avermelhado observado nas nebulosas se deve ao fato de elas estarem se afastando da Terra, é um dos pilares que sustentam a teoria do *Big Bang*. Segundo esta visão, o Universo teria se iniciado há cerca de 13,7 bilhões de anos a partir de uma grande explosão. Naquele instante primordial (singularidade), toda a matéria e energia do Universo estariam compactadas num único ambiente de dimensões quase atômicas. Desde então, a matéria e a energia ali contidas afastam-se desse “epicentro” com velocidades que se intensificam na razão direta da distância (lei de Hubble).

## Exercícios

nível 1

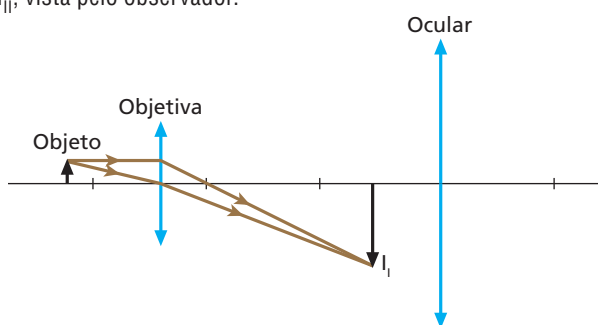
**1.** (Unifei-MG) Um estudante construiu uma caixa retangular provida de uma lente biconvexa de distância focal f = 50,0 mm e pretende usá-la como máquina fotográfica. A distância entre a lente e a parte posterior da caixa onde será registrada a imagem pelo filme é de 150 mm. A que distância à frente da lente deve se localizar um objeto para que sua foto fique perfeitamente focalizada?

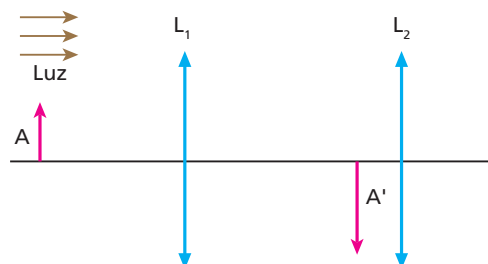
**2.** (UFMG) Rafael, fotógrafo lambe-lambe, possui uma câmara fotográfica que consiste em uma caixa com um orifício, onde é colocada uma lente. Dentro da caixa, há um filme fotográfico, posicionado a uma distância ajustável em relação à lente. Essa câmara está representada, esquematicamente, nesta figura:

Para produzir a imagem nítida de um objeto muito distante, o filme deve ser colocado na posição indicada pela linha tracejada.
No entanto, Rafael deseja fotografar uma vela que está próxima a essa câmara.
Para obter uma imagem nítida, ele, então, move o filme em relação à posição acima descrita.
Indique a alternativa cujo diagrama melhor representa a posição do filme e a imagem da vela que é projetada nele.

**3.** A lente de um antigo projetor de *slides* está a uma distância de 4,1 m da tela de projeção. Um *slide* de 35 mm de altura tem sua imagem projetada na tela com 1,4 m de altura. Qual a distância focal da lente do equipamento?

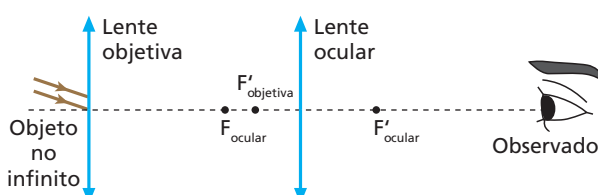
**4.** Deve-se projetar em uma tela a imagem de um *slide* que se encontra a 5,0 cm da lente do projetor. Sabendo que as alturas do *slide* e de sua imagem valem, respectivamente, 3,0 cm e 180 cm, calcule:
a) a distância da tela à lente do projetor.
b) a distância focal da lente do projetor.

**5.** Uma lente convergente operando como lupa, com 5,0 cm de distância focal, amplia cinco vezes o tamanho de um pequeno objeto luminoso. Nessas condições, determine a distância entre o objeto e sua imagem.

**6.** (Fatec-SP) Um colecionador examina um selo com uma lupa localizada a 2,0 cm do selo e observa uma imagem 5 vezes maior.
a) Determine a distância focal da lupa.
b) Faça, em seu caderno, um esquema gráfico dos raios de luz representando a lupa, o selo, a imagem do selo e o olho do colecionador.

**7.** (Unesp-SP) Em uma aula sobre óptica, o professor explica aos seus alunos o funcionamento básico de um microscópio óptico composto, que pode ser representado por duas lentes convergentes, a objetiva e a ocular. Quando o objeto a ser visualizado é colocado próximo à objetiva, uma imagem ampliada $I_I$ é formada entre a ocular e o foco da ocular, como esquematizado na figura. Essa imagem é, então, ampliada pela ocular, gerando a imagem $I_{II}$, vista pelo observador.

Sendo assim:
a) copie a figura em seu caderno e complete-a com raios de luz que mostrem a formação da imagem $I_{II}$ gerada pela ocular.
b) classifique como real ou virtual as imagens $I_I$ e $I_{II}$.

**8.** Um objeto **A** está situado a 5 cm de uma lente convergente $L_1$, cuja distância focal é de 4 cm. Uma segunda lente convergente, idêntica à anterior, é colocada a 2 cm de distância da imagem A′ conjugada por $L_1$. A figura ilustra a situação descrita:

a) A que distância de $L_1$ encontra-se $L_2$?
b) Qual a ampliação total do sistema $L_1L_2$?

**9.** (UFF-RJ – mod.) A utilização da luneta astronômica de Galileu auxiliou a construção de uma nova visão do Universo. Esse instrumento óptico, composto por duas lentes – **objetiva** e **ocular** –, está representado no esquema a seguir.

Considere a observação de um astro no “infinito” por meio da luneta astronômica de Galileu. Nesse caso, as imagens do objeto formadas pelas lentes objetiva e ocular são, respectivamente:

a) real e direita em relação ao astro; virtual e direita em relação à imagem da objetiva.
b) real e invertida em relação ao astro; virtual e invertida em relação à imagem da objetiva.
c) virtual e invertida em relação ao astro; real e invertida em relação à imagem da objetiva.
d) virtual e direita em relação ao astro; real e invertida em relação à imagem da objetiva.
e) real e invertida em relação ao astro; virtual e direita em relação à imagem da objetiva.

## Exercícios nível 2

**10. E.R.** A objetiva de uma câmera fotográfica tem distância focal de 100 mm e é montada num mecanismo tipo fole, que permite seu avanço e retrocesso. A câmera é utilizada para tirar duas fotos: uma aérea e outra de um objeto distante 30 cm da objetiva.

a) Qual o deslocamento da objetiva, de uma foto para a outra?
b) Da foto aérea para a outra, a objetiva afasta-se ou aproxima-se do filme?

**Resolução:**

a) Na obtenção da foto aérea, o motivo da foto comporta-se como objeto impróprio. Por isso, sua imagem forma-se no plano focal da objetiva. Assim:

$$p'_1 \cong f$$

Logo:

$$\boxed{p'_1 = 100 \text{ mm}}$$

Para a outra foto, tem-se:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{1}{300} + \frac{1}{p'}$$

$$\boxed{p'_2 = 150 \text{ mm}}$$

Seja **d** o deslocamento pedido. Então, é correto que:

$$d = p'_2 - p'_1 \Rightarrow d = 150 \text{ mm} - 100 \text{ mm}$$

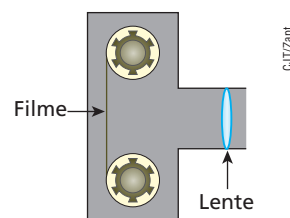
$$\boxed{d = 50 \text{ mm}}$$

b) Como $p'_2 > p'_1$, pode-se concluir que da foto aérea para a outra a objetiva afasta-se do filme.

**11.** Um fotógrafo amador criou um dispositivo capaz de projetar imagens no fundo de uma câmara. Tal dispositivo, esquematizado a seguir, é composto por uma lente esférica convergente (**L**), de distância focal 12 cm, um tubo móvel (**T**) e uma câmara escura (**C**).

Ao se formar uma imagem nítida no fundo da câmara, o objeto luminoso (**O**) encontra-se a 60 cm da lente.

a) Calcule quanto foi necessário deslocar o tubo, em relação à posição inicial indicada na figura acima, para focalizar a imagem nítida no fundo da câmara.
b) Dê as características dessa imagem.

**12.** (Unesp-SP) Uma câmara fotográfica rudimentar utiliza uma lente convergente de distância focal $f = 50$ mm para focalizar e projetar a imagem de um objeto sobre o filme. A distância da lente ao filme é $p' = 52$ mm. A figura mostra o esboço dessa câmara.
Para se obter uma boa foto, é necessário que a imagem do objeto seja formada exatamente sobre o filme e seu tamanho não deve exceder a área sensível do filme. Assim:

a) Calcule a posição em que o objeto deve ficar em relação à lente.
b) Sabendo que a altura máxima da imagem não pode exceder 36,0 mm, determine a altura máxima do objeto para que ele seja fotografado em toda a sua extensão.

**13.** (UFTM-MG) As figuras mostram um mesmo texto visto de duas formas: na figura 1, a olho nu, e na figura 2, com o auxílio de uma lente esférica. As medidas nas figuras mostram as dimensões das letras nas duas situações.

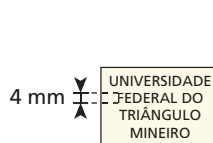



Figura 1

Figura 2

Sabendo que a lente foi posicionada paralelamente à folha e a 12 cm dela, pode-se afirmar que ela é

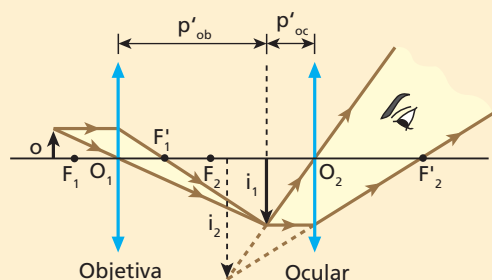
a) divergente e tem distância focal –20 cm.
b) divergente e tem distância focal –40 cm.
c) convergente e tem distância focal 15 cm.
d) convergente e tem distância focal 20 cm.
e) convergente e tem distância focal 45 cm.

**14.** (Mack-SP) Um estudante de Física dispõe de uma lente biconvexa de índice de refração $n = 1{,}6$ e faces com raios de curvatura iguais a 10 cm. Com essa lente, ele deseja construir um projetor de diapositivos de forma que a película fique a 10 cm dela. Adote $n_{ar} = 1{,}0$. A que distância da lente deve ser projetada a imagem da película?

**15. E.R.** Um microscópio composto é constituído de dois sistemas convergentes de lentes, associados coaxialmente: um é a objetiva, com distância focal de 4 mm, e o outro é a ocular, com distância focal de 6 cm. De um objeto distante 5 mm da objetiva o microscópio fornece uma imagem virtual, afastada 78 cm da ocular. Determine:

a) o aumento produzido pela objetiva.
b) o aumento produzido pela ocular.
c) a ampliação produzida pelo microscópio.
d) a distância da objetiva à ocular.

**Resolução:**

O esquema seguinte representa a situação proposta:

a) Para a objetiva:

$$\frac{1}{f_{ob}} = \frac{1}{p_{ob}} + \frac{1}{p'_{ob}}$$

Com $f_{ob} = 4$ mm e $p_{ob} = 5$ mm, calculamos $p'_{ob}$:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{p'_{ob}} \Rightarrow p'_{ob} = 20\,\text{mm} = 2\,\text{cm}$$

Logo, o aumento produzido pela objetiva é calculado por:

$$A_{ob} = -\frac{p'_{ob}}{p_{ob}} = -\frac{20\,\text{mm}}{5\,\text{mm}} \Rightarrow \boxed{A_{ob} = -4}$$

b) Para a ocular:

$$\frac{1}{f_{oc}} = \frac{1}{p_{oc}} + \frac{1}{p'_{oc}}$$

Com $f_{oc} = 6$ cm e $p'_{oc} = -78$ cm, calculamos $p_{oc}$:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{p_{oc}} - \frac{1}{78} \Rightarrow p_{oc} \cong 5{,}6\,\text{cm}$$

Logo, o aumento produzido pela ocular é calculado por:

$$A_{oc} = -\frac{p'_{oc}}{p_{oc}} = -\frac{(-78\,\text{cm})}{5{,}6\,\text{cm}} \Rightarrow \boxed{A_{oc} = 14}$$

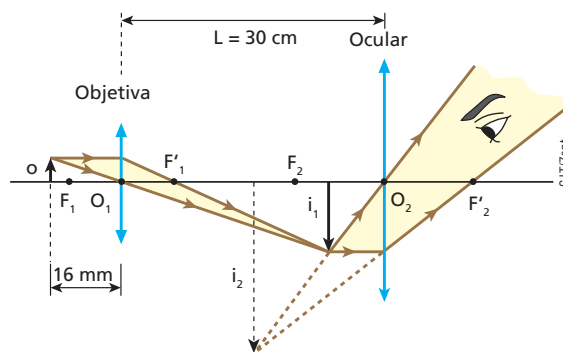
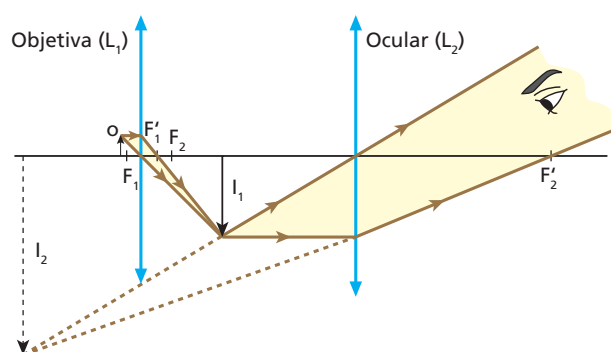
c) Para o microscópio, a ampliação fica determinada por:

$$|A| = |A_{ob}| \cdot |A_{oc}| \Rightarrow |A| = 4 \cdot 14 \Rightarrow \boxed{|A| = 56}$$

d) A distância da objetiva à ocular **d** é tal que:

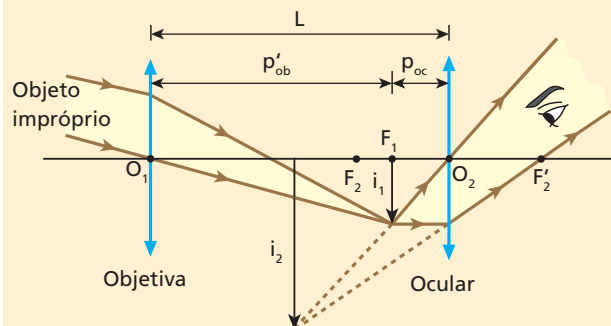
$$d = p'_b + p_{oc}$$

$$d = 2\text{ cm} + 5{,}6\text{ cm} \Rightarrow \boxed{d = 7{,}6\text{ cm}}$$

**16.** A figura a seguir representa esquematicamente um microscópio óptico constituído por dois sistemas convergentes de lentes, dispostos coaxialmente: um é a objetiva, com distância focal de 15 mm, e o outro é a ocular, com distância focal de 9,0 cm. Sabendo que para o objeto **o** o microscópio fornece a imagem final **$i_2$**, calcule o módulo do aumento linear transversal produzido pelo instrumento.

**17.** A figura a seguir mostra um esquema da formação de imagem em um microscópico óptico composto, constituído por duas lentes convergentes, associadas coaxialmente: uma é a objetiva, com distância de 4 mm, e a outra é a ocular, com distância focal de 6 cm.

Sabendo-se que um pequeno objeto iluminado, colocado a uma distância igual a 5 mm da objetiva, fornece uma imagem final virtual ($I_2$), afastada 72 cm da ocular, pede-se para calcular o módulo do aumento total fornecido pelo instrumento.

**18. E.R.** Uma luneta é constituída de uma objetiva e uma ocular, associadas coaxialmente e acopladas a um tubo, cujo interior é fosco. Com o uso do referido instrumento, focaliza-se um corpo celeste, e a imagem final visada pelo observador forma-se a 60 cm da ocular. Sabendo que a objetiva e a ocular têm distâncias focais de 80 cm e 20 cm, respectivamente, calcule o comprimento da luneta (distância entre a objetiva e a ocular).

**Resolução:**

O esquema seguinte ilustra a situação proposta:

O comprimento da luneta (**L**) é tal que:

$$L = p'_{ob} + p_{oc}$$

O corpo celeste, estando muito afastado da luneta, comporta-se como objeto impróprio para a objetiva, que conjuga a ele uma imagem em seu plano focal. Assim, podemos escrever que:

$$p'_{ob} \cong f_{ob} = 80 \text{ cm}$$

A imagem produzida pela objetiva faz o papel de objeto real para a ocular, que dá a imagem final virtual visada pelo observador. Em relação à ocular, tem-se que:

$$\frac{1}{f_{oc}} = \frac{1}{p_{oc}} + \frac{1}{p'_{oc}} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{p_{oc}} - \frac{1}{60}$$

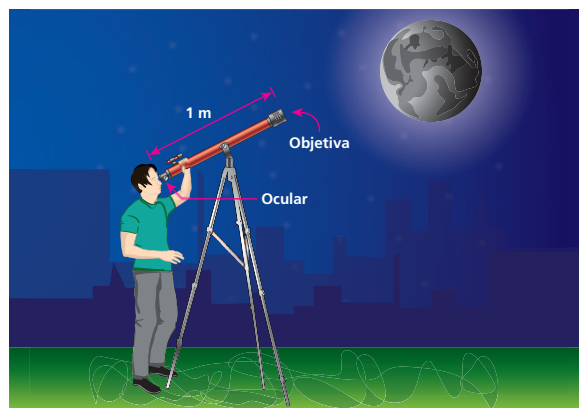
$$\frac{1}{p_{oc}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{60} \Rightarrow p_{oc} = 15 \text{ cm}$$

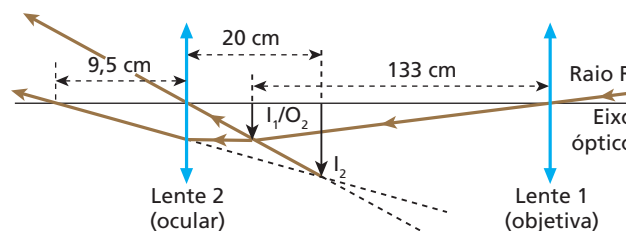
Com $p'_{ob} \cong 80$ cm e $p_{oc} = 15$ cm, determinamos o comprimento da luneta:

$$L = p'_{ob} + p_{oc} = 80 \text{ cm} + 15 \text{ cm}$$

$$\boxed{L = 95 \text{ cm}}$$

**19.** No ano de 2009, comemorou-se no mundo inteiro os 400 anos das primeiras observações astronômicas realizadas por Galileu Galilei. Popularizam-se esquemas de montagens caseiras de lunetas utilizando-se materiais de baixo custo, tais como, tubos de PVC, uma lente convergente (objetiva) e uma lente divergente ou convergente (ocular).
Na escolha das lentes a serem utilizadas na montagem da luneta, geralmente, não são relevantes as distâncias focais, $\mathbf{f_1}$ e $\mathbf{f_2}$, (medidas em metros), mas, sim, as potências de refração (vergência), cuja unidade de medida é a dioptria ("grau"). A vergência **V** de uma lente convergente ou divergente é dada pelo inverso de sua distância focal.

a) O esquema a seguir ilustra, fora de escala, uma luneta rudimentar, em que tanto a objetiva como a ocular são sistemas refratores convergentes, O instrumento está focalizado para um astro muito afastado, e sua objetiva dista 1 m da ocular, cuja vergência vale 25 di.
Sabendo-se que a imagem final visada pelo observador se situa a 12 cm da ocular, calcule a abscissa focal da objetiva.

b) Sabendo-se ainda que o aumento angular, **G**, proporcionado pela luneta é dado pela relação entre as distâncias focais da objetiva e da ocular, calcule o valor de **G** para a situação descrita no item **a**.

**20.** (Unicamp-SP) Um dos telescópios usados por Galileu por volta do ano de 1610 era composto por duas lentes convergentes, uma objetiva (lente **1**) e uma ocular (lente **2**), de distâncias focais a 133 cm e 9,5 cm, respectivamente. Na observação de objetos celestes, a imagem ($I_1$) formada pela objetiva situa-se praticamente no seu plano focal. Na figura (fora de escala), o raio **R** é proveniente da borda do disco lunar e o eixo óptico passa pelo centro da Lua.

a) A Lua tem 1 750 km de raio e fica a aproximadamente 384 000 km da Terra. Qual é o raio da imagem da Lua ($I_1$) formada pela objetiva do telescópio de Galileu?

b) Uma segunda imagem ($I_2$) é produzida pela ocular a partir daquela formada pela objetiva [a imagem da objetiva ($I_1$) torna-se objeto ($O_2$) para a ocular]. Essa segunda imagem é virtual e situa-se a 20 cm da lente ocular. A que distância a ocular deve ficar da objetiva do telescópio para que isso ocorra?

# Bloco 2

## 7. Introdução à óptica da visão

Com os olhos podemos manter íntima interação com o mundo que nos cerca. Enxergamos os demais animais, os vegetais, os objetos animados e inanimados, enfim, qualquer coisa que nos envie luz. Por meio da visão, recebemos dos corpos informações referentes a formas, cores, distâncias, movimentos etc.

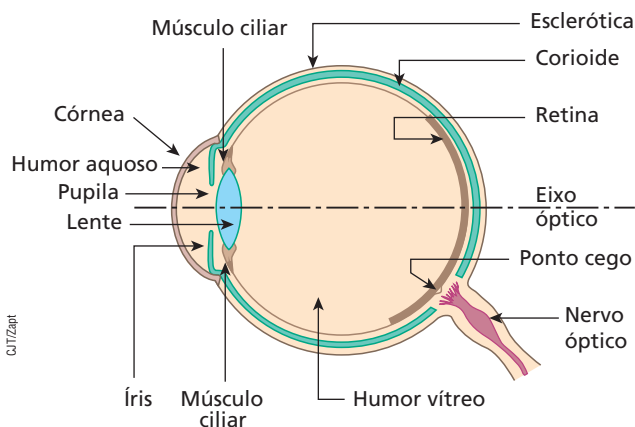
O olho, em essência, é um receptor de luz que consegue converter energia luminosa em impulsos elétricos, que, no cérebro, são interpretados no centro da visão.

Pretendemos fazer, aqui, um primeiro estudo da óptica da visão. Apresentaremos resumidamente o funcionamento básico do olho normal e comentaremos os principais defeitos visuais, bem como os respectivos modos de correção.

## 8. O bulbo do olho humano

No esquema a seguir vemos um corte transversal do bulbo do olho humano, no qual são destacados os pormenores relevantes à óptica da visão.

O bulbo do olho tem a forma aproximada de uma esfera de 22 mm de diâmetro, que possui, em sua parte anterior, uma região mais abaulada, denominada **córnea**.

Com exceção da região da córnea, o bulbo do olho é revestido por uma parede opaca composta de três camadas principais: a externa, chamada **esclerótica**, com uma constituição courácea esbranquiçada, que serve para dar estabilidade mecânica ao olho; a intermediária, chamada **corioide**, altamente vascularizada, cuja função é fazer a irrigação sanguínea do bulbo do olho; e a interna, chamada **retina**, composta das células sensoriais da visão, que se comunicam com o cérebro por meio de um cordão nervoso denominado **nervo óptico**. A retina reveste apenas parte da região posterior do bulbo do olho, denominada **fundo do olho**.

Representação esquemática em corte e cores-fantasia do bulbo do olho humano.

Adentrando o bulbo do olho a partir da córnea, passa-se por um líquido transparente de nome **humor aquoso**. Logo após fica a **pupila**, um orifício circular de diâmetro variável, cuja função é graduar a quantidade de luz que penetra no olho.

A variação do diâmetro da pupila é feita por um conjunto de músculos que exercem sobre ela esforços radiais. Esses músculos, que respondem pela coloração característica do olho, constituem a **íris**. Depois da pupila, há a **lente**, que é flexível, deformável pela ação dos **músculos ciliares**. Em razão da maior ou menor compressão desses músculos, a lente tem sua vergência alterada, adequando o sistema ocular à visão de objetos a diferentes distâncias. Depois da lente, fica a câmara interna do bulbo do olho, preenchida por uma substância transparente e gelatinosa, chamada **humor vítreo**.

O sistema óptico do bulbo do olho conjuga a um determinado objeto uma imagem **real** e **invertida**, projetada no fundo do olho (retina). As informações luminosas que lá incidem são transformadas em sinais elétricos, que escoam pelo nervo óptico até o centro da visão (situado no cérebro). A decodificação dos sinais luminosos em sinais elétricos é feita pelas células sensoriais ou receptoras da visão: são os **cones** e **bastonetes**, que promovem a percepção das cores e do preto e do branco, respectivamente.

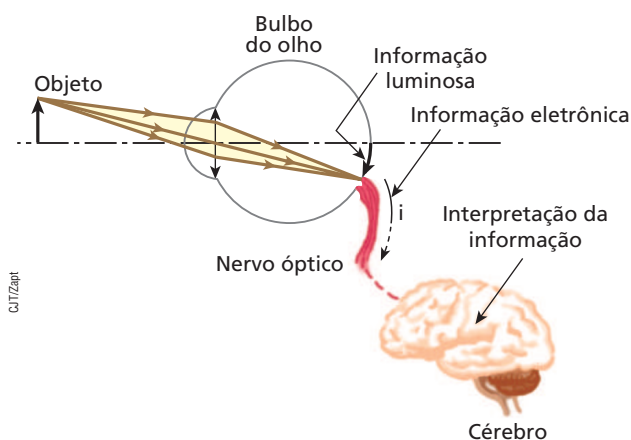



Ilustração esquemática com tamanhos fora de escala e em cores-fantasia.

Convém destacar que o sistema óptico constituído pelo bulbo do olho é **convergente**.

Também é importante ressaltar que, embora a imagem retiniana seja invertida, o cérebro tem a faculdade de interpretá-la corretamente.

## 9. Adaptação visual

Em ambientes muito claros (comparáveis à luz diurna), verifica-se que a pupila apresenta um diâmetro que varia de 1,5 mm a 2,0 mm. Já em ambientes pouco claros (comparáveis à luz noturna), a pupila apresenta um diâmetro que varia de 8,0 mm a 10 mm.

Isso nos permite concluir que a pupila gradua o fluxo luminoso que adentra o bulbo do olho, protegendo a retina contra eventuais ofuscamentos. Aumentando a intensidade luminosa incidente no bulbo do olho, ocorre contração da pupila e diminuição da sensibilidade da retina. O fenômeno oposto acontece na diminuição da intensidade luminosa incidente. Essa propriedade que o bulbo do olho tem de se adequar à luminosidade ambiente se chama **adaptação visual**.

Imagens: Sérgio Dotta Jr./The Next

Fotografia de olho adaptado para um ambiente relativamente claro.

Fotografia de olho adaptado para um ambiente relativamente escuro.

## 10. Acomodação visual

Para que as imagens conjugadas pelo sistema óptico do bulbo do olho sejam nítidas, elas devem formar-se sobre a retina, cuja distância em relação à lente é constante — em média, igual a 15 mm. Assim, a distância da imagem projetada no fundo do olho em relação à lente é invariável, o que acarreta a constância da abscissa **p'**. Já os objetos visados por um observador estão a diferentes distâncias de seu olho, o que implica a variância da abscissa **p**.

Considerando a função dos pontos conjugados:

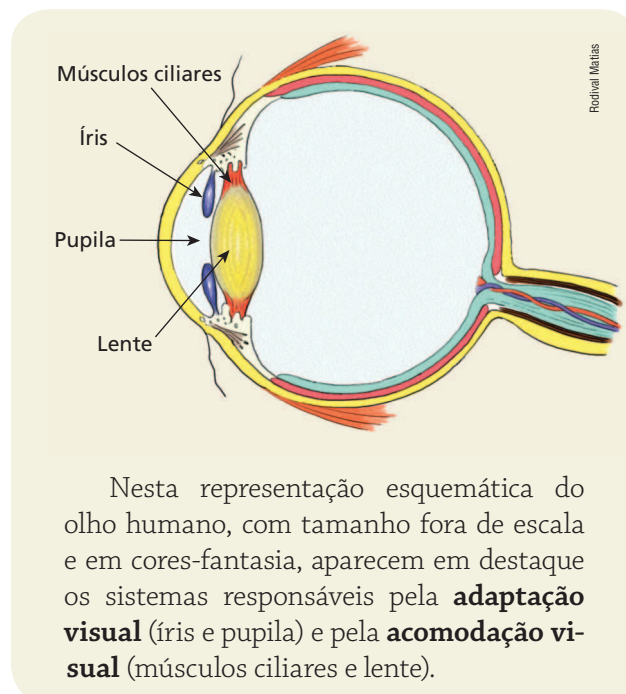
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

você pode observar que a constância de **p'** e a variância de **p** provocam a variância de **f**, que é a distância focal da lente.

A partir do que foi exposto, depreende-se que a lente (que opera de modo praticamente elástico) tem distância focal variável, de acordo com as variações da distância do objeto ao olho. A variação da distância focal da lente é feita pelos músculos ciliares, por meio da maior ou da menor compressão destes sobre ela. Esse processo de ajuste da distância focal do sistema óptico do bulbo do olho à visão nítida de objetos diferentemente afastados é denominado **acomodação visual**.

A acomodação visual possibilita ao bulbo do olho a conjugação de imagens nítidas para objetos situados dentro de certo intervalo da reta visual, que é denominado **intervalo de acomodação** e se estende desde o ponto remoto até o ponto próximo.

- **Ponto remoto (PR):** É o ponto objeto para o qual a vista conjuga imagem nítida sem nenhum esforço de acomodação. Nesse caso, os músculos ciliares mostram-se relaxados e a lente assume **máxima distância focal**.
- **Ponto próximo (PP):** É o ponto objeto para o qual a vista conjuga imagem nítida com máximo esforço de acomodação. Nesse caso, os músculos ciliares mostram-se contraídos e a lente assume **mínima distância focal**. A distância do ponto próximo ao olho é denominada **distância mínima de visão distinta**.

Rodival Matias

Nesta representação esquemática do olho humano, com tamanho fora de escala e em cores-fantasia, aparecem em destaque os sistemas responsáveis pela **adaptação visual** (íris e pupila) e pela **acomodação visual** (músculos ciliares e lente).

Destaquemos que, para o olho normal (ou emetrope), o ponto remoto se localiza no "infinito", enquanto o ponto próximo se situa, aproximadamente, a 25 cm do olho — um valor que varia com a idade.

## 11. Defeitos visuais e sua correção

Os principais defeitos da visão são: a **miopia**, a **hipermetropia**, a **presbiopia**, o **astigmatismo** e o **estrabismo**.

### Miopia

Este defeito consiste em um **alongamento** do bulbo do olho na direção anteroposterior.

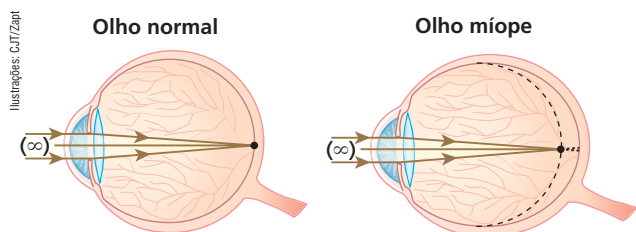
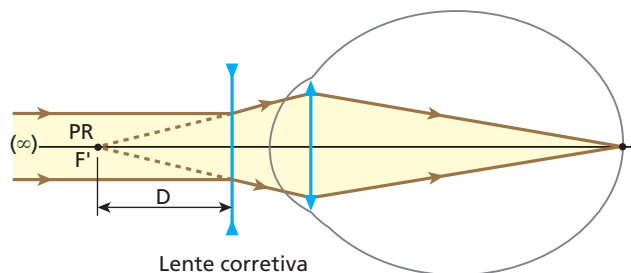



Ilustração do olho humano em corte e cores-fantasia.

O ponto remoto do olho míope é real, isto é, um olho míope não acomoda a visão para objetos impróprios, como ocorre no olho normal. Ao visar um objeto no "infinito", o olho míope conjuga uma imagem real, situada antes da retina, que é enxergada desfocada (embaçada). Entretanto, a miopia favorece a visão de objetos próximos, pois o ponto próximo, para o olho míope, é mais próximo do olho que para o olho normal.

A correção é feita mediante o uso de **lentes divergentes**, que diminuem a vergência do sistema ocular.

Esquema de correção da miopia.

As lentes corretivas devem proporcionar ao olho míope a visão de objetos impróprios. Por isso, a um objeto "situado no infinito", elas devem conjugar uma imagem virtual, posicionada no ponto remoto do olho.

Conclui-se, daí, que uma lente de correção deve ter distância focal de módulo igual à distância do ponto remoto ao olho.

$$|f| = D$$

Em termos de vergência, tem-se: $|V| = \frac{1}{D}$

É importante observar que:

- As lentes divergentes corretivas da miopia são "negativas", isto é: $f < 0$ e $V < 0$.
- No dimensionamento da distância focal (e da vergência) apresentado acima, foi desprezada a distância entre a lente corretiva e a lente ocular.

### Hipermetropia

Este defeito consiste em um **encurtamento** do bulbo do olho na direção anteroposterior.

O olho hipermetrope, embora acomode a visão para objetos impróprios, o faz com algum esforço. Em condições de músculos ciliares relaxados, a um objeto no "infinito" ele conjuga uma imagem real, situada depois da retina. Com a intervenção dos músculos, porém, ocorre a acomodação e a visão de objetos longínquos torna-se perfeita. Na hipermetropia, o problema não reside na observação de objetos muito afastados, mas na visão de objetos próximos. O ponto próximo do olho hipermetrope situa-se mais distante do olho que o ponto próximo do olho normal.

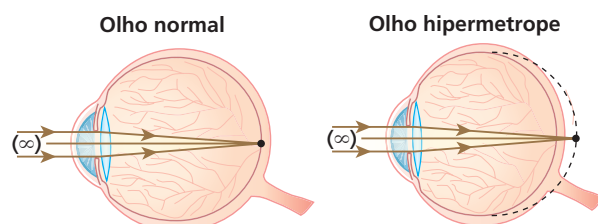
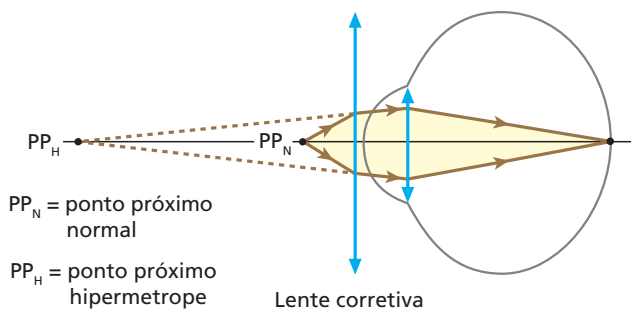



Ilustração do olho humano em corte e cores-fantasia.

A correção é feita com o uso de **lentes convergentes**, que aumentam a vergência do sistema ocular:

Esquema de correção da hipermetropia.

As lentes corretivas devem conjugar a um objeto real situado no ponto próximo normal ($PP_N$ a 25 cm do olho, em média) uma imagem virtual, localizada no ponto próximo hipermetrope ($PP_H$). Essa imagem comporta-se como objeto real para o sistema óptico do bulbo do olho.

Sendo $\mathbf{d_N}$ a distância mínima de visão distinta do olho normal e $\mathbf{d_H}$ a distância mínima de visão distinta do olho hipermetrope, a distância focal (e a vergência) da lente de correção fica determinada aplicando-se à situação do esquema anterior a **função dos pontos conjugados** (Equação de Gauss):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_N} - \frac{1}{d_H} \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{d_N} - \frac{1}{d_H}$$

É importante observar que:

- As lentes convergentes corretivas da hipermetropia são “positivas”, isto é: $f > 0$ e $V > 0$.
- No dimensionamento da distância focal (e da vergência) apresentado na página anterior, foi desprezada a distância entre a lente corretiva e a lente ocular.
- Na aplicação da Equação de Gauss, fizemos $p' < 0$, porque a imagem conjugada pela lente corretiva é virtual.

## Presbiopia (ou vista cansada)

A presbiopia é um defeito que consiste no **enrijecimento dos músculos ciliares ou da própria lente** natural do olho, o que ocorre com o evoluir da idade.

A presbiopia é uma ametropia (defeito visual) comum às pessoas com idade superior a 40 anos, que, com a limitação de sua capacidade de acomodação visual, têm dificuldades em “ver de longe” e também “de perto”.

### Lentes para melhorar a visão “de perto”

Michaela Begsteiger/Imagebroker RF/Diomedia

No que diz respeito à visualização de objetos próximos, um portador de presbiopia apresenta dificuldades visuais semelhantes às de um portador de hipermetropia. Por isso, para a visão “de perto”, a correção também é feita com lentes convergentes, a exemplo do que ocorre na hipermetropia. Essas lentes colocam as imagens de objetos situados no ponto próximo normal no ponto próximo do olho defeituoso e, com isso, a leitura de um texto, por exemplo, pode ser feita à distância de 25 cm, aproximadamente.

A correção da presbiopia é feita mediante o uso de **lentes bifocais** (ou multifocais), que têm uma região destinada à visão de objetos longínquos e outra destinada à visão de objetos próximos.

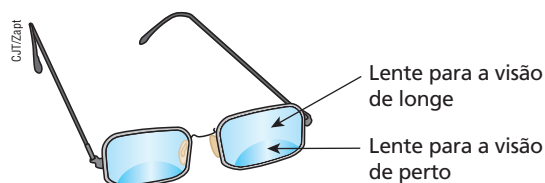
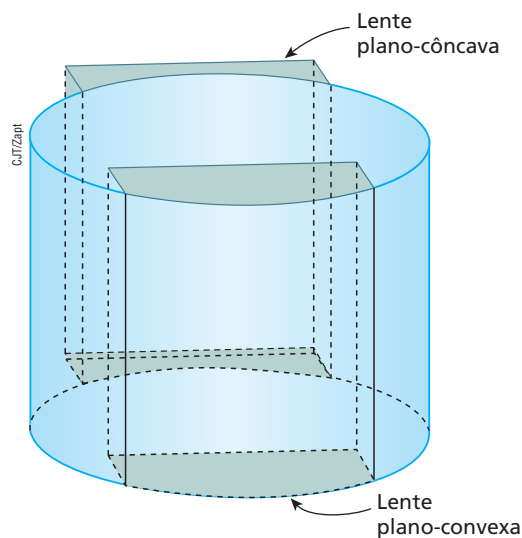



Ilustração de óculos com lentes bifocais.

## Astigmatismo

Este defeito consiste em imperfeições na simetria de revolução do sistema óptico ocular em torno de seu eixo óptico.

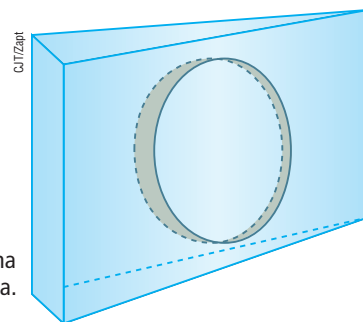
Em geral, o astigmatismo deve-se a irregularidades na curvatura da córnea, eventualmente abrangendo também as paredes da lente natural do olho.

A correção é feita mediante o uso de **lentes cilíndricas**, que têm o objetivo de compensar a assimetria do sistema óptico ocular.

Representação de lentes cilíndricas.

## Estrabismo

O estrabismo é um defeito que consiste na incapacidade de dirigir simultaneamente as retas visuais dos dois olhos para o ponto visado.

A correção pode ser feita com o uso de lentes prismáticas, exercícios da musculatura de sustentação do bulbo do olho ou, em casos mais graves, cirurgia.

CJT/Zapt

Representação de uma lente prismática.

### Os primeiros óculos

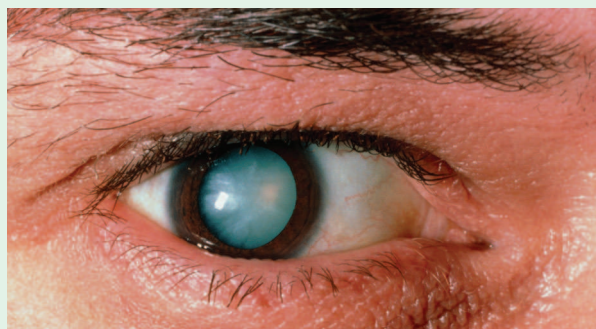
Erich Lessing/Album/Album Art/Latinstock

Os primeiros óculos de que se tem notícia foram inventados justamente para os presbíopes, que já não conseguiam enxergar de perto. Na Grécia antiga, filósofos usavam vidros de faces arredondadas para ler melhor. No século XIII, cristaleiros italianos criaram os primeiros óculos, que originaram uma sequência surpreendente de modelos, os quais costumam variar em função de valores e costumes determinantes da moda de cada época. No afresco ao lado, de 1532, tem-se a primeira representação de alguém usando óculos. Pintura de Marinus C. van Reymerswaele, do fim do século XVI. Kunsthistorisches Museum, Gemaldegalerie, Viena, Áustria.

## Leitura

### Catarata: um caminho para a cegueira

A catarata é uma patologia que, em geral, acomete pessoas idosas. A lente natural do olho torna-se opaca, impedindo a entrada da luz na câmara ocular. Com isso, os portadores de catarata perdem total ou parcialmente a capacidade visual, chegando a ficar cegos nos casos mais avançados da doença. A cura é cirúrgica e o procedimento consiste em substituir a estrutura afetada por uma lente artificial. A intervenção, simples e rápida, não requer internação do paciente, que tem a visão restabelecida, na maioria dos casos, em um curto espaço de tempo.

SPL/Latinstock

Fotografia mostrando que um portador de catarata tem a lente do olho esbranquiçada. Isso dificulta a entrada de luz no olho, reduzindo o brilho das imagens produzidas na retina. Nas situações mais graves da doença, a quantidade de luz que penetra no bulbo do olho se torna praticamente nula e a pessoa deixa de enxergar.

### Os velhos "fundos de garrafa"

No passado, quem tinha "altos graus" de miopia era obrigado a usar óculos com lentes divergentes muito grossas, que, por terem a região periférica mais espessa que a região central, se assemelhavam a verdadeiros fundos de garrafa. Contudo, a tecnologia de fabricação de lentes evoluiu de maneira notável e elas não são mais fabricadas a partir de vidro ou cristal, materiais que, entre outros inconvenientes, são muito pesados. Utiliza-se atualmente o acrílico, material mais leve e maleável, que possibilita a produção de óculos mais confortáveis e discretos.

Os atuais métodos de fabricação também possibilitam a produção de lentes **multifocais** (cada região da lente tem uma vergência específica) para portadores de miopia com astigmatismo, hipermetropia com astigmatismo ou presbiopia.

Os principais defeitos da visão, como a miopia, a hipermetropia e o astigmatismo, também podem ser corrigidos com **lentes de contato**. Elas são circulares, feitas com material flexível e transparente e usadas diretamente sobre a córnea. Por ficarem em contato com o bulbo do olho, as lentes de contato eliminam alguns inconvenientes dos óculos, como a alteração de fisionomia, o desconforto inerente a eles, bem como a limitação do campo de visão corrigida.

AGE FOTOSTOCK/Grupo keystone

Modelo de óculos do tipo "fundo de garrafa".

Para a correção da miopia, as lentes de contato têm as bordas mais espessas que a região central; são chamadas lentes ***minus*** ou côncavas. Para a correção da hipermetropia, elas têm a região central mais espessa que as bordas; são denominadas lentes ***plus*** ou convexas. Finalmente, para a correção do astigmatismo, essas lentes têm espessura variável de modo que compensem a falta de simetria esférica da córnea; são chamadas de lentes **tóricas**.

As lentes de contato podem ser usadas também para fins estéticos, permitindo a modificação da coloração da íris do usuário.

Em qualquer caso, no entanto, essas lentes requerem o uso sistemático de soros fisiológicos, lubrificantes que, somados aos fluidos lacrimais produzidos naturalmente pelo olho, servem para atenuar o atrito entre a lente e a córnea.

A maioria dos defeitos visuais pode ter correção definitiva por meio de cirurgias a *laser*. Essas intervenções consistem em moldar a córnea adequadamente para eliminar as deformidades do bulbo do olho, ou seja, o **olho longo**, no caso da miopia, e o **olho curto**, no caso da hipermetropia, devem assumir o formato normal.

Para a correção da miopia, situação mais comum, a intervenção é realizada reduzindo a curvatura da córnea, geralmente angulosa ou pontiaguda. O procedimento implica desgastar a córnea, aumentando, assim, seu raio de curvatura, ou provocar pequenas incisões com o feixe de *laser* em sua periferia de modo que seu raio de curvatura fique aumentado, depois da cicatrização. Essas cirurgias são muito rápidas, não necessitam da internação do paciente e têm um prognóstico muito favorável, dispensando, na maioria dos casos, o posterior uso de óculos ou lentes de contato.

Medicimage/Diomedia

A colocação de lentes de contato requer muito cuidado para que a córnea não seja lesionada.

VOISIN/PHANIE/Glow Images

Com a evolução das técnicas cirúrgicas, as cirurgias a *laser* permitem ao paciente vislumbrar grandes possibilidades de eliminação do defeito visual.

## Ilusões ópticas de Geometria

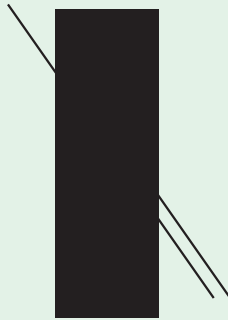
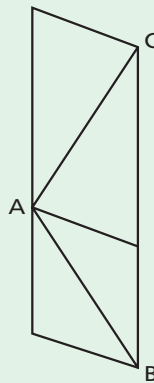
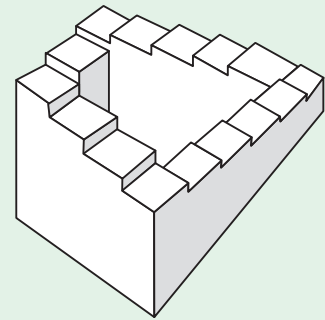
Nossos sentidos — visão, audição, olfato, paladar e tato —, embora nos proporcionem várias informações de tudo o que nos cerca, permitindo-nos interagir melhor com os demais seres vivos e os objetos, não são absolutamente confiáveis, sobretudo quando os utilizamos em certas avaliações e medições.

O tato, por exemplo, pode nos levar a concluir erroneamente que a água contida em um balde, em equilíbrio térmico com o ambiente, se apresenta ao mesmo tempo quente e fria. A mão esquerda, se previamente mergulhada em água gelada, quando introduzida no balde nos dará uma indicação de alta temperatura. A mão direita, se anteriormente submersa em água quente, mergulhada no balde nos dará uma indicação de baixa temperatura.

O paladar, por sua vez, percebe de maneiras diferentes o sabor de um mesmo suco de laranja, bebido isoladamente e bebido depois da ingestão de algo muito doce. Neste caso, ele nos parecerá bem mais ácido que na situação anterior.

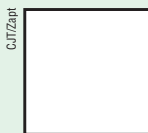
A visão também pode ser ludibriada com relativa facilidade. Confira os exemplos a seguir, nos quais aspectos geométricos das figuras apresentadas nos levam a conclusões equivocadas.

Ilustrações: CJT/Zapt

As retas "oblíquas" desta figura são paralelas. Observe.

Neste caso, a reta da esquerda é continuação da reta mais baixa do par à direita. Verifique.

Na figura acima, os segmentos AB e AC têm comprimentos iguais. Meça.

Percorrendo a escada em um dos sentidos, ela sempre sobe ou sempre desce. Seria uma "escada sem fim"?

## O círculo sumiu?

Observe as três figuras impressas a seguir: um quadrado, um círculo e uma cruz.

CJT/Zapt

Aproxime o rosto da página, mantendo seu olho esquerdo a uns 10 cm de distância da cruz. Feche ou tape o olho direito e focalize a cruz com o olho esquerdo durante alguns segundos. Desse ponto, você conseguirá enxergar, por meio da visão periférica do olho esquerdo, também o quadrado e o círculo. Comece então a afastar lentamente a cabeça do livro, mantendo sempre a visão dirigida para a cruz. Você encontrará uma posição de onde o círculo deixará de ser visto. Poderão ser notados desse local apenas a cruz e o quadrado. Isso pode ser explicado pelo fato de que, nesse caso, a imagem do círculo projetada sobre a retina fica situada sobre uma pequena região desprovida de células fotorreceptoras da visão, denominada **ponto cego**, nascedouro dos nervos ópticos, que transmitem as informações dos olhos para o cérebro.

## Exercícios nível 1

**21.** (Uerj) Uma partida de futebol, jogada com uma bola de 30 cm de diâmetro, é observada por um torcedor. A distância da íris à retina desse torcedor é aproximadamente igual a 2 cm.
O tamanho da imagem da bola, em micrômetros, que se forma na retina do torcedor, quando a bola está a 150 m de distância, vale, aproximadamente:

**Nota:** 1 micrômetro = 1 μm = $10^{-6}$ m

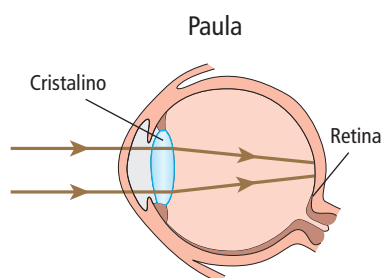
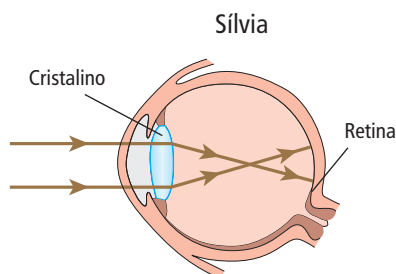
a) 1.
b) 40.
c) 300.
d) 800.
e) 900.

**22.** Um observador visa fixamente um objeto, que se aproxima do seu globo ocular com velocidade constante. Durante a aproximação do objeto, é **correto** afirmar que a distância focal do cristalino do olho do observador:

a) aumenta.
b) diminui.
c) permanece constante.
d) aumenta, para depois diminuir.
e) diminui, para depois aumentar.

**23.** (UFMG) Após examinar os olhos de Sílvia e de Paula, o oftalmologista apresenta suas conclusões a respeito da formação de imagens nos olhos de cada uma delas, na forma de diagramas esquemáticos, como mostrado nestas figuras:

Sílvia

Paula

Com base nas informações contidas nessas figuras, é correto afirmar que:

a) apenas Sílvia precisa corrigir a visão e, para isso, deve usar lentes divergentes.
b) ambas precisam corrigir a visão e, para isso, Sílvia deve usar lentes convergentes e Paula, lentes divergentes.
c) apenas Paula precisa corrigir a visão e, para isso, deve usar lentes convergentes.
d) ambas precisam corrigir a visão e, para isso, Sílvia deve usar lentes divergentes e Paula, lentes convergentes.

**24.** (Acafe-SC) O uso de óculos para corrigir defeitos da visão começou no final do século XIII e, como não se conheciam técnicas para o polimento do vidro, as lentes eram rústicas e forneciam imagens deformadas. No período da Renascença, as técnicas foram aperfeiçoadas e surgiu a profissão de fabricante de óculos. Para cada olho defeituoso, existe um tipo conveniente de lente que, associado a ele, corrige a anomalia.
Considere a receita abaixo, fornecida por um médico oftalmologista a uma pessoa com dificuldades para enxergar nitidamente objetos afastados.

| | Longe | | Perto | |
|---|---|---|---|---|
| | OD | OE | OD | OE |
| **Lentes esféricas** | –2,0 di | –2,5 di | — | — |
| **Lentes cilíndricas** | — | — | — | — |
| **Eixo** | 105° | 105° | — | — |
| **DP** | 63 mm | 63 mm | — | — |

DP – Distância entre os eixos dos olhos
OD – Olho direito
OE – Olho esquerdo

Em relação ao exposto, é **incorreta** a alternativa:

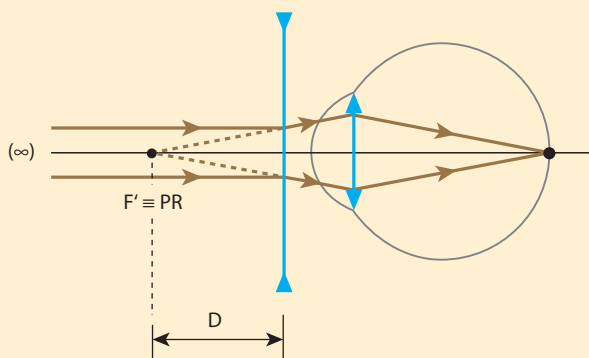
a) A pessoa apresenta miopia.
b) A distância focal da lente direita tem módulo igual a 50 cm.
c) As lentes são divergentes.
d) Essas lentes podem funcionar como lentes de aumento.
e) As imagens fornecidas por essas lentes serão virtuais.

## Exercícios nível 2

**25.** Para o olho emetrope (ou normal), o ponto remoto é impróprio (localizado no “infinito”), enquanto o ponto próximo situa-se a 25 cm do olho. Admitindo que a distância do cristalino à retina seja de 15 mm, determine:

a) as distâncias focais do cristalino quando acomodado para o ponto remoto e para o ponto próximo.
b) a variação da convergência do cristalino quando um objeto é deslocado do ponto remoto para o ponto próximo.

**26. E.R.** Considere um olho míope. Se seu ponto remoto está a 50 cm de distância, qual o tipo da lente corretiva a ser utilizada (convergente ou divergente) e qual sua vergência? (Considere desprezível a distância entre a lente e o olho.)

**Resolução:**

Para um objeto impróprio, a lente corretiva deve fornecer uma imagem virtual situada no ponto remoto do olho míope. Essa imagem funciona como objeto real para o olho.
A lente corretiva deve ser divergente e o módulo da sua vergência deve igualar-se ao inverso da distância máxima de visão distinta do olho míope:

$$|V| = \frac{1}{D}$$

$$|V| = \frac{1}{50\ \text{cm}} = \frac{1}{0{,}50\ \text{m}} \Rightarrow |V| = 2{,}0\ \text{di}$$

Portanto:

A lente corretiva deve ser divergente e sua vergência deve valer –2,0 di.

**27.** (UFPR – mod.) No livro *O senhor das moscas*, de William Golding, um grupo de crianças está perdido em uma ilha. Segundo a narração, elas conseguiam fazer fogo usando as lentes dos óculos do personagem Porquinho, que tinha forte miopia.

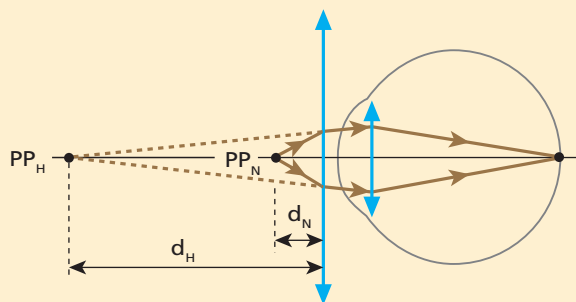
a) A técnica utilizada pelas crianças pode ser empregada na vida real?
b) Supondo que Porquinho utilizasse lentes com vergência de módulo igual a 5,0 di, qual a distância máxima de visão distinta sem o auxílio de suas lentes?
c) Nas condições do item anterior, determine a abscissa focal e o tipo de lente que deve ser justaposta à lente utilizada por Porquinho para que seja possível atear fogo em um fino graveto colocado perpendicularmente ao eixo principal da associação e a 60 cm dela.

**28.** (Unitau-SP) O ponto remoto de um míope se situa a 51 cm de seus olhos. Supondo que seja de 1,0 cm a distância entre seus olhos e as lentes dos óculos, podemos afirmar que, para a correção do defeito visual, podemos usar uma lente de vergência:

a) 3,0 di.
b) –3,0 di.
c) –2,0 di.
d) 2,0 di.
e) 4,0 di.

**29. E.R.** Em um olho hipermetrope, o ponto próximo situa-se a 50 cm de distância. Sabendo que no olho emetrope a distância mínima de visão distinta vale 25 cm, determine a vergência da lente corretiva para a hipermetropia considerada (despreze a distância da lente corretiva ao olho).

**Resolução:**

Para um objeto situado no ponto próximo emetrope (normal), a lente corretiva deve produzir uma imagem virtual, posicionada no ponto próximo hipermetrope. Essa imagem desempenha para o olho o papel de objeto real:

A lente corretiva deve ser convergente e sua vergência é calculada conforme segue:

$$V = \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Temos $|p| = d_N = 25\ \text{cm} = 0{,}25\ \text{m}$ e
$|p'| = d_H = 50\ \text{cm} = 0{,}50\ \text{m}$.

Lembrando que a imagem é virtual ($p' < 0$), temos:

$$V = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}50} \Rightarrow \boxed{V = +2{,}0\ \text{di}}$$

Portanto:

A lente corretiva deve ser convergente e sua vergência deve valer +2,0 di.

**30.** (UFOP-MG) O olho humano, em condições normais, é capaz de alterar sua distância focal, possibilitando a visão nítida de objetos situados desde o "infinito" (muito afastados) até aqueles situados a uma distância mínima de aproximadamente 25 cm. Em outras palavras, o ponto remoto desse olho está no infinito e o seu ponto próximo, a 25 cm de distância. Uma pessoa com hipermetropia não consegue enxergar objetos muito próximos porque o seu ponto próximo está situado a uma distância maior do que 25 cm. Com base nessas informações, resolva as questões propostas.

a) Que tipo de lente uma pessoa com hipermetropia deve usar?
b) Supondo que o ponto próximo de um hipermetrope esteja a 100 cm de seus olhos, determine, em valor e em sinal, quantos "graus" devem ter os óculos dessa pessoa para que ela veja um objeto a 25 cm de distância.

**31.** Um homem, ao consultar seu oculista, recebe a recomendação para usar lentes corretivas com vergência de +3,0 di. Sabe-se que na visão normal o ponto próximo situa-se a 25 cm do olho.

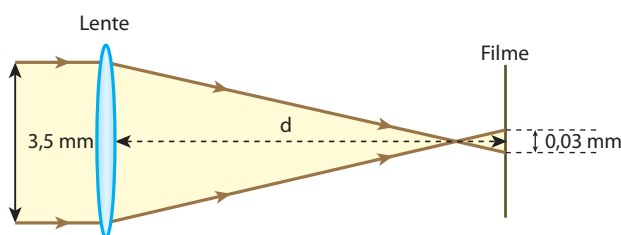
a) O homem é míope ou hipermetrope?
b) A que distância mínima dos olhos o homem deverá colocar um jornal, para que possa ler sem óculos?

## Descubra mais

1. Galileu construiu vários modelos de lunetas que lhe propiciaram descobertas astronômicas sem precedentes no século XVII. Em um deles, talvez o mais famoso, o cientista utilizou uma lente divergente como ocular. Que vantagem esse tipo de ocular trazia sobre uma ocular convergente? Esquematize a formação da imagem nessa famosa luneta de Galileu.
2. Suponha que um indivíduo com alto grau de miopia mergulhe em um grande aquário cheio de peixes usando seus óculos. Ele poderá visualizar nitidamente os peixes através de suas lentes de correção?
3. Além de miopia, hipermetropia, presbiopia e astigmatismo, há outros defeitos da visão, como o daltonismo. O que é daltonismo?
4. As lentes fotocromáticas, de grande aceitação entre os usuários de óculos, caracterizam-se pela capacidade de mudar de cor, apresentando-se claras em ambientes escuros e escuras em ambientes claros. Como funcionam essas lentes?

## Exercícios

nível 3

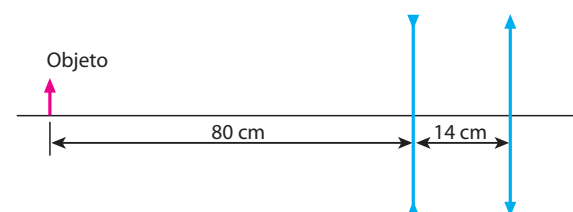
**32.** (Unicamp-SP) Em uma máquina fotográfica de foco fixo, a imagem de um ponto no infinito é formada antes do filme, conforme ilustra o esquema.

No filme, esse ponto está ligeiramente desfocado e sua imagem tem 0,03 mm de diâmetro. Mesmo assim, as cópias ampliadas ainda são nítidas para o olho humano. A abertura para a entrada de luz é de 3,5 mm de diâmetro e a distância focal da lente é de 35 mm.

a) Calcule a distância **d** do filme à lente.
b) A que distância da lente um objeto precisa estar para que sua imagem fique exatamente focalizada no filme?

**33.** Um projetor rudimentar fornece, para um fotograma quadrado de 5,0 cm de lado, uma imagem também quadrada, porém com 50 cm de lado. Sabendo que a objetiva do projetor é constituída pela justaposição de duas lentes com vergências de –1,0 di e +6,0 di, calcule:

a) a distância do fotograma ao centro óptico da objetiva.
b) a distância da tela ao centro óptico da objetiva.

**34.** (Vunesp-SP) Dispondo-se de duas lentes convergentes de distâncias focais iguais a 1,00 cm, colocadas a uma distância **d** uma da outra e com seus eixos principais coincidentes, pretende-se obter uma imagem virtual 100 vezes ampliada de um pequeno objeto colocado a 2,00 cm da primeira lente. Qual deve ser a distância entre as lentes?

**35.** (ITA-SP) A figura mostra um instrumento óptico constituído de uma lente divergente, com distância focal $f_1 = -20$ cm, distante 14 cm de uma lente convergente, com distância focal $f_2 = 20$ cm. Se um objeto linear é posicionado a 80 cm à esquerda da lente divergente, pode-se afirmar que a imagem definitiva formada pelo sistema:

a) é real e o fator de ampliação linear do instrumento é –0,4.
b) é virtual, menor e direita em relação ao objeto.
c) é real, maior e invertida em relação ao objeto.
d) é real e o fator de ampliação linear do instrumento é –0,2.
e) é virtual, maior e invertida em relação ao objeto.

**36.** (UFC-CE) "O maior telescópio do mundo, o VLT (sigla em inglês para 'telescópio muito grande'), instalado em Cerro Paranal (Chile), começou a funcionar parcialmente na madrugada de ontem [...] Segundo o astrônomo João Steiner, quanto maior o espelho do telescópio, mais luz vinda do espaço ele coleta, numa proporção direta. O espelho do VLT tem um diâmetro de 16 m. O maior espelho em operação atualmente, instalado no telescópio Keck, no Havaí (EUA), tem diâmetro de 10 m." (*Folha de S.Paulo*, 27/05/98.)

Supondo que a única diferença entre o VLT e o Keck seja o diâmetro dos seus espelhos, podemos afirmar que a quantidade de luz coletada pelo VLT, no intervalo de 1 h, é, aproximadamente:

a) igual a 0,25 vez a quantidade de luz coletada pelo Keck, nesse mesmo intervalo.
b) igual à quantidade de luz coletada pelo Keck, nesse mesmo intervalo.
c) igual a 1,60 vez a quantidade de luz coletada pelo Keck, nesse mesmo intervalo.
d) igual a 2,56 vezes a quantidade de luz coletada pelo Keck, nesse mesmo intervalo.
e) igual a 3,20 vezes a quantidade de luz coletada pelo Keck, nesse mesmo intervalo.

**37.** (PUC-SP) Uma luneta foi construída com duas lentes convergentes de distâncias focais respectivamente iguais a 100 cm e 10 cm. Uma pessoa de vista normal regula a luneta para observar a Lua e depois focaliza um objeto situado a 20 metros de distância. Para tanto, deve deslocar a ocular em aproximadamente:
a) 10 cm, aproximando-a da objetiva.
b) 10 cm, afastando-a da objetiva.
c) 5 cm, aproximando-a da objetiva.
d) 5 cm, afastando-a da objetiva.
e) 1 cm, afastando-a da objetiva.

**38.** (Ufla-MG) O funcionamento de uma máquina fotográfica é semelhante ao olho humano. Quando o olho humano está fixado em um objeto distante, o músculo ciliar relaxa e o sistema córnea-cristalino atinge sua máxima distância focal, que corresponde à distância da córnea à retina. Quando o objeto está próximo ao olho humano, o músculo ciliar se contrai e aumenta a curvatura do cristalino, diminuindo, assim, a distância focal até que o objeto seja focalizado corretamente na retina, sendo esse processo chamado de acomodação. Considerando a máxima distância focal igual a 2,5 cm, pode-se afirmar que a variação da distância focal $\Delta f$ do sistema córnea-cristalino do olho para manter em foco um objeto que é deslocado do infinito até um ponto próximo padrão de 25 cm é:

a) $+\frac{2,5}{11}$ cm.  c) $-\frac{2,5}{11}$ cm.  e) 0.
b) 2,27 cm.  d) −2,27 cm.

**39.** Considere as duas pessoas representadas a seguir. Devido às suas lentes corretivas, a da figura 1 aparenta ter os olhos muito pequenos em relação ao tamanho do seu rosto, ocorrendo o oposto com a pessoa da figura 2:

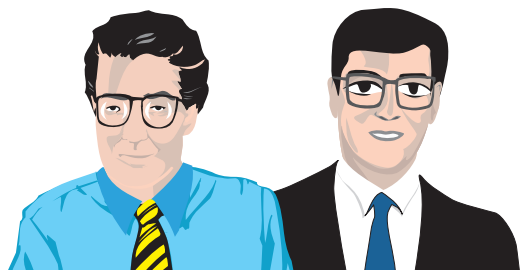
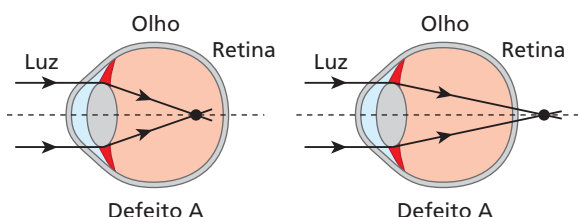
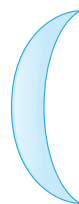



Figura 1  Figura 2

É correto concluir que:
a) a pessoa da figura 1 é míope e usa lentes convergentes.
b) a pessoa da figura 1 é hipermetrope e usa lentes divergentes.
c) a pessoa da figura 2 é míope e usa lentes divergentes.
d) a pessoa da figura 2 é hipermetrope e usa lentes convergentes.
e) as duas pessoas têm o mesmo defeito visual.

**40.** (UFPA) Um oftalmologista, antes de examinar um paciente, explica-lhe dois defeitos da visão usando os esquemas abaixo:

Em seguida, mostra-lhe as lentes representadas abaixo, cuja função é corrigir esses defeitos. As lentes são de acrílico e foram dimensionadas para operar no ar.

Lente 1  Lente 2

a) Qual o nome de cada defeito e qual a lente (1 ou 2) que corrige cada um?
b) Após exame, o médico constata que o olho do paciente apresenta o **defeito A**, sendo sua máxima distância de visão distinta igual a 50 cm. Calcule quantas dioptrias deve ter a lente receitada pelo médico para corrigir tal defeito.

**41.** (Unifesp-SP) As figuras mostram o Nicodemus, símbolo da Associação Atlética dos estudantes da Unifesp, ligeiramente modificado: foram acrescentados olhos na 1ª figura e óculos transparentes na 2ª.

Figura 1

Figura 2

a) Supondo que ele esteja usando os óculos devido a um defeito de visão, compare as duas figuras e responda: Qual pode ser esse provável defeito? As lentes dos óculos são convergentes ou divergentes?
b) Considerando que a imagem do olho do Nicodemus com os óculos seja 25% maior que o tamanho real do olho e que a distância do olho à lente dos óculos seja de 2 cm, determine a vergência das lentes usadas pelo Nicodemus, em dioptrias.

**42.** Uma lupa com 5,0 cm de distância focal é utilizada por um estudante para observar um inseto de 2,0 mm de comprimento, situado sobre uma superfície iluminada. Sabe-se que a distância mínima de visão distinta do estudante vale 25 cm e que o inseto é colocado a 4,0 cm da lupa.
a) A que distância da lupa o estudante deverá posicionar seu globo ocular para perceber a imagem do inseto com tamanho máximo?
b) Qual o aumento linear transversal produzido pela lupa e qual o comprimento da imagem do inseto?

**43.** Um homem idoso que "sofre da vista" (presbiopia) tem os pontos próximo e remoto distantes de seus olhos 1,0 m e 2,0 m respectivamente. Sabe-se que a distância mínima de visão distinta normal é de 25 cm e que o homem possui dois óculos: **A** (para ver de longe) e **B** (para ver de perto).
a) Qual a vergência das lentes dos óculos **A**?
b) Qual a vergência das lentes dos óculos **B**?

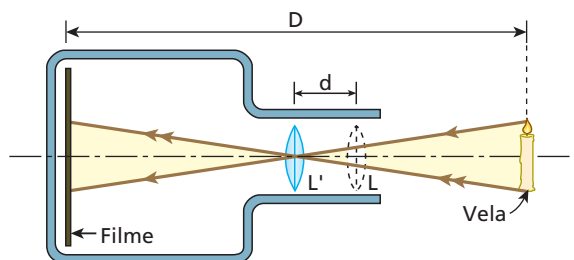
## Para raciocinar um pouco mais

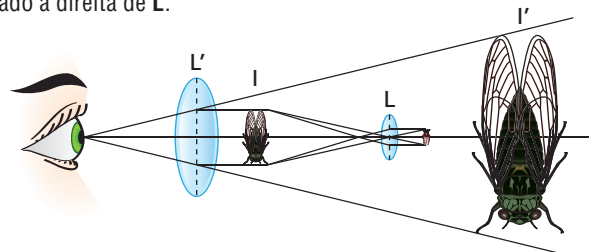
**44.** As lentes esféricas constituem um componente fundamental, já que comparecem com papel preponderante em quase todos os instrumentos ópticos. Câmaras fotográficas, filmadoras, microscópios e lunetas, por exemplo, utilizam uma ou mais lentes. Na fotografia a seguir, um homem posiciona uma lente de aumento (lupa) a 12,0 cm de seu olho e esta produz uma imagem ampliada quatro vezes.

Gerard Fritz/Photographer's Choice/Getty Images

Considerando-se válidas as condições de Gauss, pede-se:

a) fazer um esquema da lente e dos raios de luz que determinam o tipo de imagem observada;
b) calcular a distância focal da lente;
c) determinar o comprimento da imagem quando a lente referida é utilizada para projetar, em uma parede distante 80,0 cm do seu centro óptico, a figura de uma lâmpada cilíndrica, de 10,0 cm de altura, colocada perpendicularmente ao eixo óptico.

**45.** Considere a situação esquematizada a seguir, em que uma pequena vela tem sua imagem nitidamente projetada no filme de uma câmera fotográfica para as duas posições **L** e **L′** da lente objetiva do equipamento:

Sendo **D** a distância entre a vela e o filme, **d** a distância entre as posições **L** e **L′** e admitindo válidas as condições de Gauss, determine a distância focal **f** da lente.

**46.** (UFCG-PB) Uma professora, para mostrar um inseto para os alunos, montou o sistema óptico indicado na figura, em que **L** e **L′** são lentes e **I** e **I′** são imagens do inseto. O inseto é o objeto colocado à direita de **L**.

Freitas, Aníbal. *Curso de Física*, 3ª Série. 4.Ed. Melhoramentos. São Paulo: 1936.

Observando cuidadosamente a figura, pode-se afirmar que

a) se a lente **L′** não fizesse parte do sistema, seria impossível observar qualquer imagem do inseto.
b) a imagem **I′** é real.
c) a imagem **I** é virtual.
d) a imagem **I** está localizada além do foco de **L′**.
e) o inseto está localizado além do foco da lente **L**.

**47.** (Olimpíada Paulista de Física) Um certo instrumento óptico consta de duas lentes com distâncias focais iguais em módulo. Uma das lentes é convergente e a outra é divergente. As lentes são montadas sobre um eixo comum, a uma determinada distância **d** uma da outra. Sabe-se que se trocarmos a ordem das lentes, mantendo a mesma distância entre elas, a imagem real da Lua, projetada pelo sistema, se desloca de 20 cm. Determine a distância focal de cada uma das lentes.

**48.** Roberto verifica que as lentes corretivas de seus óculos produzem imagens direitas com dimensões lineares iguais a $\frac{1}{4}$ das correspondentes dimensões de um dado objeto distante 60 cm dos óculos.

Determine:

a) a vergência das lentes dos óculos de Roberto e o provável defeito visual (miopia ou hipermetropia) do rapaz.
b) a distância entre os óculos e as imagens produzidas neste caso.

**49.** Sabe-se que, para o olho emetrope, o ponto remoto situa-se no "infinito". Um garoto de vista normal coloca as lentes de contato de sua irmã, cuja convergência é de +2,0 di. Nessas condições, qual passa a ser sua distância máxima de visão distinta?

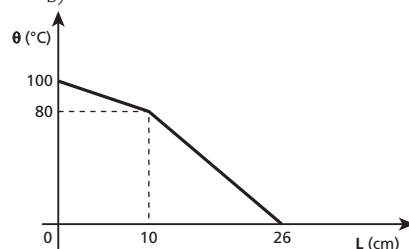
# Respostas

## Parte I
## Termologia

### Tópico 1
### Temperatura

**1.** 113 °F
**2.** 86 °F
**3.** 20 °C
**5.** 20 °C
**6.** −40 °C
**7.** 1 °A
**8.** −20 °X e 60 °X
**9.** 36 °F
**10.** 3,0 °C
**12.** 15°
**13.** 136,4 °F e −128,6 °F
**14.** b
**15.** 45 °C
**16.** 78 °C
**17.** 30 °R
**18.** a) $\theta_C = 5{,}0\,h - 5{,}0$ c) 6,4 cm
b) 45 °C
**19.** 30 °C
**20.** 25 °C
**22.** 1,25 mm
**23.** 184 K
**24.** 25 °C
**25.** −273 °C e −459 °F
**26.** 15 K
**27.** c
**28.** 120 °C
**30.** −615 °C. Não, essa temperatura não pode existir. Ela estará abaixo do zero absoluto.
**31.** d
**32.** a
**33.** b
**34.** 1,5 °X
**35.** b
**36.** a
**37.** d
**38.** 491 °R e 671 °R
**39.** e
**40.** d
**41.** b
**42.** e
**43.** a
**44.** b
**45.** d
**46.** d
**47.** b
**48.** −25,6°

### Tópico 2
### O calor e sua propagação

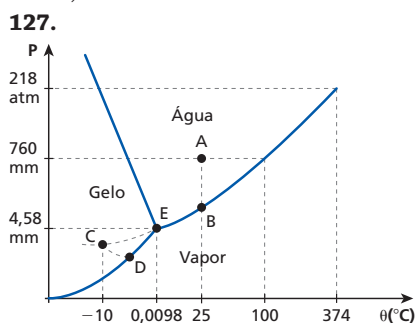
**1.** d
**2.** d
**3.** d
**4.** c
**5.** d
**6.** d
**7.** a
**8.** e
**9.** 46
**11.** 68 °F
**12.** $6{,}0 \cdot 10^4$ cal/s
**14.** 80 °C
**15.** d
**16.** 80 °C
**17.** e
**18.** d
**19.** Matilde deve colocar o aparelho na parte superior da parede.
**20.** c
**21.** d
**22.** d
**23.** c
**24.** d
**25.** d
**26.** c
**27.** c
**28.** d
**29.** 40 Wh
**30.** b
**31.** 40 °C
**32.** e
**33.** $1{,}6 \cdot 10^2$ cal/s
**34.** b
**35.** a
**36.** c
**37.** $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ W/m °C; 50 W
**38.** a) 80 °C
b)

**39.** 48 °C e 42 °C
**40.** b
**41.** a) $\Delta\theta = 0$
b) O sal aumenta a temperatura de ebulição da água.
c) $\Delta\theta \neq 0$
**42.** a
**43.** c
**44.** c

### Tópico 3
### Calor sensível e calor latente

**1.** d
**2.** d
**3.** c
**4.** e
**5.** 400 cal
**6.** b
**7.** 115 kcal
**8.** 800 cal/s
**9.** 36 cal/s
**10.** 0,25 cal/g °C
**11.** d
**12.** a) $5{,}0 \cdot 10^3$ g
b) $1{,}5 \cdot 10^4$ degraus
**13.** c
**15.** a) 58 W
b) $2{,}4 \cdot 10^4$ g
**16.** $2{,}6 \cdot 10^5$ J
**17.** 55 °C
**18.** 10 min
**19.** $3{,}0 \cdot 10^4$ kcal
**20.** c
**21.** 0,56 cal/g °C
**22.** 0,05 cal/g °F
**23.** a
**25.** 30 °C
**26.** 40 °C
**27.** 6
**28.** 10 °C
**29.** 550 mL
**30.** b
**31.** b
**32.** b
**33.** 20 L
**34.** b
**36.** a
**37.** 70 °C
**38.** a) 12,5 kcal
b) ≅ 91 cal/°C
**39.** 60 °C
**40.** 75 °C
**42.** 110 g
**43.** 20 g
**44.** 300 g
**45.** 8,0 g
**46.** e
**47.** $2{,}4 \cdot 10^4$ cal
**49.** 12 kcal
**50.** 50 °C
**51.** 10 500 cal
**52.** a) Fusão. O corpo recebe calor e a temperatura não varia.

b) 0,20 cal/g °C
2,0 cal/g
0,05 cal/g °C

**53.** −80 °C e 40 °C
**54.** 70 min
**55.** Uma caixa
**56.** b
**57.** a) 330 kJ/kg
b) 540 kJ
**58.** c
**60.** 24 °C
**61.** a) 0 °C
b) 100 g
**62.** b
**64.** d
**65.** 52 °C
**66.** Sim; 125 g
**67.** a
**68.** 0 °C
**69.** −9,0 °C
**70.** 18
**71.** c
**72.** b
**73.** b
**74.** b
**75.** d
**76.** b
**77.** $1,86 \cdot 10^4$ cal
**78.** d
**79.** c
**80.** e
**81.** d
**82.** c
**83.** a) 180 cal/s
b) 12 kcal
**85.** 0,125 kg
**86.** 0,8 kg
**87.** 80 °C
**88.** a
**89.** e
**90.** c
**91.** I − V
II − V
III − V
IV − V
**92.** 14
**93.** b
**94.** d
**95.** e
**96.** 19
**97.** a) Sim, para pressões maiores que 760 mm Hg
b) A pressão atmosférica e a temperatura de ebulição aumentam.
**98.** e
**99.** d
**100.** c
**101.** e
**102.** d
**103.** c
**104.** 5,0 g
**105.** −16 °C
**106.** c
**107.** d
**108.** d
**109.** c
**110.** e
**111.** a) $2,0 \cdot 10^2$ W
b) $9,0 \cdot 10^4$ J
c) $1,55 \cdot 10^3$ s
**112.** a) 24 cal/g
b) 80 °C
c) sólido $= \frac{100}{3}$ g
líquido $= \frac{50}{3}$ g
**113.** a) Evaporação
b) 1 150 kJ
**114.** a) 6,0 N
b) $1,5 \cdot 10^5$ cal/h
**115.** c
**116.** a) ≅ 77 J
b) ≅ 115 W
**117.** a) 4 kg
b) 10 kg
**118.** d
**119.** a) 70 g
b) 22 °C e zero
**120.** c
**121.** e
**122.** a) $T_f = \frac{2T}{3} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2N-2}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2^{N-1}}\right)}$

b) $T_f = \frac{2T}{3}$
**123.** 3,1 m²
**124.** 1 Btu ≅ 252 cal
**125.** c
**126.** a) $1,2 \cdot 10^5$ J
b) 30 °C
c) 20 °C
**127.**

Se toda a água se solidifica, a situação final será o ponto **D**.
Se restar água após a solidificação, a situação final será o ponto **E** (ponto triplo).
**128.** c
**129.** e
**130.** 1,24 kg
**131.** 250 °C
**132.** 2,5 s

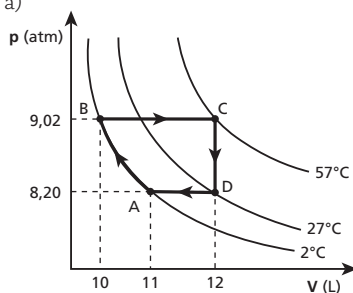
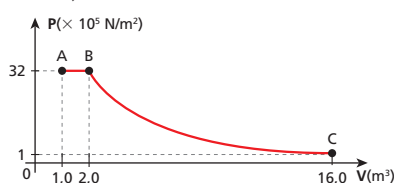
## Tópico 4
## Gases perfeitos

**1.** $1,0 \cdot 10^4$ N
**2.** e
**3.** 02
**4.** b
**5.** b
**6.** d
**8.** 4,0 cmHg
**9.** 293 °C
**10.** 5,0 atm
**11.** 81 °C
**12.** d
**13.** b
**14.** c
**15.** d
**16.** 218,4 °C
**17.** 150 mm Hg
**18.** 427 °C
**19.** 25%
**21.** 9,0 atm
**22.** b
**23.** −73 °C
**24.** 8,2 atm
**25.** d
**26.** c
**28.** −153 °C e 27 °C
**29.** 177 °C
**30.** $T_B$ ≅ 293 K e n = 2,0 mols
**31.** 120 °C
**32.** a) 87 °C b) 2,45 atm
**33.** e
**34.** $3,0 \cdot 10^{24}$ moléculas
**35.** c
**36.** 27 °C
**38.** 4,5 atm
**39.** 640 g
**40.** b
**41.** $2,4 \cdot 10^9$ moléculas
**42.** $1,0 \cdot 10^{-2}$ kg
**43.** 900 mm Hg
**44.** $\frac{1}{2}$
**46.** c
**47.** a) 4,0 N/cm²
b) Lei de Boyle
**48.** c
**49.** a) 6,0 L
b) 5,0 L
**50.** d
**52.** 27 °C
**53.** 3,6 atm
**54.** I) Correta
II) Errada
III) Errada
**55.** c
**56.** d
**57.** c
**58.** c
**59.** d
**60.** 10

**61.** 1 (F); 2 (V); 3 (F); 4 (V).
**62.** b
**63.** 493 m/s
**64.** 127 °C
**65.** 2,0 atm
**66.** ≅ 2,2 atm
**67.** a) Quando a porta do *freezer* é aberta, entra ar mais quente em seu interior, fazendo com que a pressão interna se iguale à pressão externa. A porta é fechada e o ar existente no interior do *freezer* é resfriado rapidamente, diminuindo sensivelmente sua pressão. Como a pressão do ar externo é maior, haverá uma diferença de pressão que dificultará sua abertura. Para conseguirmos abrir a porta, será necessário aplicarmos uma força de intensidade maior do que aquela decorrente da diferença entre a pressão externa e a interna. Se deixarmos passar certo intervalo de tempo, notamos que a abertura da porta fica mais fácil. Isso ocorre porque a vedação da porta não é ideal, o que possibilita a entrada de ar externo no interior do *freezer*. Esse ar será resfriado lentamente, mas aumentará o número de partículas de ar, o que aumentará a pressão do ar no interior do *freezer*. Quando essa pressão tornar-se igual à pressão externa, a massa de ar de dentro do *freezer* ficará praticamente constante e a resistência à abertura da porta será devida apenas aos ímãs existentes na borracha de vedação que aderem ao metal do corpo do *freezer*.
b) $6,0 \cdot 10^3$ N
**68.** a
**69.** 2,5 g
**70.** d
**71.** a) ≅ 0,86 kg/m³
b) ≅ 0,06 m³
**72.** a) $V_A = \frac{2}{3}SL$, $V_B = \frac{1}{3}SL$
b) $\frac{L}{6}$
**73.** d
**74.** b
**75.** d
**76.** a) $1 \cdot 10^4$ mols
b) $3 \cdot 10^6$ J
**77.** e
**78.** 108 balões
**79.** b
**80.** b
**81.** 178 kg
**82.** a) 250 mols
b) 18,75 mols
c) 4,0 h
**83.** 188,8 $cmH_2O$ ou 0,19 atm
**84.** a) $\frac{20}{21}$
b) $P_{atm} = P + 1,0 \cdot 10^4 h$ (SI)
c) $1,05 \cdot 10^5$ N/m²
**85.** $\frac{6}{7} T_0$
**86.** $m = \frac{p_0 a^3 + Mga - nRT}{ga(\mu \cos\theta + \text{sen}\theta)}$
**87.** A ⇒ $CO_2$
B ⇒ $H_2$
C ⇒ Ne
**88.** a) ≅ 1,1 atm
b) $1 \frac{cal}{°C}$
c) < 59 °C

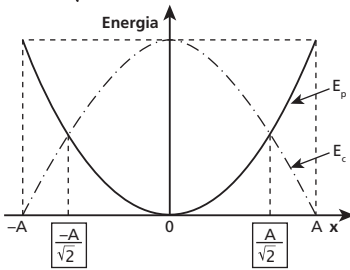
## Tópico 5
## Termodinâmica

**1.** c
**2.** c
**3.** d
**5.** 8 kcal
**6.** 250 J; zero
**7.** 26
**8.** a
**9.** 37
**10.** 31
**11.** 3,0 J
**12.** 150 J
**14.** a) 400 cal
b) −400 cal
c) Zero
**15.** a) 50 cal
b) −50 cal
c) Zero
**16.** e
**17.** c
**18.** a) $V = 7,0 \cdot 10^{-3}\, T$
b) 7,5 L
**20.** 07
**21.** 12
**22.** a) zero
b) $3,2 \cdot 10^2$ J
c) $3,2 \cdot 10^2$ J
d) $1,6 \cdot 10^2$ J
**23.** a) 415 J
b) 10 K ou 10 °C
**25.** a) 1 200 J
b) Zero
c) 1 200 J
**26.** 1 800 J
**27.** a) Realizado; 2 200 J
b) Aumentou; 6 300 J
**28.** 6,0 J
**29.** $2,5 \cdot 10^3$ J
**30.** a) 8 J
b) C; A
**31.** 20 W
**32.** c
**34.** a) Zero, 300 J, 250 J
b) 675 J
c) 27 °C
**35.** a) 10 mols
b) $24,9 \cdot 10^3$ J
c) $37,4 \cdot 10^3$ J
**37.** 26 J
**38.** a) 0,6 mol
b) 2 800 K
c) $3,0 \cdot 10^3$ J
**39.** a
**40.** a
**41.** a) 600 J
b) −700 J
c) Liberado
**43.** a) Zero
b) 450 cal
**44.** 3 750 cal
**45.** 10 J
**46.** 4,0 °C
**47.** b
**48.** b
**49.** 4,1 atm
**50.** a) Isométrica
b) 7 500 cal; 7 500 cal
**51.** $0,45\, p_0 V_0$
**52.** a) 100 K
b) 8 715 J
**53.** b
**54.** e
**56.** 7,5 g
**57.** d
**58.** e
**59.** 10 °C
**60.** a) 40 J
b) 85,5 °C
**61.** 17
**62.** 14
**63.** b
**64.** c
**66.** 55%
**67.** 50%
**68.** 22
**69.** a) 40%
b) 5 000 J
c) 3 000 J
**70.** c
**71.** e
**72.** a) Falsa
b) 50 m³
**73.** a) Expansão adiabática
b) Estar no interior de um cilindro de êmbolo móvel.
**74.** 840 kW
**75.** a) $2,0 \cdot 10^5$ J
b) 67%
**76.** a

**77.** d
**78.** ≅ 28 $cm^3$
**80.** ≅ 4343 cal/K
**81.** 0,3 cal/K
**82.** Verdadeiras: a, b, e, f
Falsas: c, d, g, h
**83.** 4 J
**84.** c
**85.** 42
**86.** c
**87.** a
**88.** a) 0,2 mol
b) $3 \cdot 10^3$ N
c) 6,4 cm
d) 192 J
**89.** b
**90.** a
**91.** +16,7 W/K; aumenta.
**92.** ≅ 4343 cal/K
**93.** 42 J
**94.** 4200 cal
**95.** a
**96.** e
**97.** a) 40 MW
b) 3,0 °C
**98.** $4,9 \cdot 10^{-2}$ cal/g °C
**99.** a) No início, o martelo tem energia mecânica na forma potencial. Na queda, a energia mecânica se conserva e a energia potencial transforma-se em cinética. No impacto, parte dessa energia mecânica (80%) é transferida para as moléculas do gás, transformando-se em energia térmica.
b) 10 K ou 10 °C
**100.** b
**101.** a) 300 cal
b) ≅ 1,7
c) 3 cal/mol K
**102.** a)

b) 123 J
c) 123 J
d) 1230 W
**103.** a)

b) $1,04 \cdot 10^7$ J
c) $-2,4 \cdot 10^6$ J
**104.** a) $T_f = T_0$
b) $-6,9\ n \cdot R$ (processo impossível de ocorrer)
**105.** +0,3 cal/K
**106.** 11,63 J/K
**107.** b
**108.** d
**109.** c

## Tópico 6

## Dilatação térmica dos sólidos e dos líquidos

**1.** d
**3.** 200,2 cm
**4.** $1,0 \cdot 10^{-5}$ °$C^{-1}$
**5.** $2,5 \cdot 10^{-5}$ °$C^{-1}$
**6.** 770 °C
**7.** e
**8.** $4,0 \cdot 10^{-5}$ °$C^{-1}$
**9.** c
**10.** d
**12.** a) $9,6 \cdot 10^{-3}$ m
b) 0,048%
**13.** ≅ 7,2 mm
**14.** 2,0 m
**15.** c
**16.** 101,8 cm
**18.** 0,60 m
**19.** b
**20.** 1,5
**21.** d
**23.** c
**24.** $20 \cdot 10^{-6}$ °$C^{-1}$
**25.** b
**26.** b
**27.** Se a obturação dilatar mais, o dente poderá quebrar. Se dilatar menos, poderão ocorrer infiltrações.
**28.** e
**30.** 101,6 $cm^2$
**31.** 430 °C
**33.** $1,0 \cdot 10^3$ $cm^3$
**34.** 1007,2 $cm^3$
**35.** $6,6 \cdot 10^{-3}$ L
**36.** e
**37.** b
**38.** d
**39.** c
**40.** 0 0 F; 1 1 F; 2 2 V; 3 3 V; 4 4 V
**42.** d
**43.** 1,005 m e 406 $cm^3$
**44.** b
**45.** a
**46.** b
**47.** No período da manhã.
**48.** 110 L
**50.** b
**51.** a) $9,0 \cdot 10^{-4}$ °$C^{-1}$
b) 518 $cm^3$
c) 18,2 $cm^3$
**52.** b
**53.** d
**54.** b
**55.** c
**56.** $527 \cdot 10^{-6}$ °$C^{-1}$
**57.** 143 °C
**58.** d
**59.** e
**60.** b
**62.** 120 °C
**63.** $5 \cdot 10^{-4}$ °$C^{-1}$
**64.** Porque de 0 °C a 4 °C a densidade da água aumenta e, a partir de 4 °C, diminui.
**65.** a
**66.** b
**67.** 20,08 cm
**68.** $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1,5$
**69.** 100 °C
**70.** b
**71.** 1
**72.** b
**73.** e
**74.** e
**75.** 70 °C
**76.** 5,0 °C
**77.** $\frac{\Delta \ell}{\ell_1 \alpha_1 + \ell_2 \alpha_2}$
**78.** a
**79.** 349,0 °C
**80.** 26
**81.** b
**82.** b
**83.** a
**84.** a) Dilatação térmica
b) 25 cal/ °C
**85.** e
**86.** d
**87.** $\frac{1}{A}$ °C
**88.** $R = \frac{d}{4}\left[\frac{2(1 + \alpha_1 \Delta T)}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T} + 1\right]$
**89.** b
**90.** a
**91.** b
**92.** c
**93.** $\frac{4\alpha_a + \alpha_b}{5}$
**94.** a) 500 °C
b) $10^{-2}$ $m^3$
c) 1,3 atm
**95.** $4,3 \cdot 10^{-3}$ °C
**96.** d
**97.** 100 °C

# Parte II Ondulatória

## Tópico 1

## Movimento harmônico simples

**1.** c

**2.** d

**4.** a) 0,5 Hz; 0,10 m
b) 0,5 s; 1,5 s; 2,5 s

**5.** d

**6.** a) 0,5 s
b) $-8\pi$ m/s
c) Zero.

**8.** a) $x = 0{,}5 \cos 4\pi t$ (SI)
b) $x = 0{,}5 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)
c) $x = 0{,}5 \cos\left(4\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)$ (SI)

**9.** d

**10.** b

**11.** a) $\pm 12\pi$ m/s
b) $\pm 80\pi^2$ m/s$^2$

**12.** b

**13.** a) **B:** posição
**A:** velocidade
**C:** aceleração
b) Amplitude: 0,5 m
Frequência: 2,5 Hz

**15.** 51

**16.** Maior

**17.** Permanecerá igual.

**18.** 4,0 kg

**19.** 54

**21.** 9,78 m/s$^2$

**22.** 0,4 m

**23.** a

**24.** c

**25.** $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$

**26.** e

**27.** a) 4,9 s
b) Não

**28.** a) 0,8 Hz
b) 1,6 Hz

**30.** a) $K_2 = 4K_1$
b) $x_2 = \frac{x_1}{4}$

**31.** a) $\omega = 2\pi \frac{rad}{s}$ e $R = \frac{8{,}0}{\pi}$ cm
b) v = 16 cm/s; sentido anti-horário

**32.** a) Circunferência b) Elipse

**33.** Elipse

**34.** c

**35.** d

**36.** a) 0,4 Hz, 0,1 m
b) 12,8 N/m
c) $y = 0{,}1 \cos\left(0{,}8\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (SI)

**37.** e

**38.** a) $y = \frac{3}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)
b) 0,5 m

**39.** 2 **40.** c **41.** a

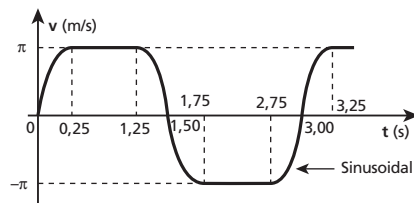
**42.** a) Demonstração
b) 85 min, aproximadamente
c) Demonstração

**43.** b

**44.** 25 cm

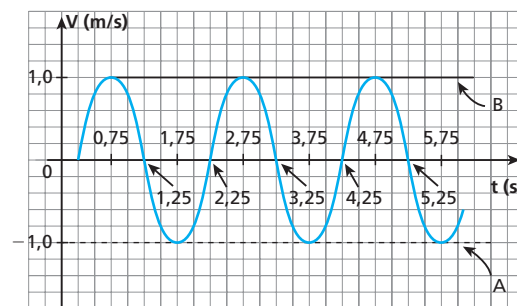
**45.** a) $\frac{ML}{2(M + m)}$
b) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\mu g(M + m)}{ML}}$

**46.** a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{M + m}{k}}$
b) $\mu \geq \frac{k \cdot A}{(M + m)g}$

**47.** a) $\pi$ m/s
b) 3,0 s
c)

**48.** 9,2 °C

**49.** a) No centro de massa do sistema
b) $2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{K(m_1 + m_2)}}$

**50.** 2 **51.** c

**52.** a) 1,0 m/s
b) 33 cm
c)

d) 2,0 m/s e 1,75 s; 3,75 s; 5,75 s, ...

**53.** a) 17,5 cm
b) $5{,}0 \cdot 10^{-1}$ m/s
c) $\frac{\pi}{10}$ s

**54.** e

**56.** b

**57.** e

**58.** c

**59.** $y = -\frac{x}{2}$, com **x** e **y** em cm

**60.** e

**61.** $v = \sqrt{\omega^2 A^2 + k^2}$

**62.** c

**63.** $\frac{1}{2}$

**64.** 40 Hz

## Tópico 2

## Ondas

**2.** a

**3.** e

**4.** e

**5.** e

**6.** c

**7.** d

**8.** d

**9.** d

**10.** a

**11.** d

**12.** b

**13.** b

**14.** d

**16.** 4 cm; 2 cm

**17.** 10 m/s

**18.** b

**19.** d

**20.** d

**22.** 6,0 cm

**23.** 12 cm

**24.** 100 MHz

**25.** c

**26.** 80 cm; 4,0 Hz; 320 cm/s

**27.** c

**28.** a) 2
b) 11,2 m/s

**29.** c

**30.** c

**31.** d

**32.** e

**33.** 75 m

**34.** c

**35.** b

**36.** 66 m

**37.** c

**39.** 13

**40.** 4,0 m

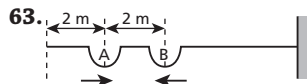
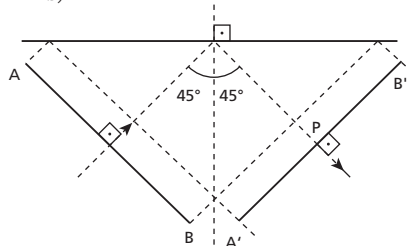
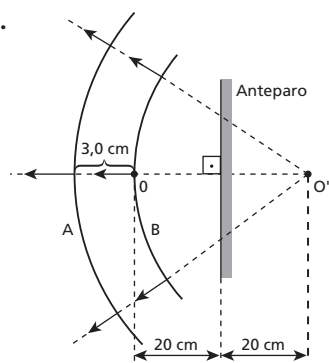
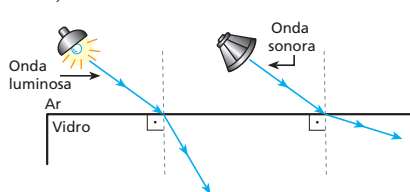
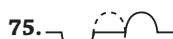
**41.** 20 cm

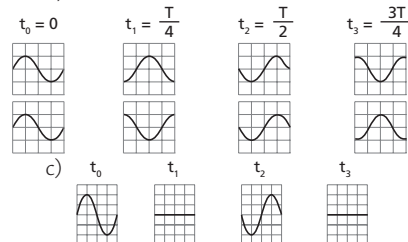
**42.** a) 120 m
b) 6,0 cm

**43.** a) 12 min 30 s
b) 8,0 m/s
c) 5,0 m

**45.** 18 N

**46.** 2,0 kg
**47.** d
**49.** 0,2 m; 10 m/s
**50.** 20 cm; 0,25 s; 4 Hz
**51.** $y = 0,5 \cos [2\pi(50t - 5x)]$ (SI)
**52.** c
**53.**
**54.**

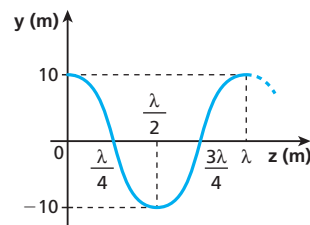
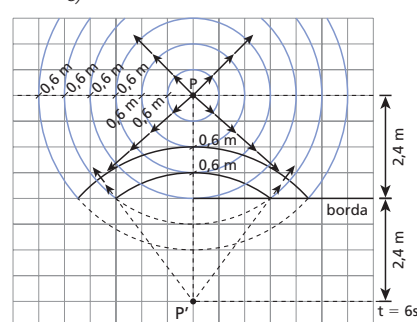
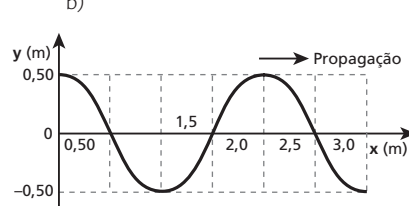
**56.** 2,0 m/s
**57.** d
**58.** c
**59.** a
**60.** d
**61.** 1,0 m
**62.** 26
**63.**

**64.** a
**65.** a) 2,0 s
b)

**66.**

**67.** e
**68.** a) 4,3
b) 70 m
**69.** a)

b) 5 m
**71.** a
**72.** b
**73.** a) 5 kHz
b) 8,8 cm
c) 2,0 ms

**75.**
**76.**
**77.** 2 cm
**78.** c
**79.** c
**80.** d
**81.** 10 Hz
**82.** 480 m/s
**83.** d
**84.** d
**85.** d
**86.** e
**87.** a) Corda **A**: da esquerda para a direita
Corda **B**: da direita para a esquerda
b)

c)

**88.** $\frac{3d}{2}$
**89.** 07
**90.** e
**91.** c
**92.** b
**93.** a) $g = f$
b) $x = y > z$
**94.** c
**95.** a
**96.** e
**97.** a) $\lambda$
b) $3\frac{\lambda}{2}$
**98.** As ondas AM difratam mais facilmente que as ondas FM.
**99.** 46
**101.** **A**(ID), **B**(IC), **C**(ID), **D**(IC)
**102.** d
**103.** 85 Hz
**104.** a) 5,0 Hz
b) 10 Hz
**106.** b
**107.** 1058 Å
**108.** a
**109.** b
**110.** $\lambda$
**111.** $7,5 \cdot 10^{-7}$ m
**112.** d
**113.** V, F, V, V, V
**114.** b
**115.** d
**116.** a) 20 m/s
b) 4 m, 5 Hz, 0,2 s
c)

$$y = 2 \cos \left[2\pi\left(5y - \frac{x}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \text{ (SI)}$$

**117.** a)

$$y = 2 \cos \left[2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \text{ (SI)}$$

b) $\frac{5\pi}{2}$ rad
c) Oposição de fase
**118.** a) 1,57 m
b)

c) $\frac{\lambda}{3}$
**119.** a) 0,3 m/s
b) 0,5 Hz
c)

**120.** e
**121.** d
**122.** d
**123.** 800 m
**124.** a) 0,2 m, nula
b) $3,3 \cdot 10^{-7}$ s
**125.** b
**126.** a) 2,0 Hz, 0,50 m
b)

c) $-8\pi^2$ m/s²
**127.** c
**128.** d
**129.** b
**130.** a) $4,0 \cdot 10^{-4}$ J
b) $1,6 \cdot 10^{-3}$ J
**131.** d
**132.** a) 500 m
b) 2,0 m/s
**133.** b
**134.** e

## Tópico 3
## Acústica

**1.** a) *2001, uma odisseia no espaço*, pois o som (onda mecânica) não se propaga no espaço interplanetário.
b) Os efeitos luminosos estão de acordo com a Física porque a luz (onda eletromagnética) se propaga no espaço interplanetário.

**3.** 17 m e 17 mm

**4.** $\lambda' > \lambda$, $f' = f$

**5.** 100 kHz

**6.** d

**7.** 800 Hz e 200 Hz

**8.** $I' = \frac{I}{4}$

**9.** a) 17 m
b) 340 m

**10.** a) 100 Hz
b) 3,4 m

**11.** 27,5 Hz, 3 520 Hz

**13.** a) 0,12 W
b) 10 cm

**14.** d

**15.** c

**16.** a) Ponto **B**
b) 75 m

**18.** a) 25 Hz
b) 75 Hz

**19.** 30 cm, 60 cm, 90 cm

**20.** 120 cm, 60 cm, 40 cm

**21.** a) 100 Hz
b) Quadruplicar a tração ou reduzir à metade o comprimento do trecho vibratório.
c) 3,3 m

**22.** a) 392 m/s
b) Altura

**23.** Timbre

**24.** b

**25.** d

**26.** 120 m/s, $2{,}88 \cdot 10^3$ N

**27.** 275 Hz

**28.** A frequência do som emitido depende do comprimento vibratório, que varia à medida que o violonista desloca o dedo ao longo da corda.

**29.** c

**30.** d

**31.** a) 400 Hz
b) 672 N

**32.** a) 24 cm
b) 250 Hz

**33.** d

**34.** b

**35.** a) 6 Hz
b) 203 Hz ou 197 Hz

**36.** Ressonância

**37.** A difração do som é muito acentuada, ao passo que a da luz praticamente não ocorre nessa situação.

**39.** a) 500 Hz
b) 2 000 Hz

**40.** 85 Hz, 255 Hz e 425 Hz

**41.** b

**43.** 25 cm, 75 cm, 125 cm

**45.** 332 m/s

**46.** 170 Hz

**47.** a) 68 Hz
b) 34 Hz

**48.** a) 1,5 m
b) Nos pontos situados às seguintes distâncias do alto-falante da esquerda: 0 m; 0,75 m; 1,5 m; 2,25 m; 3,0 m; 3,75 m; 4,5 m; 5,25 m; 6,0 m.

**49.** e

**50.** a) Ressonância
b) À medida que a intensidade da força tensora na corda 4 vai sendo alterada, muda-se a frequência de seu modo fundamental de vibração. A ressonância ocorre quando essa frequência iguala-se à frequência fundamental da corda 5 pressionada.

**51.** São iguais.

**52.** 640 N

**53.** 3,4 kHz

**55.** a) 72 cm
b) 360 m/s

**56.** a) 338 m/s
b) 99 cm; 165 cm

**57.** 8º harmônico, de frequência igual a 19 429 Hz

**58.** 01

**59.** 348 m/s

**60.** b

**61.** b

**62.** a

**63.** d

**64.** c

**65.** I

**67.** a) 6,60 kHz
b) 314 Hz

**68.** 744 Hz

**69.** d

**71.** Aproximadamente 290 W

**72.** b

**73.** $10^4$

**74.** Não. A sensação sonora aumentou 3 dB.

**76.** 90 dB

**77.** a

**78.** a) Entre 20 Hz e 200 Hz
b) 1 W/m²
c) Precisa ser multiplicada por 100.

**79.** a) 15 min
b) 87,5%
c) $10^{11}$

**80.** a

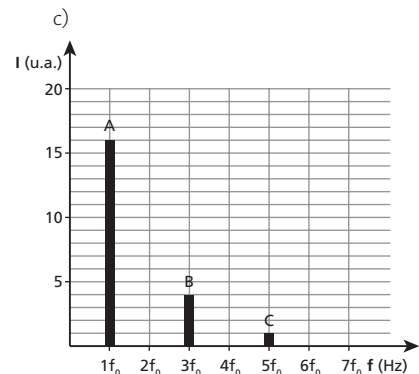
**81.** 334 m/s e 11 m/s, respectivamente

**82.** 330 m

**83.** a) $\tau = 242$ N
b) $f_1^{grossa} = 108$ Hz

**84.** a)

| | λ (m) |
|---|---|
| A | 1,5 |
| B | 0,5 |
| C | 0,3 |

b) $\lambda_0 = 1{,}5$ m
c)

**85.** a

**86.** 20 cm

**87.** a) 3,0 m
b) 6,6 m

**88.** b

**89.** **C** e **E**

**90.** 40

**91.** a) 12,5 cm
b) 31,25 cm
c) 80 s

**92.** a) As frequências de ressonância da coluna de ar são inversamente proporcionais ao seu comprimento.
b) $f = \dfrac{850}{3 - \dfrac{t}{3\pi}}$ Hz
$(0 \leq t < 9\pi)$ s

**93.** a) $4{,}3 \cdot 10^{-4}$ m
b) $3{,}1 \cdot 10^{-4}$ s

**94.** b

**95.** 680 Hz

**96.** Na segunda situação

**97.** d

**98.** a

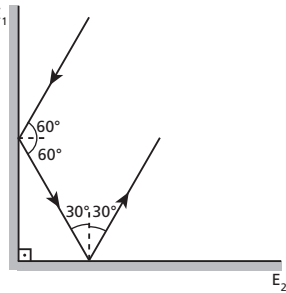
**99.** h = 11,3 m

**100.** a) 264 Hz
b) 62,5 cm
c) 169 N

**101.** 5º harmônico.
7º harmônico.
Frequência fundamental: 85 Hz.

**102.** 250 m
**103.** 450 Hz
**104.** a) 4,25 s
b) 90,3 m
**105.** a) 680 m/s
b) 1 200 m

# Parte III — Óptica Geométrica

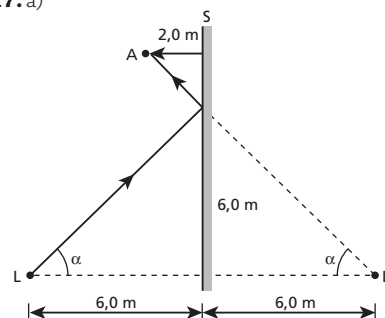
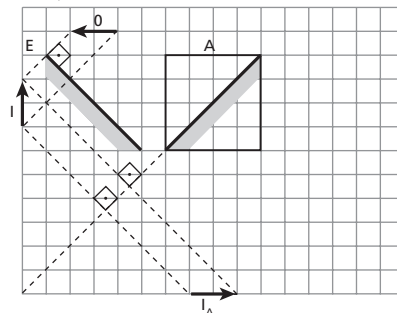
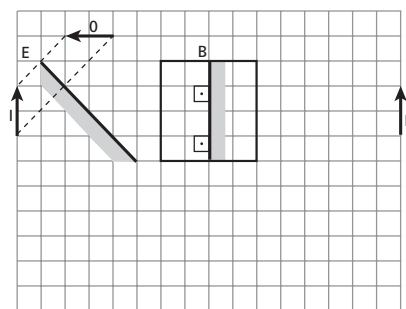
## Tópico 1

## Fundamentos da óptica geométrica

**1.** c
**2.** e
**3.** c
**4.** c
**6.** 8 min 20 s
**7.** $3{,}81 \cdot 10^5$ km
**8.** $9{,}5 \cdot 10^{15}$ m
**9.** A distância das estrelas à Terra é muito grande, de modo que a luz emitida por esses corpos celestes leva muito tempo para atingir nosso planeta.
**10.** a
**11.** b
**13.** 48 m
**14.** 20 m
**15.** a
**16.** 8 cm
**17.** c
**18.** 5,0 m
**19.** 1,0 m
**20.** c
**21.** 2,0 cm
**22.** b
**23.** a
**24.** a) Lua nova
b) 4 min
**25.** a
**26.** c
**27.** b
**29.** a) 1 — verde; 2 — preta; 3 — preta; 4 — verde
b) 1 — preta; 2 — preta; 3 — preta; 4 — vermelha
**30.** c
**31.** c
**32.** c
**33.** a
**34.** d
**35.** a
**36.** d
**37.** e
**38.** a
**39.** a) Ponto objeto real
b) Ponto imagem real e ponto objeto virtual
c) Ponto imagem virtual
**40.** d
**41.** b
**42.** e
**43.** b
**44.** e
**45.** 10,0 m
**46.** $V' = \frac{H}{H - h} V$
**47.** a
**48.** a)
b) d = 0,4 m
**49.** b
**50.** c
**51.** a) Princípio da Propagação Retilínea da Luz
b) $\cong 2{,}99 \cdot 10^5$ km/s
**52.** Anaxágoras encontrou 7 261,9 km. O valor atual admitido para a distância da Terra ao Sol é de 150 000 000 km, aproximadamente.
**53.** $\frac{v_s}{v_h} = 3$
**54.** c

## Tópico 2

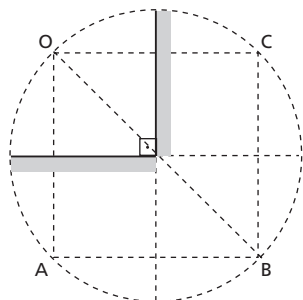
## Reflexão da luz

**2.** a) 30°
b) 60°
**3.** $\theta_1 = 60°$ e $\theta_2 = 120°$
**4.** 9 h
**5.** $\alpha = 60°$ e $\boldsymbol{\alpha}$ independe de $\boldsymbol{\beta}$
**6.**

**7.** b
**9.** 12 m
**10.** 0,64 m²
**11.** a) 1,5 m
b) O tempo não se altera e o número de reflexões passa de 5 para 11.
**12.** c
**13.** e
**14.** d
**15.** a) 40 cm
b) Independe.
**17.** a)
b) 10 m
**18.** a) ꟼƧƎИU
b) 140 cm, 10 cm
**19.** c
**20.** b
**21.** d
**22.** a) 6,0 m, virtual
b) Aproximadamente 27 ns
**24.** a) 90 cm
b) 85 cm
**25.** 1,0 m
**26.** sen $\alpha = 0{,}80$
**28.** a)

b)

**29.** d
**30.** a) 6,0 s
b) 6,0 s
**31.** d
**33.** a) Três imagens
b) Figura I: uma imagem
Figura II: duas imagens
**34.** c
**35.** b
**36.** a) 80 km/h
b) 40 km/h
**38.** $2\sqrt{3}$ m

**39.** d

**40.** a) 100 cm

b)

**41.** a

**42.** d

**43.** e

**44.** e

**45.** e

**46.** a

**47.** 17 cm

**48.** a) 60 m

b) $9{,}0 \cdot 10^3$ W

**49.** **Posição 1:** real, invertida e menor

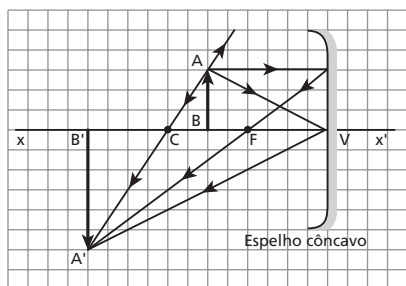
**Posição 2:** real, invertida e igual

**Posição 3:** real, invertida e maior

**Posição 4:** imprópria

**Posição 5:** virtual, direita e maior

**50.** d

**52.**

**54.** 50 cm

**55.** 20 cm

**56.** a) Real e invertida

b) 60 cm

c) 12 cm

**57.** a

**58.** a) Côncavo

b) 96 cm

**60.** a) −15 cm b) 6,0 cm

**61.** 10,0 cm

**62.** a) Côncavo; −20 cm; +2; virtual; direita

b) Convexo; + 5 cm; 0,8; virtual; direita.

c) Plano; infinita; −10 cm; virtual; direita

**63.** a) 20 cm

b) 10 cm

**64.** 60 cm

**65.** 2,0 cm/s

**67.** d

**68.** a) Convexo; 12 cm

b) 4,0 cm

**69.** 80 cm

**70.** 12 cm

**71.** a

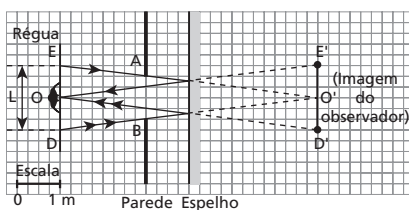
**72.** a) $\dfrac{R(d - R)}{2d - R}$

b) $\dfrac{LR}{2d - R}$

**73.** e

**74.** a) $h = 1{,}0$ m

b) $y = 1{,}5$ m

**75.** a)

b) $L = 1{,}5$ m

**76.** d

**77.** 0,40 s

**78.** b

**79.** −50 cm/s

**80.** 3,0 m/s

**81.** b

**82.** b

**83.** b

**84.** 2,0 m

**85.** 8,0 cm

**86.** a

**87.** e

**88.** 15 cm

**89.** d

**90.** A imagem é de natureza virtual e está a 8,0 cm do vértice do espelho convexo.

**91.** a) $\omega$

b) $\dfrac{a}{2}$

c) $\Delta\phi = \pi$ rad

**92.** a

**93.** a) $L = \dfrac{dH\,\text{sen}\,\theta}{2d + H\cos\theta}$

b) $L = \dfrac{H}{2}$

c) $Y = \dfrac{H}{2}$

**94.** c

**95.** a

**96.** a) 1,0 m/s

b) 5,0 m/s

**97.** e

**98.** a) 48 cm de $E_1$

b) $E_2$ é um espelho plano.

**99.** O automóvel trafega dentro do limite de velocidade da avenida, já que sua velocidade é de 46 km/h, aproximadamente.

**100.** a) $c = \dfrac{Lf^2}{(D - f)(D + L - f)}$

b) $\dfrac{L}{f} = 1$

## Tópico 3
## Refração da luz

**1.** Lâmina verde

**2.** a) 200 000 km/s

b) 125 000 km/s

c) 1,6

**3.** 2,0

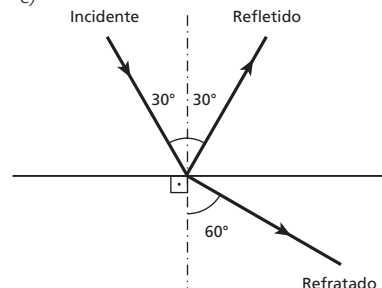
**5.** a) 30°

b) 0°

c) 30°

**6.** a) 60°

b) 30°

c)

**7.** 125

**8.** e

**9.** e

**10.** b

**11.** d

**12.** d

**13.** $R_1$: raio refratado

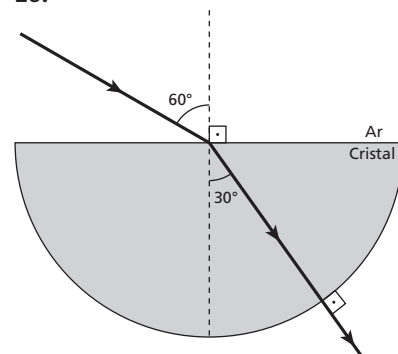
$R_2$: raio refletido

$R_3$: raio incidente

**14.** c

**15.** a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $80\,000\sqrt{3}$ km/s

**16.**

**18.** b

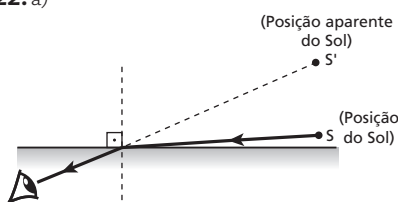
**19.** a) Ângulo de reflexão: 60°

ângulo de refração: 30°

b) $\sqrt{3}$

**20.** d

**21.** 2,0

**22.** a)

b) 50°

**23.** 15°

**24.** a) 55°

b) A 43 cm da parede lateral direita

**26.** $5 \cdot 10^{-7}$ m

**27.** d

**28.** Refração não; reflexão sim

**29.** c

**31.** c

**33.** Reflexão total

**34.** a

**35.** a) 1 e a

b) 7 e g

c) 4 e d

**36.** a

**37.** Refração, acompanhada de dispersão, e reflexão.

**38.** e

**39.** e

**40.** Reflexão total

**41.** a

**42.** a) É igual ou aproximadamente igual ao do líquido.

b) Principalmente porque muitos raios de luz, dirigindo-se do cristal para o gás da fratura, sofrem reflexão total da fronteira cristal-gás.

**43.** a) 1,005

b) Na camada 2

**44.** a) Sofre reflexão total na fronteira entre **A** e **B**.

b) Sofre refração com ângulo de refração de arc sen $\frac{\sqrt{3}}{6}$, além de reflexão parcial na fronteira entre **B** e **A**.

**46.** 10 mm

**47.** $i \geqslant 50°$

**48.** a) $v_c \cong 2{,}04 \cdot 10^8$ m/s

b) $\lambda_c \cong 2\,721$ Å

c) $\theta_c \cong$ arc sen 0,34

**49.** 15°

**50.** a) Maior

b) Menor

**51.** b

**52.** 1,5 m

**53.** 400 m

**54.** a

**55.** e

**56.** a) $\alpha$

b) Não depende.

**58.** b

**59.** a) Virtual

b) Menor

**60.** e

**61.** 1,5 m

**62.** 15 cm; não depende.

**63.** c

**65.** a) 45°

b) Reflexão total

**67.** Há no mínimo dois.

**68.** d

**70.** 1,41

**71.** d

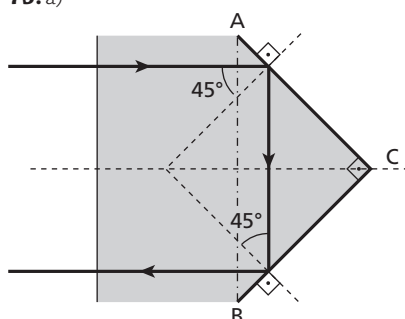
**72.** 45°

**73.** a) 60°

b) 45°

c) $\sqrt{2}$

**74.** Há no mínimo dois.

**75.** a)

b) $\sqrt{2}$

**76.** $n \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**77.** a) 60°

b) $\sqrt{2} < n < 2$

**78.** a) 42°

b) 30°

c) 0,52 m

**79.** a) 9 h 12 min

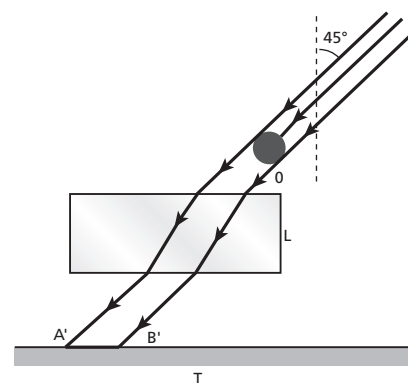
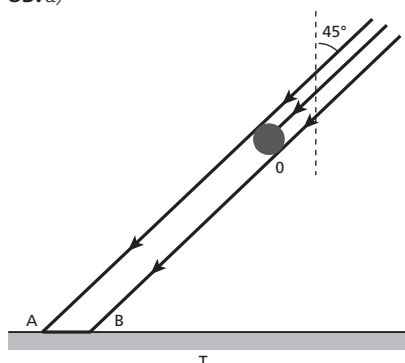
b) 14 h 48 min

**80.** Aproximadamente 27 cm

**81.** a) $d = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

b) Não depende.

**82.** $\frac{5}{3}$

**83.** a)

b) 0,3 cm

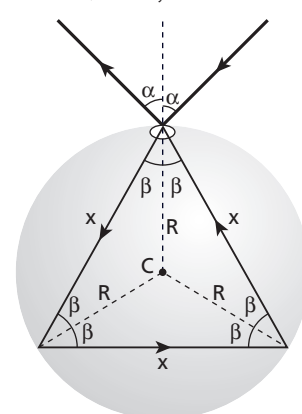
**84.** $x \cong a\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

**85.** $\alpha = \beta = 45°$

**86.** d

**87.** Demonstração

**88.** Vermelho, alaranjado e amarelo

**89.**

a) $\beta = 30°$

b) $\alpha = 45°$

c) $\Delta t = 4{,}3$ ns

**90.** e

**91.** $n \geqslant \frac{\sqrt{7}}{2}$

**92.** a) 30°

b) $2{,}3 \cdot 10^8$ m/s

c) 23 cm

**93.** A 104 cm da superfície livre da água

**94.** a) $2{,}4 \cdot 10^8$ m/s

b) 30°

c) $\cong 0{,}92$ cm

**95.** $n_p \geqslant 2{,}63$

**96.** $\text{sen } i > \frac{\text{sen}(A - L)}{\text{sen } L}$

**97.** b

**98.** $n_1 - n_2 \cong \frac{\phi}{\theta}$ ($\phi$ e $\theta$ em radiano)

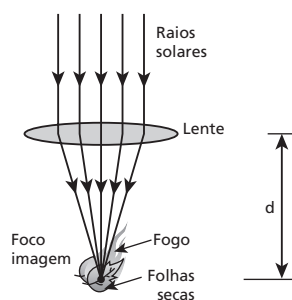
**99.** 2

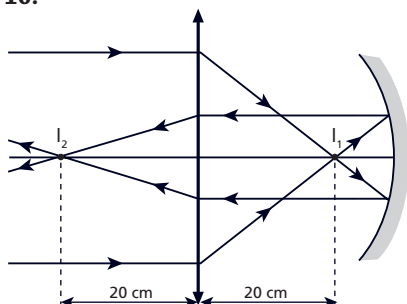
**100.** b

## Tópico 4
## Lentes esféricas

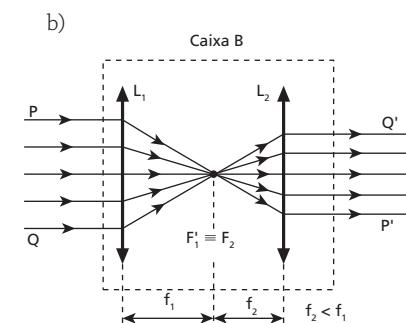
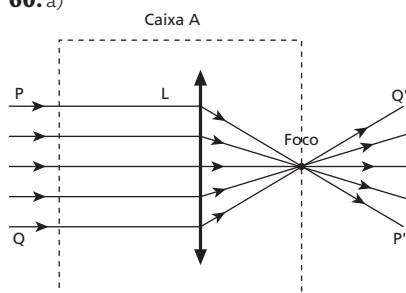
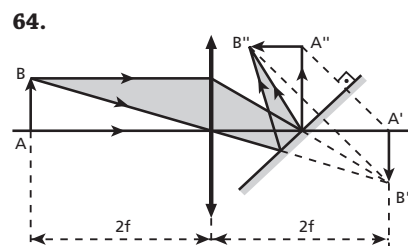
**1.** I; III; II e III

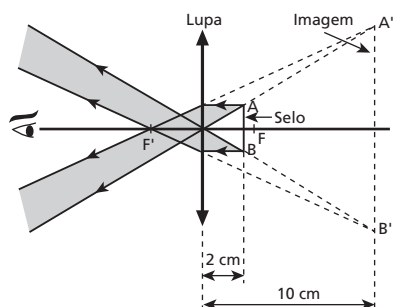
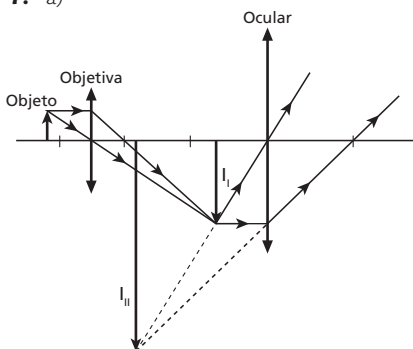
**2.** I; II; III e VI

**3.** a) Convergente
b)

c) d = f

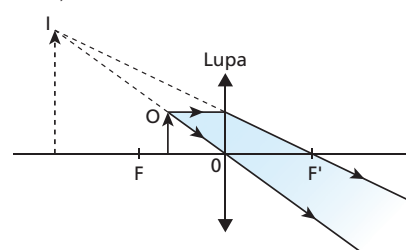
**4.** b
**5.** b
**6.** a) Convergente
b) 30 cm
**7.** c
**8.** b
**9.** d
**10.** a
**11.** d
**12.** d
**13.** c
**15.** 15,0 cm
**16.**

**17.** a) Bicôncava
b) 20 cm
**18.** **Posição 1:** real, invertida e menor
**Posição 2:** real, invertida e igual
**Posição 3:** real, invertida e maior
**Posição 4:** imprópria
**Posição 5:** virtual, direita e maior
**19.** d
**21.** a) 18 cm de **O** e 6,0 cm de **I**
b) Divergente
c) 9,0 cm
**23.** 40 cm
**24.** 15 cm
**25.** b
**27.** a) 10 cm
b) 60 cm
**28.** 5 cm, 12 cm
**29.** b
**30.** b
**31.** d
**33.** 40 cm
**34.** a) Convergente, 10 cm
b) −10 cm, 2
**35.** $2,0 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$
**36.** d
**37.** e
**38.** c
**39.** a) 24 cm
b) −8,0 cm
**40.** f = 16 cm; a lente deve ser colocada entre o objeto e a imagem, a 80 cm do objeto.
**41.** a) 0,084 m × 0,11 m, 0,30 m
b) Invertida na vertical e na horizontal
**42.** a) 312 cm
b) 12 vezes
**43.** a
**45.** 50 cm
**46.** a) −2,0 m
b) −0,5 di
c) Divergente
**47.** a
**49.** d
**50.** a) 20 cm
b) Biconvexa
**51.** a) $1,4 \cdot 10^2$ di
b) $7,0 \cdot 10^{-3}$ m
**52.** e
**53.** a) Afastam-se.
b) 60 cm
**54.** a
**55.** e
**56.** 24 di
**57.** A face convexa deve aderir perfeitamente à face côncava.

**58.** a) 40 cm
b) 90 cm
**59.** 75 cm
**60.** a)

b)

**61.** 10 cm
**62.** e
**63.** a) 68 °C
b) 0,32 W/cm$^2$
**64.**
**65.** c
**66.** a
**67.** a) $\frac{8,0}{3,0} \cong 2,7$ cm
b) a 8,0 cm da lente e de tamanho 2,1 cm
**68.** a) D = 9 cm (ver esquema)
b) 5,2 cm à direita da lente **B**
**69.** e
**70.** d
**71.** d
**72.** a
**73.** a) 50 cm
b) 20 m/s$^2$
**74.** a) 1,2 m, 0,3 m
b) 48 mm, 3 mm, imagens reais e invertidas
**75.** 1,0 m
**76.** b
**77.** a
**78.** 5,2 cm
**79.** a) +4,0 di
b) −1,0 m
c) Face côncava: 25 cm
Face convexa: 50 cm
**80.** $F = \frac{Kf}{2}$
**81.** 60 cm e −20 cm
**82.** **1ª possibilidade:** fonte a 10 cm da lente
**2ª possibilidade:** fonte a 30 cm da lente
**83.** 15 cm, 10 cm e 5,0 cm
**84.** a) $L = \frac{f_0 d_0}{d_0 - f_0}$
b) $f_1 = \frac{f_0 d_0}{d_0 + f_0}$
**85.** a) d = 125 cm
b) f = 20 cm
**86.** a) $x_{E_1}$ = 10 cm e $x_{E_2}$ = 100 cm, operando-se com as fontes da direita e da esquerda, respectivamente.
b) $x_{L_1}$ = 43 cm e $x_{L_2}$ = 67 cm, operando-se com a fonte da direita.
**87.** a) 1
b) Circunferência de raio 20 cm, de centro pertencente ao eixo principal, contida em um plano frontal à lente, a 60 cm de distância em relação a ela.
c) 10 cm/s
**88.** v = 0,50 cm/s
**89.** 2,0 di
**90.** $\frac{3}{7}$

## Tópico 5
## Instrumentos ópticos e óptica da visão

**1.** 75,0 mm
**2.** b
**3.** 10 cm
**4.** a) 3,0 m
b) ≅ 4,9 m
**5.** 16 cm
**6.** a) 2,5 cm
b)

**7.** a)

b) $I_I$ é real e $I_{II}$ é virtual.

**8.** a) 22 cm
b) 8 vezes
**9.** e
**11.** a) 5 cm
b) Real, invertida e menor
$\left(A = -\frac{1}{4}\right)$
**12.** a) 1,3 m
b) 90 cm
**13.** d
**14.** 50 cm
**16.** 45 vezes
**17.** 52 vezes
**19.** a) 97 cm
b) G = 24,25
**20.** a) 0,61 cm
b) 139,4 cm
**21.** b
**22.** b
**23.** d
**24.** d
**25.** a) 15 mm, ≅ 14 mm
b) 4,0 di
**27.** a) Não, pois as lentes corretivas de Porquinho são divergentes e, para "concentrar" os raios solares, são necessárias lentes convergentes.
b) 20 cm
c) 15 cm, convergente
**28.** c
**30.** a) Lentes convergentes
b) + 3,0 di (ou "graus")
**31.** a) Hipermetrope
b) 1,0 m
**32.** a) 35,3 mm
b) 4 118 mm

**33.** a) 22 cm
b) 2,2 m
**34.** 2,99 cm
**35.** a
**36.** d
**37.** d
**38.** c
**39.** d
**40.** a) Defeito **A**: miopia – lente 2
Defeito **B**: hipermetropia – lente 1
b) −2,0 di
**41.** a) Hipermetropia, convergente
b) 10 di
**42.** a) 5,0 cm
b) 5 vezes, 10 mm
**43.** a) −0,50 di
b) +3,0 di
**44.** a)

b) 16,0 cm
c) 40,0 cm
**45.** $f = \frac{D^2 - d^2}{4D}$
**46.** e
**47.** Lente convergente: 10 cm
Lente divergente: −10 cm
**48.** a) −5,0 di; miopia
b) 15 cm
**49.** 50 cm

# Siglas

| | |
|---|---|
| **Acafe-SC** | Associação Catarinense das Fundações Educacionais |
| **Aman-RJ** | Academia Militar de Agulhas Negras |
| **Cefet-MG** | Centro Federal de Educação Tecnológica |
| **Cefet-PR** | Centro Federal de Educação Tecnológica |
| **Cesgranrio-RJ** | Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio |
| **Cesubra-DF** | Centro de Ensino Superior de Brasília |
| **EEM-SP** | Escola de Engenharia Mauá |
| **Enem** | Exame Nacional de Ensino Médio |
| **Esam-RN** | Escola Superior de Agricultura de Mossoró |
| **Faap-SP** | Fundação Armando Álvares Penteado |
| **Fameca-SP** | Faculdade de Medicina de Catanduva |
| **Fatec-SP** | Faculdade de Tecnologia de São Paulo |
| **Fazu-MG** | Faculdades Associadas de Uberaba |
| **FCC-SP** | Fundação Carlos Chagas |
| **FCMSC-SP** | Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa |
| **FEI-SP** | Faculdade de Engenharia Industrial |
| **FGV-SP** | Fundação Getulio Vargas |
| **FICE** | Faculdade Internacional de Ciências Empresariais |
| **FMIt-MG** | Faculdade de Medicina de Itajubá |
| **FMTM-MG** | Faculdade de Medicina do Triângulo Mineiro |
| **FMU-Fiam-Faam-SP** | Faculdades Metropolitanas Unidas, Faculdades Integradas Alcântara Machado, Faculdade Alcântara Machado |
| **Furg-RS** | Fundação Universidade Federal do Rio Grande |
| **Fuvest-SP** | Fundação Universitária para o Vestibular |
| **IME-RJ** | Instituto Militar de Engenharia |
| **IMS-SP** | Instituto Moreira Salles |
| **IPE** | Instituto de Pesquisas Ecológicas |
| **ITA-SP** | Instituto Tecnológico de Aeronáutica |
| **Mack-SP** | Universidade Mackenzie |
| **Puccamp-SP** | Pontifícia Universidade Católica de Campinas |
| **PUC-MG** | Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais |
| **PUC-RS** | Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul |
| **PUC-SP** | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo |
| **UCDB-MT** | Universidade Católica Dom Bosco |
| **UCSAL-BA** | Universidade Católica de Salvador |
| **Udesc-SC** | Universidade do Estado de Santa Catarina |
| **Uece** | Universidade Estadual do Ceará |
| **UEL-PR** | Universidade Estadual de Londrina |
| **UEM-PR** | Universidade Estadual de Maringá |
| **Uepa** | Universidade Estadual do Pará |
| **UEPB** | Universidade Estadual do Paraíba |
| **Uerj** | Universidade Estadual do Rio de Janeiro |
| **Uespi** | Universidade Estadual do Piauí |
| **Ufac** | Universidade Federal do Acre |
| **Ufal** | Universidade Federal de Alagoas |
| **Ufam** | Universidade Federal do Amazonas |
| **UFBA** | Universidade Federal da Bahia |
| **UFC-CE** | Universidade Federal do Ceará |
| **Ufes** | Universidade Federal do Espírito Santo |
| **UFF-RJ** | Universidade Federal Fluminense |
| **UFG-GO** | Universidade Federal de Goiás |
| **Ufla-MG** | Universidade Federal de Lavras |
| **UFMA** | Universidade Federal do Maranhão |
| **UFMG** | Universidade Federal de Minas Gerais |
| **UFMS** | Universidade Federal do Mato Grosso do Sul |
| **UFMT** | Universidade Federal do Mato Grosso |
| **Ufop-MG** | Universidade Federal de Ouro Preto |
| **UFPA** | Universidade Federal do Pará |
| **UFPE** | Universidade Federal de Pernambuco |
| **UFPel-RS** | Universidade Federal de Pelotas |
| **UFPI** | Universidade Federal do Piauí |
| **UFPR** | Universidade Federal do Paraná |
| **UFRGS-RS** | Universidade Federal do Rio Grande do Sul |
| **UFRJ** | Universidade Federal do Rio de Janeiro |
| **UFRN** | Universidade Federal do Rio Grande do Norte |
| **UFSC** | Universidade Federal de Santa Catarina |
| **UFSCar-SP** | Universidade Federal de São Carlos |
| **UFSE** | Universidade Federal de Sergipe |
| **UFSM-RS** | Universidade Federal de Santa Maria |
| **UFTM-MG** | Universidade Federal do Triângulo Mineiro |
| **UFU-MG** | Universidade Federal de Uberlândia |
| **UFV-MG** | Universidade Federal de Viçosa |
| **Unaerp-SP** | Universidade de Ribeirão Preto |
| **Unama-AM** | Universidade da Amazônia |
| **UnB-DF** | Universidade de Brasília |
| **Uneb-BA** | Universidade do Estado da Bahia |
| **Unesp-SP** | Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho |
| **Unicamp-SP** | Universidade Estadual de Campinas |
| **UnicenP-PR** | Centro Universitário Positivo 2 PR |
| **Unicentro-PR** | Universidade Estadual do Centro-Oeste |
| **Unifei-MG** | Universidade Federal de Itajubá |
| **Unifesp-SP** | Universidade Federal de São Paulo |
| **Unifor-CE** | Universidade de Fortaleza |
| **Unimep-SP** | Universidade Metodista de Piracicaba |
| **Unip-SP** | Universidade Paulista |
| **Unirio-RJ** | Universidade do Rio de Janeiro |
| **Unisa-SP** | Universidade de Santo Amaro |
| **Unitau-SP** | Universidade de Taubaté |
| **Univali-SC** | Universidade do Vale do Itajaí |
| **Univest-SP** | Faculdades Integradas Univest |
| **USF-SP** | Universidade São Francisco |
| **Vunesp-SP** | Fundação para o Vestibular da Unesp |